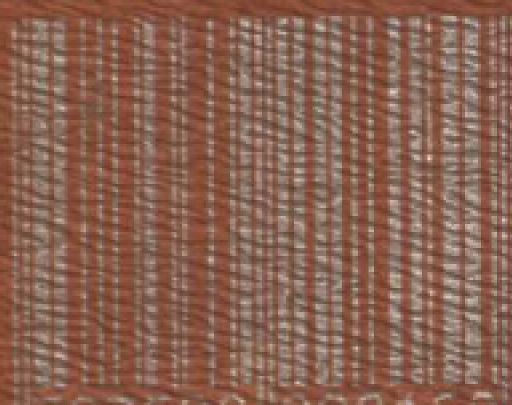
JINGRUN CHEN
SELECTED PAPERS

陈景润文集

JINGRUN CHEN
SELECTED PAPERS



ISBN7-5392-2815-6/Z · 29
定价：[illegible] 元

JINGRUN CHEN
SELECTED PAPERS
陈景润文集

江西教育出版社

责任编辑：黄明雨
美术编辑：徐　洪
装帧设计：石　川
责任印制：马正毅
　　　　　赵　崎

陈景润文集

CHEN JINGRUN WENJI
江西教育出版社出版发行
（330003　南昌市老贡院8号）
江西科佳图书印刷装订有限责任公司印刷
1998年3月第1版　1998年3月第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/16　印张：29　插页：8　字数：500千
印数：0,001－1,750册
ISBN 7-5392-2815-6/Z·29　定价：88.00元

出 版 说 明

《陈景润文集》是 1996 年 8 月开始编辑的. 它收入了陈景润院士一生各个时期的主要论文, 共 25 篇, 按发表时间顺序排列. 其中第 20 篇是与潘承洞教授合作的, 第 22 、23 、24 篇是与王天泽教授合作的, 第 25 篇是与刘健民教授合作的. 《文集》的全部论文这次都经过了仔细的校勘, 订正了原文的印刷错误和一些标点符号; 个别处的错误因其不影响内容, 故未予纠正.

《文集》是由中国科学院数学研究所的王元教授与山东大学的潘承洞教授两位院士主持编辑的. 不幸的是潘承洞院士已于 1997 年 12 月 27 日逝世, 未能见到《文集》的正式出版. 在此我们谨表示对他的深切怀念.

江西教育出版社

1998 年 2 月

Publisher's Remarks

The project of compiling the Selected Papers of Professor Jingrun Chen started in August 1996. Main works, 25 in number, of Professor Jingrun Chen, member of the Chinese Academy of Sciences, are arranged in publication time order. Paper No. 20 has Professor Pan Chengdong as its coauthor, and papers No. 22, 23, 24 have Professor Wang Tianze as their coauthor, and paper No. 25 has Professor Liu Jianmin as its coauthor. All papers in this book were carefully checked against the original texts while some non-crucial misprints were neglected.

Professor Wang Yuan of the Institute of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences and Professor Pan Chengdong of Shandong University, two members of the Chinese Academy of Sciences, took charge of the project. We mourn with deep grief for the death of Pan Chengdong in December 27, 1997, unable to view the publication of the book.

Jiangxi Education Press
February 1998

序

早在 1956 年，我们就认识了景润．王元于 1952 年在浙江大学毕业后即到中国科学院数学研究所跟随华罗庚教授学习数论．承洞是 1956 年于北京大学毕业的，在校期间，他参加了闵嗣鹤教授领导的数论专门化，以后又留校做研究生，继续研究数论． 1953 年景润毕业于厦门大学．由于他对塔内问题的贡献受到华罗庚教授的赏识，他被邀请参加 1956 年 8 月在北京召开的“全国数学论文报告会”．我们就是在这时相识的．

我们三人几乎是同时进入对解析数论的研究． 40 年来，我们经常在一起讨论与切磋，对彼此的工作大力支持．我们曾先后对筛法与哥德巴赫猜想作出过改进，为中国的数论研究作出了奉献．

景润的身体自幼就衰弱多病．他长期以来，极端地刻苦努力，生活过于简朴，以致积劳成疾，晚年又患有帕金森氏综合症，住医院达十年之久．在住医院期间，景润仍顽强地进行研究工作，指导研究生，直到生命的终结．

应江西教育出版社之邀，我们共同编辑了这本《陈景润文集》．《文集》收集了景润在各个时期的主要论文，其中还附有我们撰写的景润的“生平与工作简介”．

《文集》的出版得到中国科学院数学研究所的支持；得到景润的家属，特别是由昆女士的支持；得到江西教育出版社的支持．《文集》的编辑过程中，从论文搜集，选择，翻译与校对等繁重任务，潘承彪、陆柱家、张明尧、王天泽、贾朝华诸教授参与了工作．在出版过程中，又得到周榕芳先生、黄明雨先生、史永超先生与王婷女士、邵欣女士的帮助，在此一并致以深深的感谢．

王　元　潘承洞

1996 年 12 月

Preface

We got to know Jingrun in 1956. Wang Yuan graduated from Zhejiang University in 1952 and went to the Institute of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences at once, and learned number theory from Professor L.K. Hua. Chengdong graduated from Peking University in 1956. As a student, he attended the seminar of number theory led by Professor Min Sihe. After graduation he became a postgraduate and continued to research on number theory. Jingrun graduated from Xiamen University in 1953. He was very much appreciated by Professor L.K.Hua because of his contribution to Tarry problem. He was invited to attend the National Conference on Mathematical Treatises held in Beijing in August 1956. We knew each other at that time.

We three started in the research of analytic number theory almost at the same time. We had often discussed and compared notes together and greatly supported each other for 40 years. We improved sieve method and Goldbach conjecture one after another and made contribution to the mathematical research in China.

Jingrun was delicate in health since he was a child. He worked extremely hard, lived a too simple life and his health broke down from constant overwork . In his later years he suffered from Parkinson's disease and spent ten years in hospital. Jingrun, with an indomitable will, still did his research work and instructed postgraduates in hospital untill the end of his life.

At the invitation of Jiangxi Education Press, we compiled the present "Selected Papers", which contain main treatises of Jingrun in diffrent periods, including a brief account of Jingrun's life and work composed by us.

We got support from the Institute of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences, from the relatives of Jingrun, especially from Madam You Kun, from Jiangxi Education Press in the publication of the "Selected Papers". During the process of composing the "Selected Papers", Professors Pan Chengbiao, Lu Zhujia, Zhang Mingyao, Wang Tianze, Jia Chaohua took part in the arduous task of searching, selecting, translating and proving the "Selected Papers". In the process of the publication, we also got assistance from Mr. Zhou Rongfang, Mr. Huang Mingyu, Mr. Shi Yongchao, Mrs. Wang Tin and Mrs. Shao Xin. We would like to express our heartfelt thanks to all of them.

Wang Yuan, Pan Chengdong
December 1996

目　录

Contents

陈景润

—— 生平与工作简介 ——

王　元　　　　　　潘承洞
(中国科学院数学研究所)　(山东大学数学系)

陈景润于 1933 年 5 月 22 日，生于福建省福州市. 他的父亲陈元俊是一个邮政局职员，母亲于 1947 年即过世. 由于父亲收入低微及家庭人口较多，所以家境相当贫寒.

陈景润在福州读完小学与中学. 1949 年至 1953 年，他就读于厦门大学数学系. 大学毕业后，由政府分配至北京市第四中学任教. 他对教师这一工作很不适宜而被辞退. 厦门大学校长王亚南了解他的处境之后，于 1955 年 2 月将陈景润调回厦门大学工作.

那时，陈景润对数论产生了强烈的兴趣. 厦门地处海防前线，时常有空袭警报，需到防空洞躲避. 陈景润就把华罗庚的专著《堆垒素数论》撕开，放几页在身上，走到哪里，学到哪里. 《堆垒素数论》的第四章 "某些三角和的中值公式 (II)" 是用华罗庚的方法来处理低次多项式所对应的三角和的中值公式. 第五章 "维诺格拉朵夫的中值公式及其推广" 则是用维诺格拉朵夫方法来处理高次多项式对应的三角和的中值公式. 陈景润发现用《堆垒素数论》第五章的方法可以改进第四章的某些结果. 他写了一篇论文 "关于塔内 (G. Tarry) 问题" 寄给了华罗庚. 华罗庚将陈景润的论文交给中国科学院数学研究所的一些研究人员审查. 陈景润的结果被确认是对的. 华罗庚认为陈景润是一个很有才能的年轻人.

1956 年 8 月，中国数学会在北京召开 "全国数学论文报告会". 由华罗庚推荐，陈景润应邀参加大会，并报告了他关于塔内问题的结果，受到与会者的好评. 由于华罗庚的赏识与推荐，陈景润于 1957 年 10 月被调到中国科学院数学研究所任实习研究员.

陈景润在中国科学院数学研究所的良好环境中，研究工作进展很快，取得了重要成果. 他从研究三角和的估计及其应用入手，对圆内整点问题，除数问题，球内整点问题及华林 (E. Waring) 问题等著名问题的结果，作出了重要的改进.

从 60 年代中开始，陈景润又转入了筛法及其应用的研究，达到了他研究工作的顶峰. 他对哥德巴赫 (C. Goldbach) 猜想及殆素数分布的研究成

果有广泛的影响，受到国内外数学家的高度评价. 1978 年与 1982 年，他两度收到在国际数学家大会上作 45 分钟报告的邀请.

陈景润一直多病，健康欠佳. 在“文化大革命”的十年中，陈景润受到了错误的批判与不公正的待遇，使他的工作与健康都受到严重的伤害. 1984 年，陈景润不幸得了帕金森氏综合症，即使在这样的情况，他仍不停地进行研究工作，并常与年轻学生讨论数学问题. 1976 年，“文化大革命”结束后，陈景润的工作与生活得到了政府很好的照顾，在他病重住医院的几年中，更得到政府对他的特别照顾. 1996 年 3 月 19 日，陈景润因病情加重，治疗无效而去世.

由于陈景润在数学上的突出贡献，他于 1977 年被提升为中国科学院数学研究所研究员，1980 年当选为中国科学院学部委员. 陈景润得到过国家自然科学一等奖，何梁何利数学奖与中国数学会华罗庚数学奖.

陈景润于 1980 年与由昆女士结婚，生有一个儿子陈由伟.

数学工作

一. 筛法及其应用

1. 表大偶数为素数与殆素数之和.

哥德巴赫猜想是 1742 年，哥德巴赫与欧拉 (L. Euler) 的通信中提出来的关于表整数为素数之和的两个猜想，即

$$\text{每一个偶数} \geq 6 \text{ 都是两个奇素数之和,} \tag{A}$$

$$\text{每一个奇数} \geq 9 \text{ 都是三个奇素数之和.} \tag{B}$$

显然由 (A) 可以推出 (B). 基于圆法及关于素变数三角和的估计，维诺格拉朵夫 (И. М. Виноградов) 于 1937 年天才地证明了，猜想 (B) 对于充分大的奇数成立. 因此剩下要证明的就是猜想 (A) 了. 利用维诺格拉朵夫方法还可以证明，几乎所有的偶数都是两个素数之和. 详言之，命 $E(x)$ 表示不超过 x 的偶数中不能表示为两个素数之和的偶数个数. 则 $E(x) = O(x(\ln x)^{-B})$，其中 B 为任意正常数，且与 O 有关的常数仅依赖于 B.

研究猜想 (A) 的另一个方法是筛法. 筛法肇源于公元前 250 年的“埃拉朵斯染尼氏 (Eratosthenes) 筛法”. 1919 年，布伦 (V. Brun) 对筛法作出了重大改进，并将它用于哥德巴赫猜想. 命 P_a 表示素因子个数不超过 a 的整数. 我们称 P_a 为一个殆素数. 布伦证明了

$$\text{每一个充分大的偶数都是两个素因子个数不超过 9 的殆素数之和，简单记为}(9,9). \tag{1}$$

我们可以类似地定义 (a,b). 不少数学家改进了布伦的方法与他的结果：$(7,7)$ (拉代马海尔 (H. Rademacher), 1924), $(6,6)$(埃斯特曼 (T. Estermann),1932), $(5,5)$ (布赫夕塔布 (A. A. Buchstab) 1938), $(4,4)$(布赫夕塔布， 1940) 及 (a,b) ($a+b\le 6$, 孔恩 (P. Kuhn), 1954). 其中布赫夕塔布与孔恩是将某些组合方法加以巧妙地运用，从而使布伦方法的威力大大地提高了. 关于埃拉朵斯染尼氏筛法的另一重要改进是 1947 年赛尔贝格 (A. Selberg) 提出来的. 综合以上的方法，王元证明了 (3,4)(1956) 与 (2,3)(1957).

运用布伦筛法，素数分布理论及林尼克 (Yu. V. Linnik) 的大筛法，瑞尼 (A. Rényi) 于 1948 年证明了 $(1,c)$, 即

$$\text{每一个大偶数都是一个素数与一个素因子个数不超过 } c \text{ 的殆素数之和，其中 } c \text{ 是一个常数}. \tag{2}$$

命 $\pi(x;k,l)$ 表示适合 $p\equiv l(\operatorname{mod} k)$, $p\le x$ 的素数个数. 瑞尼关于 (2) 的证明中隐含了下面关于 $\pi(x;k,l)$ 的中值公式：存在 $\delta>0$ 使

$$\sum_{k\le x^{\delta}}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x;k,l)-\frac{\operatorname{li}x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{c_1}}\right). \tag{3}$$

其中 $\varphi(k)$ 表示欧拉函数， $\operatorname{li}x=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$ 及 c_1 为常数 ≥ 5. 1961 年与 1962 年，巴尔巴恩 (M. B. Barban) 与潘承洞分别独立地证明 (3) 式对于 $\delta=\frac{1}{6}-\varepsilon$ 及 $\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon$ 成立，其中 ε 为任意正数，而与 O 有关的常数依赖于 ε. 潘承洞并由 $\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon$ 导出 (1,5). 1962 年与 1963 年，潘承洞与巴尔巴恩又独立地证明 (3) 式对于 $\delta=\frac{3}{8}-\varepsilon$ 成立并推出 (1,4). 注意有时 (3) 式中的 $\pi(x;k,l)$ 需换成一个加权和. 1965 年，阿 · 维诺格拉朵夫 (A. I. Vinogradov) 与庞比尼 (E. Bombieri) 独立地得出 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$. 庞比尼的结果得出的 k 的范围还更大一些，即 $x^{\frac{1}{2}}/(\ln x)^{c_2}$, 其中 c_2 是依赖于 c_1 的正常数，由此导出了 (1,3). 庞比尼 - 阿 · 维诺格拉朵夫公式的重要性在于有时可以用它来代替广义黎曼 (G. F. B. Riemann) 猜想.

1966 年，陈景润天才地引进了一个转换原理，从而证明了 (1,2), 即

$$\text{每个大偶数都是一个素数与一个素因子个数不超过 2 的殆素数之和}. \tag{4}$$

命 p, p_1, p_2, p_3 表示素数， $A = \{a_v\}$ 为一个有限整数集合，及 $F(A; q, q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数： $a_v \equiv 0 (\bmod q)$, $a_v \not\equiv 0 (\bmod p)$, $(p < q', p \nmid q)$, 特别记 $F(A; q') = F(A; 1, q')$.

命 n 为一个偶数， $A = \{n - p, p < n\}$,

$$N = F(A; n^{\frac{1}{10}}) - \frac{1}{2} \sum_{n^{\frac{1}{10}} \le p < n^{\frac{1}{3}}} F(A; p, p^{\frac{1}{10}}). \quad \Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p<n \\ (p_{1,2})}} \sum_{\substack{n-p=p_1p_2p_3 \\ p_3 \le n/p_1p_2}} 1$$

及 $M = N - \Omega + O(n^{9/10})$, 此处 $(p_{1,2})$ 表示条件 $n^{\frac{1}{10}} \le p_1 < n^{\frac{1}{3}} \le p_2 \le \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. 藉助于庞比尼 - 阿 · 维诺格拉朵夫中值公式及各种筛法可以得出 N 的一个正下界估计，由此即得出 (1,3). 陈景润引进 Ω, 并给一个上界估计，从而使 M 有一个正下界. 这样就证明了 (1,2). (见 [18,19]).

2. 表偶数为两素数之和的表法数估计.

命 n 为偶数及 $D(n) = \sum\limits_{p_1+p_2=n} 1$ 表示将 n 表为两素数之和的表法个数. 将赛尔贝格筛法用于集合 $A = \{a_v = v(n-v), 1 \le v < n\}$, 则可以得到

$$D(n) \le 16\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1 + o(1)),$$

此处

$$\sigma(n) = \prod_{p|n} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

若将赛尔贝格筛法用于集合 $A = \{a_p = n - p, p < n\}$ 并用到庞比尼 - 阿 · 维诺格拉朵夫中值公式, 则可以得到 $D(n) \le 8\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1 + o(1))$. 但欲改进系数 8, 则是很困难的事. 1978 年，陈景润将系数 8 改进为 7.8342. 换言之，他证明了 (见 [25])

$$D(n) \le 7.8342\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1 + o(1)). \tag{5}$$

3. 殆素数的分布问题.

素数论中有一个著名猜想：

$$\text{当 } x \ge 1 \text{ 时，在区间 } [x, x + 2x^{\frac{1}{2}}] \text{ 中恒有一个素数.} \tag{C}$$

首先是布伦在 1919 年，用他的筛法证明了，当 x 充分大时，在区间 $[x, x + x^{\frac{1}{2}}]$ 中存在一个殆素数 P_{11}, 即猜想 (C) 对 P_{11} 成立. 布伦的结果被不

少数学家加以改进. 例如王元在 1957 年证明了存在 $P_3 \in [x, x + x^{\frac{20}{49}}] (x > x_0)$. 我们有兴趣于这样的问题, 即对于用殆素数 P_2 代替素数时, 猜想 (C) 是否成立? 王元于 1957 年证明了, 当 x 充分大时, 有 P_2 满足 $P_2 \in [x, x + x^{\frac{10}{17}}]$. 1969 年, 黎切尔特 (H. E. Richert) 将上面的结果进一步改进为 $P_2 \in [x, x + x^{\frac{6}{11}}]$, $(x > x_0)$. 1975 年, 陈景润对于 P_2 证明了猜想 (C), 即当 x 充分大时有 P_2 使

$$P_2 \in [x, x + x^{\frac{1}{2}}]. \tag{6}$$

陈景润在证明 (6) 时用到了加权筛法, 其中余项估计用到了三角和的估计. 1979 年, 陈景润又用组合方法将 (6) 式中的 $x^{1/2}$ 改进为 $x^{0.477}$. 陈景润的方法成为以后不少重要工作的出发点. (见 [21.27]).

二. 其他工作

4. 华林问题

所谓华林问题是英国数学家华林于 1770 年提出来的关于表正整数为正整数的等方幂和的问题, 即

对于整数 $k \geq 2$, 恒存在一个仅依赖于 k 的整数 $s = s(k)$, 使每一个正整数都可以表示为 s 个非负整数的 k 次方幂之和. (D)

这一历史难题是 1908 年由希尔伯特 (D.Hilbert) 证明的. 命使上面结论成立的最小的 s 为 $g(k)$. 问 $g(k)$ 等于什么? 或其上界估计? 已有的重要结果为 $g(2) = 4$(欧拉, 拉格朗日 (J. L. Lagrange) 1770), $g(3) = 9$ 很早即被菲弗立希 (A. Wieferich) 证明. 狄克逊 (L. E. Dickson) 与皮勒 (S. S. Pillai) 独立地证明了当 $k > 6$ 及

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] + 3\right\} \tag{7}$$

时有

$$g(k) = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2,$$

此处 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 皮勒又证明了 $g(6) = 73$. 于是剩下要处理的只是 $k = 4, 5$ 及使 (7) 式不成立的 k. 陈景润于 1964 年完全解决了 $k = 5$ 时的情形, 即

$$g(5) = 37. \tag{8}$$

用陈景润的方法还可以导出 $g(4) \leq 20$. (见 [3,11,20]). 直至 1986 年，巴拉苏仆勒曼尼 (R. Balasubramanian), 德苏耶 (J. M. Deshouillers) 与坠斯 (F. Dress) 才证明了 $g(4) = 19$. (见 [BDD86]).

5. 格子点问题

命 $r(n)$ 表示将正整数 n 分解成两个整数平方之和的分法个数及 $r(0) = 1$. 则

$$A(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} r(n)$$

就等于落在圆 $u^2 + v^2 \leq x$ 中的整点 (u, v) 的个数. 命 $d(n)$ 表示正整数 n 的因子个数. 则

$$D(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} d(n)$$

就是在双曲扇形 $uv \leq x, u \geq 1, v \geq 1$ 中的整点 (u, v) 的个数. 所谓圆内整点问题与除数问题分别为求最小的 θ 与 φ 使对于任何 $\varepsilon > 0$ 皆有 $A(x) = \pi x + O(x^{\theta+\varepsilon})$ 与 $D(x) = x(\ln x + 2\gamma - 1) + O(x^{\varphi+\varepsilon})$ 成立，此处 γ 为欧拉常数而与 O 有关的常数仅依赖于 ε. 数论中有一个著名的猜想:

$$\theta = \varphi = \frac{1}{4}. \tag{E}$$

还有一个著名问题为求黎曼 ζ- 函数在临界线上的阶，即 $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ 的估计. 由于近代处理这些问题的方法都是类似三角和的估计，所以仅叙述圆内整点问题的进展.

首先是高斯 (C. F. Gauss) 证明了 $\theta = \frac{1}{2}$.1903 年, 伏龙诺耶 (G. Voronoi) 给予重要改进，他证明了 $\varphi = \frac{1}{3}$, 1906 年夕尔宾斯基 (W. Sierpinski) 证明了 $\theta = \frac{1}{3}$. 1923 年，范 · 代 · 柯尔坡特 (J. G. Van der Corput) 引进了某种三角和的估计，将 θ 改进为 $\theta = \frac{37}{112}$. 迄至 1942 年，最佳结果 $\theta = \frac{13}{40}$ 是华罗庚得到的. 1963 年，陈景润将华罗庚的结果改进为 $\theta = \frac{12}{37}$, 即

$$A(x) = \pi x + O(x^{\frac{12}{37}+\varepsilon}). \tag{9}$$

(见 [8]).

现在最好的估计是依万尼斯 (H. Iwaniec) 与莫卓溪 (J. Mozzochi) 得到的 $\theta = \frac{7}{22}$. (见 [IM88]).

类似于圆内整点问题与除数问题有所谓球内整点问题与虚二次域的类数平均问题. 详言之，命 $B(x)$ 表示球 $u^2 + v^2 + w^2 \leq x$ 内的整点 (u, v, w)

的个数. 求最小的 θ_1 使对于任何 $\varepsilon > 0$ 皆有 $B(x) = \frac{4}{3}\pi x^{3/2} + O(x^{\theta_1+\varepsilon})$. 这就是球内整点问题. 命 d 为整数 > 0 及 $h(-d)$ 表示虚二次域 $Q(\sqrt{-d})$ 的类数. 类数平均问题就是求最小的 φ_1 使对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$H(x) = \sum_{1 \leq d \leq x} h(-d) = \frac{4\pi}{21\zeta(3)} x^{3/2} - \frac{2}{\pi^2} x + O(x^{\varphi_1+\varepsilon}).$$

1963 年，陈景润与维诺格拉朵夫独立地证明了

$$\theta_1 = \varphi_1 = 2/3. \tag{10}$$

与圆内整点问题相类似， θ_1 与 φ_1 也有相应的改进.

6. 算术级数中的最小素数问题

命 k, l 为满足 $(k, l) = 1$ 的正整数, 问在算术级数 $kn+l$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 中是否有无穷多个素数. 这个问题是狄利克雷 (G. L. Dirichlet) 于 1837 年解决的. 命 $P(k, l)$ 表示上面算术级数中的最小素数. 1934 年, 邱拉 (S. Chowla) 曾猜想，对于任何 $\varepsilon > 0$ 皆有

$$P(k, l) = O(k^{1+\varepsilon}). \tag{F}$$

此处与 “O” 有关的常数依赖于 ε. 首先是林尼克于 1944 年证明了，存在常数 c 使

$$P(k, l) = O(k^c) \tag{11}$$

潘承洞于 1957 年最先定出 $c \leq 5448$. 其后不少数学家改进了潘承洞的结果，其中陈景润与他的学生曾证明过 c 可以取如下之值:

$$777, 168, 17, 15, 13.5, 11.5, \tag{12}$$

(见 [17, 22, 26, 38, 40, 48]).

目前最佳估计 $c \leq 5.5$ 是希斯 - 仆朗 (D. R. Heath-Brown) 得到的. (见 [HB92]).

7. 哥德巴赫数问题

凡可以表示为两个素数之和的偶数称为哥德巴赫数. §1 定义过的 $E(x)$ 就是不超过 x 的非哥德巴赫偶数的个数. 1975 年, 蒙哥马利 (H. L. Montgomery) 与沃恩 (R. C. Vaughan) 将 $E(x)$ 的估计改进为: 存在 $\delta > 0$ 使

$E(x) = O(x^{1-\delta})$, 此处与 "O" 有关的常数依赖于 δ. (见 [MV75]) 1979 年, 陈景润与潘承洞首次定出

$$\delta > 0.01. \tag{13}$$

其后陈景润又将 δ 的估计改进为 $\delta > 0.05$. (见 [29,30,44]).

8. 三角和的估计

命 q 为整数 ≥ 2 及 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x$ 为整系数 k 次多项式且满足 $(a_{k_1}, \ldots, a_1, q) = 1$. 引入完整三角和

$$S(f(x), q) = \sum_{x=1}^{q} e(f(x)/q),$$

其中 $e(y) = e^{2\pi i y}$. 当 $f(x) = ax^2$ 时, $S(ax^2, q)$ 就是有名的高斯和. 高斯给出了估计式

$$|S(ax^2, q)| \leq 2\sqrt{q}. \tag{14}$$

对于一般的完整三角和估计这一著名问题是华罗庚于 1940 年证明的. 实际上, 由韦依 (A.Weil) 的结果可以得出:

$$|S(f(x), q)| \leq c(k) q^{1-\frac{1}{k}}. \tag{15}$$

其中 $c(k)$ 为依赖于 k 的常数. (15) 右端的阶 $1 - \frac{1}{k}$ 是臻于至善的. 1977 年, 陈景润给出了 $c(k)$ 的估计:

$$c(k) = \begin{cases} \exp(4k), & 当\ k \geq 10, \\ \exp(kA(k)), & 当\ 3 \leq k \leq 9, \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\exp(x) = e^x$ 及 $A(3) = 6.1, A(4) = 5.5, A(5) = 5, A(6) = 4.7, A(7) = 4.4, A(8) = 4.2, A(9) = 4.05$ 等. (见 [23]).

后记. 关于陈景润的生平与工作, 过去曾有过一些著作. 例如 [HR74, W80, PP81, W84, W88, WYP88, Z91], 在撰写本文时, 作者参考了这些著作.

注. 带数码的参考文献见本书后 "陈景润论著目录".

参考文献

[HR74] Halberstam H, Richert H E. Sieve Methods. Acad. Press, 1974

[W80] 王元. 解析数论在中国. 自然杂志 (日本), 1980, **8**: 57~60

[PP81] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1981

[W84] Wang Y.(Editor) Goldbach Conjecture. World Sci. Pub. Comp., 1984

[W88] 王元. 陈景润. 见: 中国大百科全书, 数学卷. 北京: 中国大百科全书出版社, 1988, 80

[WYP88] Wang Y, Yang C C, Pan C B.(Editors) Number Theory and Its Applications in China. Cont. Math.; Amer. Math. Sci.; 1988, **77**

[Z91] 张明尧. 陈景润. 见: 中国现代科学家传记. 北京: 科学出版社, 1991

[BDD86] Balasubramanian R, Deshouiller J M, Dress F. Problème de Waring pour les bicarres II. *C. R. Acad. Sci. Paris, I Math.*, 1986, **303**: 161~163

[IM88] Iwaniec H, Mazzochi C J. On the divisor and circle problems. *J. Num. Theory*, 1988, **29**: 60~93

[HB92] Heath-Brown D R. Zero free regions for Dirichlet L- functions, and the least prime in an arithmetic progression. *PLMS*, 1992, **64**: 265~338

[MV75] Montgomery H L, Vaughan R C. The exceptional set in Goldbach's problem. *Acta Arith.*, 1975, **27**: 353~370

华林问题中 $G(k)$ 的估值 *†

对于我们最感兴趣的是关于华林问题中 $G(k)$ 的研究，这里的 $G(k)$ 表示凡充分大的整数 n 皆可以表为 $G(k)$ 个非负整数的 k 乘方之和者，这里要证明

$$G(k) \le k(3\log k + 5.2),$$

这个结果是改善了维诺格拉朵夫的结果：

$$G(k) \le k(3\log k + 11).$$

在本文中，我们假定 $k \ge 15$, 并采用下列专用记号：

N 是满足条件 $N \ge c$ 的整数，此处 c 是一充分大的数.

$2P = [N^{\frac{1}{k}}]$, $\tau = 2kP^{k-1+\delta}$, δ 是一个很小的正数，

$$P_i = [P^{(1-\frac{1}{k})^i}],\ P_0 = [\sqrt{P}],\ P_i' = [P_0^{(1-\frac{1}{k})^i}],$$

$$T_\alpha = \sum_{x=P}^{2P} e^{2\pi i\alpha x^k};\ T_{i\alpha} = \sum_{x=P_i}^{2P_i} e^{2\pi i\alpha x^k};\ T_{0\alpha} = \sum_{x=P_0}^{2P_0} e^{2\pi i\alpha x^k};$$

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^k};\ e(m) = e^{2\pi i m};$$

$$T^*(\alpha, a, q) = \frac{S_{a,q}}{q}\sum_{m=P^k}^{(2P)^k}\frac{1}{k}m^{-1+\frac{1}{k}}e(Bm);$$

$$T_i^*(\alpha, a, q) = \frac{S_{a,q}}{q}\sum_{m=P_i^k}^{(2P_i)^k}\frac{1}{k}m^{-1+\frac{1}{k}}e(Bm);\ S_\alpha = \sum_u e^{2\pi i\alpha u};$$

$$T_0^*(\alpha, a, q) = \frac{S_{a,q}}{q}\sum_{m=P_0^k}^{(2P_0)^k}\frac{1}{k}m^{-1+\frac{1}{k}}e(Bm);\ \Omega_\alpha = \sum_v\sum_{u_0} e^{2\pi i v^k\cdot u_0\cdot\alpha};$$

$$j = \left[\frac{3}{4}k + 1\right].$$

在上面记号中， v 跑过区间 $\frac{1}{3}P_0 \le v \le \frac{1}{2}P_0$ 中元素数，并设 V 是 v 的个数； v 和 u_0 跑过这些数值：令 x_s 跑过值 $x_s = P_s, \ldots, 2P_s - 1$, $x_s' =$

* 1957 年 7 月 22 日收到.

† 原载数学学报， 8(1958), no. 2, pp. 253 – 257.

$P'_s,\ldots,2P'_s-1$, 且 $x'_s\equiv 0(\bmod 4k), x_s\equiv A(\bmod 4k)$, 这里 $A=0$ 当 $k\neq 2^l$ 或 $k=2^l, s>k+j$ 或 $k=2^l, N\equiv m(\bmod 4k), 0<m\leq 2k; A=1$ 当 $k=2^l, N\equiv m(\bmod 4k), 2k<m\leq 4k, s<k+j$, 命

$$u=x_{j+1}^k+\cdots+x_n^k,\qquad u_0={x'_0}^k+\cdots+{x'_{n_0}}^k,$$

$$n=\left[\frac{\log 6k}{-\log\left(1-\dfrac{1}{k}\right)}+2\right],\quad n_0=\left[\frac{\log 3k}{-\log\left(1-\dfrac{1}{k}\right)}+1\right].$$

运用归纳法不难证明 (证明的方法完全相同于 [2]), 集合 u 中的数总不出乎界限 P_{j+1}^k 与 $(2P_{j+1})^k$ 之外, 且互不相等. 集合 u'_0 中的数总不出乎界限 P_0^k 与 $(2P_0)^k$ 之外, 且互不相等. 设 u 的个数为 U, u_0 的个数为 U_0, 则有 $PP_1\cdots P_jU\gg P^{k-\frac{1}{6}}, U_0\gg P_0^{k-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{k})}$.

引理: 假定 $\frac{1}{2}N\leq M\leq N$, 则我们有

$$\int_0^1\{T^*(\alpha,a,q)\}^2\{T_1^*(\alpha,a,q)\}^2\cdots\{T_j^*(\alpha,a,q)\}^2\{T_0^*(\alpha,a,q)\}^{[\frac{k}{2}]}e(-M\alpha)d\alpha$$
$$=q^{-2j-2-[\frac{k}{2}]}(S_{a,q})^{2+2j+[\frac{k}{2}]}e^{-2\pi i\frac{a}{q}M}R(M),$$

这里

$$P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k}\ll R(M)\ll P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k}.$$

证明: 由 $T^*(\alpha,a,q)$ 的定义, 我们知道这积分等于

$$q^{-2-2j-[\frac{k}{2}]}(S_{a,q})^{2+2j+[\frac{k}{2}]}e^{-2\pi i\frac{a}{q}M}\sum_{n_1,\ldots,n_{2+2j+[\frac{k}{2}]}}\frac{1}{k^{2+2j+[\frac{k}{2}]}}(n_1\cdots n_{2+2j+[\frac{k}{2}]})^{-1+\frac{1}{k}},$$

求和中 n_i 的变动范围是

$$P^k\leq n_1,n_2\leq(2P)^k,\ P_1^k\leq n_3,n_4\leq(2P_1)^k,\ldots,$$

$$P_j^k\leq n_{2j+1},n_{2j+2}\leq(2P_j)^k,\ P_0^k\leq n_{2j+3},\ldots,n_{2+2j+[\frac{k}{2}]}\leq(2P_0)^k.$$

并且要使 $n_1+n_2+\cdots+n_{2+2j+[\frac{k}{2}]}=M$. 对于固定的 M, 当 $n_2,\ldots,n_{2+2j+[\frac{k}{2}]}$ 决定之后, 则 n_1 就决定, 故

$$R(M)\leq\frac{1}{k^{2+2j+[\frac{k}{2}]}}\cdot\frac{(2P)^k(2P_1)^{2k}\cdots(2P_j)^{2k}(2P_0)^{k\cdot[\frac{k}{2}]}}{(P^2P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]})^{(k-1)}}$$
$$\ll P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k}.$$

又因为 $2^{k-1}P^k \le M \le 2^k P^k$, 所以当

$$P^k \le n_2 \le 2P^k,\ P_1^k \le n_3, n_4 \le (2P_1)^k, \dots,$$

$$P_j^k \le n_{2j+1}, n_{2j+2} \le (2P_j)^k,\ P_0^k \le n_{2j+3}, \dots, n_{2+2j+[\frac{k}{2}]} \le (2P_0)^k$$

时有 n_1 的解，故有

$$R(M) \ge \frac{1}{k^{2+2j+[\frac{k}{2}]}} \cdot \frac{P^k P_1^{2k} \cdots P_j^{2k} P_0^{k[\frac{k}{2}]}}{(P^2 P_1^2 \cdots P_j^2 P_0^{[\frac{k}{2}]})^{k-1}} \gg P_1^2 \cdots P_j^2 P_0^{[\frac{k}{2}]} P^{2-k}.$$

包含所有满足条件

$$\alpha = \frac{a}{q} + Z;\ (a,q) = 1,\ -\frac{1}{q\tau} \le Z \le \frac{1}{q\tau};\ 0 < q \le P^{\frac{1}{2.7}};\ 0 \le a < q \quad (1)$$

之 α 的区间称为基本区间；从区间 $-\tau^{-1} \le \alpha \le -\tau^{-1}+1$ 中除去基本区间之后所留下之区间叫做余区间，并用 m 来表示它．我们用 $m_{a,q}$ 来记包含分数 $\frac{a}{q}$ 的基本区间相对应的部分，用 $\overline{m_{a,q}}$ 来记由 $-\tau^{-1}$ 至 $-\tau^{-1}+1$ 中的不属于基本区间 $m_{a,q}$ 之其余部分，则

$$\begin{aligned}
I(N) &= \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} T_\alpha^2 T_{1\alpha}^2 \cdots T_{j\alpha}^2 T_{0\alpha}^{[\frac{k}{2}]} S_\alpha^2 \Omega_\alpha e(-N\alpha) d\alpha \\
&= \sum_{q \le P^{\frac{1}{2.7}}} \sum_{(a,q)=1} \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} \{T^*(\alpha,a,q)\}^2 \{T_1^*(\alpha,a,q)\}^2 \\
&\quad \cdots \{T_j^*(\alpha,a,q)\}^2 \{T_0^*(\alpha,a,q)\}^{[\frac{k}{2}]} S_\alpha^2 \Omega_\alpha e(-N\alpha) d\alpha \\
&\quad + \int_m T_\alpha^2 T_{1\alpha}^2 \cdots T_{j\alpha}^2 T_{0\alpha}^{[\frac{k}{2}]} S_\alpha^2 \Omega_\alpha e(-N\alpha) d\alpha \\
&\quad - \sum_{q \le P^{\frac{1}{2.7}}} \sum_{(a,q)=1} \int_{\overline{m_{a,q}}} \{T^*(\alpha,a,q)\}^2 \{T_1^*(\alpha,a,q)\}^2 \\
&\quad \cdots \{T_j^*(\alpha,a,q)\}^2 \{T_0^*(\alpha,a,q)\}^{[\frac{k}{2}]} S_\alpha^2 \Omega_\alpha e(-N\alpha) d\alpha \\
&\quad + \sum_{q \le P^{\frac{1}{2.7}}} \sum_{(a,q)=1} \int_{m_{a,q}} [T_\alpha^2 T_{1\alpha}^2 \cdots T_{j\alpha}^2 T_{0\alpha}^{[\frac{k}{2}]} \\
&\quad - \{T^*(\alpha,a,q)\}^2 \{T_1^*(\alpha,a,q)\}^2 \cdots \{T_j^*(\alpha,a,q)\}^2 \{T_0^*(\alpha,a,q)\}^{[\frac{k}{2}]}] \\
&\quad \times S_\alpha^2 \Omega_\alpha e(-N\alpha) d\alpha. \qquad (2)
\end{aligned}$$

由 [3] 的引理 5, 我们可以得到

$$\sum_{q\le P^{\frac{1}{2.7}}}\sum_{(a,q)=1}\int_{\overline{m_{a,q}}}\{T^*(\alpha,a,q)\}^2\{T_1^*(\alpha,a,q)\}^2$$

$$\cdots\{T_j^*(\alpha,a,q)\}^2\{T_0^*(\alpha,a,q)\}^{[\frac{k}{2}]}S_\alpha^2\Omega_\alpha e(-N\alpha)d\alpha$$

$$\ll U^2VU_0P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[k/2]}P^{-2(k-1)}\sum_{q\le P^{\frac{1}{2.7}}}q^{-2}\sum_{(a,q)=1}\int_{q^{-1}\tau^{-1}}^{\infty}B^{-2}dB$$

$$\ll U^2VU_0P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k-\frac{1}{k}}.$$

由 [3] 的引理 8, 我们可以得到

$$\sum_{q\le P^{\frac{1}{2.7}}}\sum_{(a,q)=1}\int_{m_{a,q}}[T_\alpha^2T_{1\alpha}^2\cdots T_{j\alpha}^2T_{0\alpha}^{[\frac{k}{2}]}-\{T^*(\alpha,a,q)\}^2\{T_1^*(\alpha,a,q)\}^2$$

$$\cdots\{T_j^*(\alpha,a,q)\}^2\{T_0^*(\alpha,a,q)\}^{[\frac{k}{2}]}]S_\alpha^2\Omega_\alpha e(-N\alpha)d\alpha$$

$$\ll\sum_{q\le P^{\frac{1}{2.7}}}\sum_{(a,q)=1}U^2VU_0\int_{m_{a,q}}\{q^{\frac{3}{4}-\frac{1}{k}+\varepsilon}\min(P,P^{-(k-1)}|B|^{-1})q^{-\frac{2j+[\frac{k}{2}]}{k}}$$

$$+q^{\frac{3}{4}-\frac{2j-1+[\frac{k}{2}]}{k}}\min(P^2,P^{-2(k-1)}|B|^{-2})P_j^{-1}\}P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}d\alpha$$

$$\ll\sum_{q\le P^{\frac{1}{2.7}}}\sum_{(a,q)=1}q^{\frac{3}{4}-2}U^2VU_0P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}\int_0^1\{\min(P,P^{-(k-1)}B^{-1})$$

$$+\min(P^2,P^{-2(k-1)}B^{-2})P_j^{-1}\}dB$$

$$\ll\sum_{q\le P^{\frac{1}{2.7}}}\sum_{(a,q)=1}q^{\frac{3}{4}-2}U^2VU_0P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}\left[\int_0^{P^{-k}}(P+P^2P_j^{-1})dB\right.$$

$$\left.+\int_{P^{-k}}^1(P^{-(k-1)}B^{-1}+P^{-2(k-1)}B^{-2}P_j^{-1})dB\right]$$

$$\ll U^2VU_0P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k-\frac{1}{k}}.$$

我们知道区间 $-\tau^{-1}\le\alpha\le-\tau^{-1}+1$ 中所有的 α 皆可表成

$$\alpha=\frac{a}{q}+\beta,\quad(a,q)=1,\quad 0<q\le\sqrt{N},\quad|B|\le\frac{1}{q\sqrt{N}}\tag{3}$$

的形式. 我们先就余区间中能以 $q\le P^{\frac{1}{4}}$ 表成 (3) 之形式的 α, 来估计和数 Ω_α. 相同于 [2] 第 48 页的证明方法，我们有 $\Omega_\alpha\ll U_0VP^{\frac{1-\frac{1}{k}}{6}}\sqrt{q}N^\varepsilon P_0^{-\frac{1}{2}}$.

但是 $\sum_{x=P_0}^{2P_0} e^{2\pi i\alpha x^k}$ 在 $q \le P_0^{\frac{1}{2}}$ 及 $|B| \le \frac{1}{q\tau}$ 之时有 $\left|\sum_{x=P_0}^{2P_0} e^{2\pi i\alpha x^k}\right| \ll q^{-\frac{1}{k}}P_0$,
所以我们得到

$$\left(\sum_{x=P_0}^{2P_0} e^{2\pi i\alpha x^k}\right)^{[\frac{k}{2}]}\Omega_\alpha \ll U_0VP_0^{\frac{1}{6}(1-\frac{1}{k})}N^\varepsilon P_0^{[\frac{k}{2}]-\frac{1}{2}}.$$

现在我们就余区间中能以 $q \ge P^{\frac{1}{4}}$ 表成 (3) 之形式的 α, 来估计和数 Ω_α. 相同于 [2] 第 49 页的证明方法, 我们有 $\Omega_\alpha \ll U_0P_0\sqrt{\frac{P_0^k}{U_0}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{P_0}\right)}\,q^{\varepsilon/2}$, 所以我们得到

$$\left(\sum_{x=P_0}^{2P_0} e^{2\pi i\alpha x^k}\right)^{[\frac{k}{2}]}\Omega_\alpha \ll U_0VN^\varepsilon P_0^{\frac{1}{6}(1-\frac{1}{k})+[\frac{k}{2}]-\frac{1}{2}}.$$

利用上面的结果可得

$$\begin{aligned}&\int_m T_\alpha^2T_{1\alpha}^2\cdots T_{j\alpha}^2T_{0\alpha}^{[\frac{k}{2}]}S_\alpha^2\Omega_\alpha e(-N\alpha)d\alpha\\ &\ll U_0VP_0^{[\frac{k}{2}]-\frac{1}{2}+\frac{1-\frac{1}{k}}{6}}\int_0^1 T_\alpha^2T_{1\alpha}^2\cdots T_{j\alpha}^2S_\alpha^2d\alpha\\ &\ll U_0VU^2P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k-\frac{1}{k^2}}.\end{aligned}$$

由 (2) 式我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 T_\alpha^2T_{1\alpha}^2\cdots T_{j\alpha}^2T_{0\alpha}^{[\frac{k}{2}]}S_\alpha^2\Omega_\alpha e(-N\alpha)d\alpha\\ &=\sum_u\sum_{u'}\sum_v\sum_{u_0}\sum_{q\le P^{\frac{1}{2.7}}}\sum_{(a,q)=1}q^{-2j-2-[\frac{k}{2}]}\\ &\quad\times(S_{a,q})^{2+2j+[\frac{k}{2}]}e^{-2\pi i\frac{a}{q}(N-u-u'-u_0v)}R(N-u-u'-u_0v)\\ &\quad+O(VU^2U_0P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k-\frac{1}{k^2}})\\ &=\sum_u\sum_{u'}\sum_v\sum_{u_0}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{(a,q)=1}q^{-2-2j-[\frac{k}{2}]}\\ &\quad\times(S_{a,q})^{2+2j+[\frac{k}{2}]}e^{-2\pi i\frac{a}{q}(N-u-u'-u_0v)}R(N-u-u'-u_0v)\\ &\quad+O(VU^2U_0P_1^2\cdots P_j^2P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k-\frac{1}{k^2}}),\end{aligned}$$

则相似于 [2] 的第二章引理 7, 8, 9, 10, 可得

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{(a,q)=1} q^{-2-2j-[\frac{k}{2}]}(S_{a,q})^{2+2j+[\frac{k}{2}]}e^{-2\pi i\frac{a}{q}(N-u-u'-u_0v)} > c_1,$$

$$R(N-u-u'-u_0v) \gg P_1^2\cdots P_j^2 P_0^{[\frac{k}{2}]}P^{2-k},$$

此处 c_1 与 N, u, u', u_0, v 无关，所以当 N 充分大时， $I(N)>0$. 但 $I(N)$ 是将数 N 表成 $k(3\log k+5.2)$ 个形如 t^k 的项的和的表示法的种数，此处 t 是正整数，由是即得 $G(k)\le k(3\log k+5.2)$.

参考文献

[1] 华罗庚. 堆垒素数论. 北京：科学出版社， 1953

[2] И М 维诺格拉朵夫. 数论中的三角和法. 数学进展， **1**(1)

[3] Davenport H. On Waring's problem for four-th powers. *Ann. of Math.*, 1939, **40**: 731 ~ 747

华林问题 $g(5)$ 的估值 *†

用 $g(5)$ 表示使每一个整数 $N \geq 1$ 都能够表示成为

$$N = x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_r^5 \tag{1}$$

的形式的最小正整数 r. 本文我们考虑华林问题 $g(5)$ 的估值.

使用 И. М. Виноградов 的结果, Dickson 在 1933 年曾证明 $37 \leq g(5) \leq 54$. 本文将用华罗庚教授研究华林问题的方法给出估计:

$$37 \leq g(5) \leq 40.$$

对于 $(a,q)=1, q>0$, 令 $S_{a,q} = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} x^5}$. 当 a 经过模 q 的简化剩余系 [1), 令

$$A(q, N_1) = q^{-16} \sum_{a} S_{a,q}^{16} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_1}.$$

在下述无穷级数都收敛的情形, 令

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q, N),$$

$$\psi(P.N) = \sum_{s=0}^{\infty} A(P^s, N).$$

我们有下述引理:

引理 1 每一个正整数 $N \leq 10^{1520}$ 都可表为

$$N = x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_{40}^5,$$

的形式, 其中 $x_i (1 \leq i \leq 40)$ 为非负整数.

引理 2 设 α 为一实数且满足 $\alpha = \frac{a}{q} + z$, $(a,q)=1$, $|z| \leq \frac{1}{q^2}$;

$$p^{1-1/36} \leq q \leq p^{4+1/64}, \quad p \geq 10^{200}.$$

* 1959 年 5 月 6 日收到.

† 原载 *Sci. Rec.*, **3**(1959), pp. 327 – 330.

1) 原文误写为完全剩余系.

则有

$$|T_a|^{16} = \left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\alpha x^5}\right|^{16} \leq 2^{16}\Big[5p^{15} + \left(\frac{4}{24^7}\right) p^{4+1/3}(\log p^4 + 63)^{23}$$
$$+ \left(\frac{20}{24^7}\right) p^{1/3}(\log p^4 + 63)^{20}(120p^{4+1/36} + p^{4+1/64}\log p^4)\Big].$$

设 N 是一个 $\geq 10^{1510}$ 的整数， $P = [N^{\frac{1}{5}}]$; $\tau = P^{4+1/64}$; N_0, N_1 是满足 $\frac{1}{2}N \leq N_0 \leq N$; $N_0 - P^{5-1/5} \leq N_1 \leq N_0$ 的整数. 以 $W(N_1)$ 表示将 N 表为

$$N = x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_{16}^5, \quad x_i\text{为正整数},$$

的形式的表法个数. 则有

$$W(N_1) = \int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} T_\alpha^{16} e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha,$$

其中

$$T_\alpha = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha x^5}.$$

我们将满足条件

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a,q) = 1, \quad -\frac{1}{q\tau} \leq z \leq \frac{1}{q\tau};$$

$$0 < q \leq P^{1/2}; \quad 0 \leq a < q.$$

的 α 组成的集合称作基本区间. 将区间

$$-\frac{1}{\tau} \leq \alpha \leq -\frac{1}{\tau} + 1$$

中除去基本区间外且能够满足

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a,q) = 1, \quad -\frac{1}{q\tau} \leq z \leq \frac{1}{q\tau};$$

$$P^{1/2} < q \leq P^{1-1/36}; \quad 0 \leq a < q.$$

的 α 组成的集合称作第一余区间. 将基本区间和第一余区间对于区间

$$-\frac{1}{\tau} \leq \alpha \leq 1 - \frac{1}{\tau}$$

的余区间称为第二余区间. 以 $W_0(N_1)$ 中对应于基本区间的积分, $W_1(N_1)$ 表示 $W(N_1)$ 中对应于第一余区间的积分, $W_2(N_1)$ 的表示 $W(N_1)$ 中对应于第二余区间的积分. 则有

$$W(N_1)=W_0(N_1)+W_2(N_1)+W_1(N_1).$$

引理 3 我们有

$$\left|W_0(N_0)-\frac{16}{5}t_{16}N_0^{11/5}\mathfrak{S}(N_0)\right|\leq 10^{35}P^{11-1/5};\quad t_{16}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{5}\right)^{16}}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)}.$$

引理 4 我们有 $\mathfrak{S}(N)\leq 10^{-3}$.

引理 5 设 α 是一个实数并满足 $\alpha=\frac{a}{q}+z;\ (a,q)=1;\ |z|\leq\frac{1}{q\tau};\ q\leq P^{1-1/36};\ r\leq 4;\ P\geq 10^{200}$. 则有

$$\left|T_\alpha-q^{-1}S_{a,q}\int_0^P e^{2\pi izx^5}dx\right|\leq\sqrt{2}(10\pi)^rP^{1-1/64r}+4.5q.$$

定理 每一个整数 $N\geq 10^{1510}$ 都可表为

$$N=x_1^5+x_2^5+\cdots+x_{40}^5,$$

的形式, 其中 $x_i(1\leq i\leq 40)$ 为正整数.

证 设 u_1 和 u_2 相互独立地经过不超过 $\frac{1}{4}N$ 且可表示成为 $x_1^5+x_2^5+\cdots+x_{12}^5$($x_i$ 为正整数) 的形式的整数做成的序列. 以 U 表示这样的整数 u 的个数. 令

$$I(N)=\int_0^1 T_\alpha^{16}\sum_u\sum_{u'}e^{2\pi i(u+u')\alpha}e^{-2\pi iN\alpha}d\alpha.$$

则有

$$I(N)=\sum_u\sum_{u'}\{W_0(N-u-u')+W_1(N-u-u')+W_2(N-u-u')\};$$

由引理 3, 引理 4 和 $P\geq 10^{301}$. 我们有

$$\sum_u\sum_{u'}W_0(N-u-u')\geq[\tfrac{16}{5}t_{16}(\tfrac{1}{2}N)^{11/5}\mathfrak{S}(N)-10^{35}P^{11-1/5}]U^2$$

$$\geq\frac{1}{4\times 10^5}P^{11}U^2.$$

取 $r=4$, 由引理 5 可得

$$\left|\sum_{u}\sum_{u'}W_1(N-u-u')\right| \le (6P^{1-1/36})^{16}\int_0^1\sum_{u}\sum_{u'}e^{2\pi i(u-u')\alpha}d\alpha$$
$$\le 6^{16}P^{16-16/36}U \le \frac{1}{10^6}P^{11}U^2.$$

由引理 2, 我们有

$$\left|\sum_{u}\sum_{u'}W_2(N-u-u')\right| \le 2^{16}P^{11}\Big[5P^4+\left(\frac{4}{24^7}\right)P^{4+1/3}(\log P^4+63)^{23}$$
$$+\left(\frac{20}{24^7}\right)P^{1/3}(\log P^4+63)^{20}(120P^{4+1/36}+P^{4+1/64}(\log P^4+63))\Big]$$
$$\times 2^{18}P^{-5+1/3+1/72}U^2$$
$$\le \frac{1}{5\times 10^5}P^{11}U^2.$$

综合上述结果可得

$$I(N)>0,\quad g(5)\le 40.$$

参考文献

[1] 华罗庚. 堆垒素数论. 北京：科学出版社, 1953

[2] Dickson L E. *Bull. of Amer. Math. Soc.*, **39**: 701 ~ 727

华林问题中 $g(\varphi)$ 的估值 *†

假定 k 是一个整数 $\geq 12, \varphi(x)=\varphi_k(x)=x(x+1)\cdots(x+k-1)$. 记号 $g(\varphi_k)$ 表示最小的整数 r 满足条件，使得每个整数 $N \geq 1$ 都能够表示成

$$N=\frac{\varphi(x_1)}{k!}+\frac{\varphi(x_2)}{k!}+\cdots+\frac{\varphi(x_r)}{k!}, \tag{1}$$

这里的 x_i 是一个非负整数. Нечаев[2] 曾证明有

$$k+\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right] \leq g(\varphi_k) \leq 6k\ln k+9k\ln\ln k.$$

本文的目的是要改善这个不等式为

$$k\ln k-k \leq g(\varphi_k) \leq 5(k\ln k+12).$$

华罗庚教授告诉作者说：他同时也已经证明了 $g(\varphi_k) \geq k\ln k-k$. 作者对于华罗庚教授，越民义教授常给指导，王元先生常给帮助表示感谢.

§1

这里首先是来估计三角和，所用的记号完全相同于堆垒素数论.

引理 1. 命 $f(x)$ 代表一个有整数系数的多项式

$$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0.$$

若 $(a_k,\ldots,a_1,P)=1$, 则

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)/P}\right| \leq kP^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2. 相同于引理 1 的条件但 $P>k^{2+6/k}, k\geq 12$, 则

$$\left|\sum_{x=1}^{P^L} e^{2\pi i f(x)/P^L}\right| \leq P^{L(1-\frac{1}{k})}.$$

* 1957 年 9 月 26 日收到.

† 原载数学学报, **9**(1959), no. 3, pp. 264 – 270.

证: 命 t 是能整除 $(ka_k,\dots,2a_2,a_1)$ 的 P 的最高方次，则显然可见 $t=0$. 又设 $u_1,\dots,u_r$ 是相合式

$$f'(x)\equiv 0\,(\bmod P),\quad 0\le x<P$$

的相异的根，其重数分别为 $m_1,\dots,m_r$. 命 $m_1+\cdots+m_r=m$, 易见 $m\le k-1$. 现在用数学归纳法来证明引理.

1) 假定 $L=1$. 这就是引理 1 的情况.

2) 假定 $L\ge 2$. 写

$$S(P^L,f(x))=\sum_{v=1}^{P}\sum_{\substack{0\le x<P^{L-1}\\ x\equiv v(\bmod P)}}e_{P^L}(f(x))=\sum_{v=1}^{P}S_v.$$

如果 v 并非 u_j 之一，则命

$$x=y+P^{L-1}z,\quad 0\le y<P^{L-1},\quad 0\le z<P,$$

即得

$$\begin{aligned}S_v&=\sum_{\substack{0\le x<P^L\\ x\equiv v(\bmod P)}}e_{P^L}(f(x))\\&=\sum_{\substack{0\le y<P^{L-1}\\ y\equiv v(\bmod P)}}\sum_{0\le z<P}e_{P^L}(f(y)+P^{L-1}zf'(y))\\&=\sum_{\substack{0\le y<P^{L-1}\\ y\equiv v(\bmod P)}}e_{P^L}(f(y))\sum_{z=0}^{P-1}e_P(zf'(y))=0,\end{aligned}\tag{2}$$

如果 $v=u_i$, 则依堆垒素数论引理 1.5 来定义 σ_i, 如此则得

$$\begin{aligned}S_{u_i}&=\sum_{\substack{x=1\\ x\equiv u_i(P)}}^{P^L}e_{P^L}(f(x))=\sum_{y=1}^{P^{L-1}}e_{P^L}(f(u_i+Py))\\&=e_{P^L}(f(u_i))\sum_{y=1}^{P^{L-1}}e_{P^{L-\sigma_i}}(P^{-\sigma_i}(f(u_i+Py)-f(u_i))).\end{aligned}$$

命 $g_i(x)=P^{-\sigma_i}(f(u_i+Py)-f(u_i))$. 假定 $L\ge\sigma_i$, 由归纳法可得

$$\begin{aligned}|S_{u_i}|&\le P^{\sigma_i-1}|S(P^{L-\sigma_i},g_i(x))|\\&=P^{\sigma_i(1-a)}P^{a\sigma_i-1}|S(P^{L-\sigma_i},g_i(x))|\\&\le P^{\sigma_i(1-a)+(1-a)(L-\sigma_i)}P^{a\sigma_i-1}\end{aligned}$$

$$\leq P^{a\sigma_i - 1} P^{L(1-a)}. \tag{3}$$

如果 $L \leq \sigma_i$, 则得

$$|S_{u_i}| \leq P^{L-1} = P^{aL-1} P^{L(1-a)} \leq P^{a\sigma_i - 1} P^{L(1-a)}. \tag{4}$$

总括 (2), (3), (4) 三式得出

$$|S(P^L, f(x))| \leq P^{L(1-a)} \left(\sum_{i=1}^{r} P^{a\sigma_i - 1} \right). \tag{5}$$

如果 $P \geq 2^k$, 则由 [2] 的引理 3.5 知本引理能够成立，故不妨假定 $P < 2^k$. 由我们的假定 u_i 是 $f'(x) \equiv 0 \pmod P$ 的根，其重数为 m_i, 故有 $f'(u_i) \equiv 0 \pmod P), \ldots, f^{(m_i)}(u_i) \equiv 0 \pmod P$, 但 $f^{(m_i+1)}(u_i) \not\equiv 0 \pmod P$, 则由堆垒素数论引理 1.5 知 $\sigma_i \leq m_i + 1$. 代入 (5) 式可得

$$|S(P^L, f(x))| \leq P^{L(1-a)} \sum_{i=1}^{r} P^{(m_i+1)a-1} = P^{L(1-a)} P^{-1} \sum_{i=1}^{r} P^{(m_i+1)a}.$$

如果 $r = 1$, 则引理显见成立. 如 $r > 1$, 如所有的 $P^{(m_i+1)a} \leq 4$, 则本引理显见成立，如 $P^{(m_1+1)a} \leq 4, \ldots, P^{(m_i+1)a} \leq 4$, 但 $P^{(m_{i+1}+1)a} \geq 4, \ldots, P^{(m_r+1)a} \geq 4$, 则得

$$\begin{aligned} |S(P^L, f(x))| &\leq (4i + P^{(m_{i+1}+\cdots+m_r+1)a}) P^{-1} P^{L(1-a)} \\ &\leq P^{L(1-a)} (4i + P^{1-a}) P^{-1} \leq (4k + P^{1-a}) P^{-1} P^{L(1-a)} \\ &\leq (1+a) P^{-a} P^{L(1-a)} \leq P^{L(1-a)} \end{aligned}$$

当 $P > k^{2+6/k}$ (这是因为如果 $a \geq 4, b \geq 4$, 则 $a + b \leq \frac{1}{2}ab, \frac{1}{2} < P^{-\frac{1}{k}}$). 如果所有 $P^{(m_1+1)a} \geq 4, \ldots, P^{(m_r+1)a} \geq 4$, 则本引理亦显然能够成立，(因 $P^{(m_1+1)a} + P^{(m_2+1)a} + \cdots + P^{(m_r+1)a} \leq P^{(m_1+m_2+\cdots+m_r+1)a} \leq P^{k \cdot a} = P$). 故本引理成立.

§2

在这里我们为了估计 $g(\varphi_k)$, 使用这些记号: N 是一个正整数, r 和 n 是整数,

$$r \geq 2k+1, \qquad n \geq 1, \qquad k \geq 12, \qquad M = k!N,$$

$$P = [M^a], \quad P_1 = [0.25P], \quad P_2 = [0,5P_1^{1-a}], \quad \ldots, \quad P_n = [0,5P_{n-1}^{1-a}].$$

假定

$$u = \varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2) + \cdots + \varphi(\xi_n),$$

这里的 ξ_i 经过数值:

$$\xi_i = P_i, P_i + 1, \ldots, 2P_i - 1.$$

u 的数目记之为 V, 容易得到 $V = P_1P_2\cdots P_r$. 假定 u_1 所经过的范围相同于 u, 假定

$$M_0 = M - u - u_1, \quad N_0 = \frac{M_0}{k!}.$$

记号 $I(N)$ 是表示将正整数 $M = k!N$ 表示成

$$M = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_i) + u + u_1 \tag{6}$$

的个数.

假定 $\tau = P^{\frac{k}{1+a}}$. 则有

$$I(N) = \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} L_\alpha^r U_\alpha^2 e^{-2\pi i\alpha M} d\alpha,$$

这里

$$L_\alpha = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha P(x)},$$

$$U_\alpha = \sum_{u} e^{2\pi i\alpha u};$$

区间 $(-\tau^{-1}, 1-\tau^{-1})$ 将它分成基本区间和余区间. 基本区间乃是包含所有满足下面条件的点 α

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a,q) = 1, \quad -\frac{1}{q\tau} \leq z \leq \frac{1}{q\tau},$$

$$0 < q \leq P^{1-a}, \quad 0 \leq a < q.$$

区间 $(-\tau^{-1}, 1-\tau^{-1})$ 中除去基本区间之后，所剩余的点的全体称之为余区间，则

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N).$$

假定 $(a,q)=1$, $q>0$,

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi(x)},$$

这里的 a 经过一个关于模 q 的既约剩余系，令

$$A(q) = A(q,N,r) = q^{-r}\sum_{a} S_{a,q}^{r} e^{-2\pi i \frac{a}{q} M}.$$

又假定

$$\mathfrak{S}(N,r) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q,N,r), \quad T_r = \frac{P(1+a)}{P(ra)}(k!)^{ra-1},$$
$$\psi(P) = \psi(P,N,r) = \sum_{s=0}^{\infty} A(P^s,N,r).$$

在 [1] 的第八章证明过这个结果.

假定存在正常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 使得每个整数 $N \geq c$, 具有下面的不等式：

$$0 < \frac{1}{\mathfrak{S}(N_0,r)} < \alpha_1, \quad 0 < \frac{1}{T_r} < \alpha_2,$$
$$\left| I_1(N) - T_r \sum_{N_0} N_0^{ra-1}\mathfrak{S}(N_0,r)\right| < \alpha_3 N^{ra-1-0.5a^2(1-a)},$$
$$|I_2(N)| < \alpha_4 V^2 N^{ra-1-\delta},$$

这里 $0<\delta \leq 0.5a^2(1-a)$,

$$\sum_{N_0} N_0^{ra-1} > \frac{1}{\alpha_5} V^2 N^{ra-1}, \quad c \geq [\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5]^{1/\delta}. \tag{6'}$$

则当 $n \geq 12$ 时有

$$g(\varphi_n) \leq \max(k \ln \ln c + 3k + 2, 2n + r), \tag{7}$$

取

$$r = 2k+1, \quad n = \left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{18k^3\ln k}{r}\right]+1.$$

则有:

$$2n + r \le 4k\ln k + 2k^r \ln\ln k + 6.4k < 4k\ln k + 9k\ln\ln k.$$

现在来估计常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 及 α_5.

引理 3. 有: $\ln\alpha_1 < 97k^{3+6/k}$.

证: 由 [1] 的引理 3.8 有:

$$\mathfrak{S}(N,r) = \prod_P \psi(P,N,r),$$

这里的 P 经过所有的素数. 所以

$$\frac{1}{\mathfrak{S}(N,r)} = \Pi'\frac{1}{\psi(P)}\Pi''\frac{1}{\psi(P)},$$

乘积 Π' 经过所有素数不超过 $16k^{2+6/k}$, 而乘积 Π'' 经过所有的素数超过 $16k^{2+6/k}$. 由 [1] 的引理 3.9, 引理 8.1 及引理 8.4 得到

$$\psi(P,N,r) \ge P^{-(\theta+B)(r-1)},$$

$$\theta \le \begin{cases} 0, & P > k. \\ \dfrac{k}{P-1}, & P \le k. \end{cases} \qquad B \le \begin{cases} 1 & P > 3. \\ 2 & P = 2. \end{cases}$$

即有:

$$\begin{aligned} &\sum_{P\le 16k^{2+6/k}} (\theta+B)(r-1)\ln P \\ &\quad \le 2k\left(\sum_{P\le k}\frac{k}{P-1}\ln P + \sum_{P\le 16k^{2+6/k}}\ln P + \ln 2\right) \\ &\quad \le 96k^{3+\frac{6}{k}} \end{aligned}$$

当 $P \ge 16k^{2+6/k}$,

$$|\psi(P,N,r)-1| \le \sum_{s=1}^{\infty} P^{s(1-ra)} = \frac{P^{-1-a}}{1-P^{-1-a}} < P^{-1-0.5a},$$

这是因为

$$\frac{1}{1-P^{-1-a}} < e^{-2P^{-1-a}} < P^{0.5a},$$

所以

$$\psi(P,N,r) \geq 1 - P^{-1-0.5a},$$

即

$$\Pi''\frac{1}{\psi(P)} \leq \Pi''\frac{1}{1-P^{-1-0.5a}} \leq \sum_{x\geq 16k^{2+6/k}} x^{-1-0.5a} < k^3.$$

$$\mathfrak{S}(N,r) \geq \frac{1}{e^{96k^{3+6/k}}}\cdot\frac{1}{e^{k^3}} > \frac{1}{e^{97k^{3+6/k}}}.$$

引理 4. 有: $\alpha_2 \leq 1$.

引理 5. 有:

$$|I_2(N)| < e^{3k^3}V^2N^{ra-1-\delta_1},$$

这里

$$\delta_1 \geq \frac{r}{6k^3\ln 12k^3}.$$

引理 6. 有: $\alpha_5 \leq 4$.

引理 4, 5, 6 的证明见 [2].

引理 7. 假定 $N > k^{20k^4}$. 则

$$\left|I_1(N) - T_r\sum_{N_0} N_0^{ra-1}\mathfrak{S}(N_0,r)\right| < \alpha_3 V^2 N^{ra-1-0.5a^2(1-a)},$$

这里 $\alpha_3 < e^{32k^{3+6/k}}$.

证: 由 [1] 的引理 3 有: $\alpha_3 \leq (8kc_2)^r$, 这里 c_2 是 $|S_{a,q}| \leq c_2 q^{1-a}$. 从引理 2, 及 [3] 的引理 1.3 及引理 1.6 易得 $c_2 < k^{3\pi(k^{2+6/k})} < e^{3k^{2+6/k}}$. 故有 $\alpha_3 \leq (8ke^{3k^{2+6/k}})^{2k+1} \leq e^{32k^{3+6/k}}$.

由 (6') 得到

$$\ln c \leq \frac{1}{\delta}\ln[\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5] < \frac{2k^2}{1-a}\ln\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5$$

$$< \frac{2k^2}{1-a}(97k^{3+6/k} + 32k^{3+6/k} + 3k^3 + 4) < 300k^{5+6/k},$$

这是因为 $\delta_1 = \frac{r}{6k^3\ln 12k^3} < 0.5a^2(1-a)$.

由 (7) 得到

$$g(\varphi_k) \le \max(k \ln \ln c + 3k + 2, 2n + r),$$

$$2n + r \le 4k \ln k + 9k \ln \ln k.$$

$$\begin{aligned} k \ln \ln c + 3k + 2 &< k \ln 300k^{5+6/k} + 3k + 2 \\ &\le k \left[\left(5 + \frac{6}{k}\right) \ln k + \ln 300\right] + 3k + 2 \\ &< k(5 \ln k + 12). \end{aligned}$$

即为 $g(\varphi_k) \le k(5 \ln k + 12)$. 由 $\varphi(x) = x(x+1)\cdots(x+k-1)$, 所以 $\dfrac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = \dfrac{x+k}{x}$. 所以

$$k\varphi(1) + \left[\frac{k}{2}\right]\varphi(2) + \left[\frac{k}{3}\right]\varphi(3) + \cdots + \left[\frac{k}{k}\right]\varphi(k)$$

的表示法的个数即为最小的，故有

$$g(\varphi_k) \ge k \ln k - k.$$

参 考 文 献

[1] Нечаев В И. Проблема варинга для многочленов. *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, **38**

[2] Нечаев В И. О представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}$, *Изв. Акад. Наук. СССР*, 1953, **17**

[3] 华罗庚. 堆垒素数论. 北京：科学出版社，1957

给定区域内的整点问题 *†

1. 记号：对于正数 B, 记号 $A \ll B$ 表示 $|A|B^{-1}$ 不超过某个常数. $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots; \varepsilon_1, \ldots$ 表示任意很小的正常数.

维诺格拉朵夫 (И. М. Виноградов) 曾在 [1] 中给出和式

$$h(-1) + h(-2) + \cdots + h(-n)$$

的渐近式的剩余项的次级为

$$n^{19/28+\varepsilon},$$

这里 $h(-t)$ 乃是数论中有名的函数.

这里关于剩余项我们给出更低级的，它是

$$n^{35/52+\varepsilon}.$$

相似的方法可以得到其他的一些渐近式的剩余项也具有更低的次级. 例如，关于球内 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 整点的表式的渐近式剩余项的次级为

$$a^{35/26+\varepsilon}$$

较之维诺格拉朵夫的结果 [1]

$$a^{19/14+\varepsilon}$$

更为低级.

2. 为了证明我们的结果，需要使用下面的二个引理，这二个引理在 [2,3] 中已经证明过了.

引理 1. 假定 H, U, A, q, r 是满足条件

$$H > 0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0 < r - q \ll U$$

的实数. 在区间 $q < x \leq r$ 中实函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 满足不等式

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H.$$

*1962 年 6 月 29 日收到.

† 原载数学学报, **12**(1962), no. 4, pp. 408 – 420.

同时上述的区间又可以分成为有限个区间，在其中任一个区间，函数 $\varphi(x)$ 都是单调的，则有

$$\sum_{q<x\leq r}\varphi(x)e^{2\pi if(x)}\ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}}+\sqrt{A}+\ln(U+1)\right)$$

引理 2. 假定 H,U,A,q,r 是满足条件

$$H>0,\quad U^2\gg A\gg 1,\quad 0<r-q\ll U$$

的实数，其次假定 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是次数不超过某常数的代数函数，同时假定它们在区间 $q<x\leq r$ 中满足条件

$$A^{-1}\ll f''(x)\ll A^{-1},\quad f'''(x)\ll\frac{1}{AU}$$

$$H\ll\varphi(x)\ll H,\quad \varphi'(x)\ll HU^{-1},\quad \varphi''(x)\ll HU^{-2}$$

则存在有公式

$$\sum_{q<x\leq r}\varphi(x)e^{2\pi if(x)}=\sum_{f'(q)\leq k\leq f'(r)}Z_k+O(HT+H\ln(U+1))$$

这里

$$Z_k=b_k\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{f''(x_k)}}e^{2\pi i(-kx_k+f(x_k))}$$

而 x_k 是由等式 $f'(x_k)=k$ 所决定，如果 k 和 $f'(q)$, 或 $f'(r)$ 没有一个相同则取 $b_k=1$, 如果 k 和 $f'(q)$ 或 $f'(r)$ 有一个相同时，则取 $b_k=0.5$, 最后 $T\ll\sqrt{A}$ 而对于非整数的 $f'(q)$ 与 $f'(r)$ 又有

$$T\ll\max\left(\frac{1}{(f'(q))},\frac{1}{(f'(r))}\right)$$

3. 相似于 [2] 我们只需考虑表达式

$$B=\sum_{m=1}^{\infty}C_mW_m$$

$$W_m=\sum_{x>\sqrt{n}+1}^{\leq\sqrt{\frac{4n}{3}}}W_{m,x},\quad W_{m,x}=\sum_{m>-\sqrt{x^2-n^2}}^{\leq\sqrt{x^2-n^2}}e^{2\pi im\frac{n+y^2}{x}}$$

这里 C_m 只和 m 有关，且有 $C_m \ll Z_m$. 这里我们将认为 Z_m 是由等式

$$Z_m = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{如果 } m < \frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta^s m^{s+1}}, & \text{如果 } m > \frac{1}{\Delta} \end{cases}$$

所确定，其中 S 代表一个充分大的正整数而

$$\Delta = n^{-17/52}.$$

要证明我们的结果只需证明

$$B \ll n^{35/52+\varepsilon}.$$

在 [2] 中曾指示出下面的不等式

$$W_m \ll m\sqrt{n} + \sqrt{n}(\ln n)^2, \qquad \text{如果} \quad m \le \sqrt{n},$$

$$W_m \ll n, \qquad \text{如果} \quad m > \sqrt{n}.$$

因而得到

$$\sum_{m>0}^{\le n^{9/52}} C_m W_m \ll \sum_{m>0}^{\le n^{9/52}} \frac{m\sqrt{n} + \sqrt{n}(\ln n)^2}{m} \ll n^{35/52},$$

$$\sum_{m>n^{17/52+\mu}}^{\le n^{1/2}} C_m W_m \ll \sum_{m>n^{17/52+\mu}}^{\le n^{1/2}} \frac{m\sqrt{n}}{\Delta^s m^{s+1}} \ll n^{35/52},$$

$$\sum_{m>n^{1/2}} C_m W_m \ll \sum_{m>n^{1/2}} \frac{n}{\Delta^s m^{s+1}} \ll n^{35/52},$$

这里取 $\mu = \frac{8}{52(s-1)}$. 又利用 [2] 中所指示出的变换方法可以得到

$$B = B_0 + O(n^{35/52}),$$

$$B_0 = \sum_{m>n^{9/52}}^{\le n^{17/52+\mu}} C_m \sum_{\mu>-m}^{\le m} \sum_{\nu>\frac{\mu^2+3m^2}{4m}}^{\le m} \frac{2im\sqrt{n}}{4m\nu-\mu^2} e^{2\pi i\sqrt{n(4m\nu-\mu^2)}},$$

其次 B_0 可以分成为 $\ll \ln n$ 个具有形式

$$U_M = \sum_{m>M_0}^{\le M} C_m \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{2im\sqrt{n}}{4m\nu-\mu^2} e^{2\pi i\sqrt{n(4M\nu-\mu^2)}}$$

的和 U_M, 这里 M_0 和 M 是满足条件

$$n^{9/52} \le M_0 < M \le n^{17/52+\mu}, \quad M \le \sqrt{\frac{3}{2}} M_0$$

由从 [2] 所得到的结果，容易推出

$$U_M \ll M n^{1/2+\varepsilon} Z_M \max|\Omega|,$$

$$\Omega = \sum_{Z>2M^2}^{\le 4M^2} \left| \sum_{\mu>-M}^{\le M} \frac{e^{2\pi i(\alpha u^2+\sqrt{n(z-\mu^2)})}}{z-\mu^2} \right|,$$

这里 α 是任一满足条件 $0<\alpha<1$ 的实数.

4. 对于和 U_M 分为二类，属于第一类的和 U_M, 满足条件

$$n^{9/52} < M \le n^{14/52+\mu},$$

而属于第二类的和 U_M 满足条件

$$n^{14/52} < M \le n^{17/52+\mu},$$

对于属于第一类的和 U_M, 使用 [2] 而得到

$$U_M \ll n^{1/2+\varepsilon'}(M^{1/3}n^{1/12} + M^{2/3}n^{-1/12}) \ll n^{1/2+\varepsilon'} M^{1/3} n^{1/12} \ll n^{35/52+\varepsilon'}$$

所以说我们只需考虑和 U_M 属于第二类的，取 [2] 中的 h 为

$$h = [M^{10/9} n^{-1/18}]$$

和 Ω 中对应于 $\mu=0$ 者将 $\ll 1$, 而对于其他的项 $\mu=\mu'$ 和 $\mu=-\mu'$ 具有同样的数值，所以

$$\Omega \ll 1 + \sum_{z} \left| \sum_{u>0}^{\le M} \frac{e^{2\pi i(\alpha u^2+\sqrt{n(z-\mu^2)})}}{z-\mu^2} \right|.$$

假设 $g=[Mh^{-1}]+1$ 而 $h_1 = Mg^{-1}$, 那么 $h_1 < h$ 并且

$$\Omega \ll 1 + \sum_{l=0}^{g-1} \Omega_l,$$

$$\Omega_l = \sum_{Z} \left| \sum_{\mu>lh_1}^{\le lh_1+h_1} \frac{e^{2\pi i(\alpha u^2+\sqrt{n(z-\mu^2)})}}{z-\mu^2} \right|.$$

易得

$$\Omega_l^2 \ll \sum_{\mu}\sum_{\mu_1}\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|.$$

为了简短起见，规定

$$\varphi(z)=\frac{M^2}{z(z-t)},\quad f(z)=f(z,t)=\sqrt{n}(\sqrt{z}-\sqrt{z-t}),\quad t=\mu_1^2-\mu^2.$$

这里 μ_1 和 μ 相互无关经过那些数值

$$lh_1\le\mu,\quad \mu_1\le lh_1+h_1$$

为了方便起见，我们可以只取

$$\mu_1\ge\mu.$$

首先考虑满足条件 $l>0$ 的 Ω_l, 为了简短起见规定

$$D_1=2M^2-l^2h_1^2,\quad D_2=4M^2-l^2h_1^2.$$

易得

$$\Omega_l^2\ll G+G'+G'',$$

$$G=\sum_{\mu}\sum_{\mu_1}|S|,\quad G'=\sum_{\mu}\sum_{\mu_1}|S'|,\quad G''=\sum_{\mu}\sum_{\mu_1}|S''|.$$

$$S=\sum_{z>D_1}^{\le D_2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)},$$

$$S'=\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le D_1}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)},$$

$$S''=\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\le D_2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}.$$

在这里显然有 (上列诸式 μ 和 μ_1 所经过的区间是 $lh_1<\mu, \mu_1\le lh_1+h_1$)

$$\Omega_l\ll\sqrt{|G|}+\sqrt{|G'|}+\sqrt{|G''|}.$$

5. 研究和数 G'. 为了简短起见规定

$$D_{jU}=2M^2-l^2h_1^2-j\frac{h_1^2}{l}$$

这里记号 j 系表示具有下述性质

$$D_{jU}=2M^2-l^2h_1^2-j\frac{h_1^2}{l}\geq 2M^2-\mu^2$$

的最大正整数，易得

$$\begin{aligned}G'=&\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ \mu_1-\mu\leq h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum|S'|+\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq D_{jU}}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|\\&+\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum\left|\sum_{z>D_{jU}}^{\leq D_1}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|\\ \leq&\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ \mu_1-\mu\leq h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum|S'|+\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq D_{jU}}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|\\&+\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum\sum_{j\geq 1}^{\leq 2l^2+l}\left|\sum_{z>2M^2-l^2h_1{}^2-jh_1{}^2/l}^{\leq 2M^2-l^2h_1{}^2-(j-1)h_1{}^2/l}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|\end{aligned}$$

研究和 $\sum\limits_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ \mu_1-\mu\leq h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum|S'|$. 假定 ξ 等于 $0,1,\ldots,h_1\left(\frac{1}{l}\right)^{5/3}$ 中的一个数，这里 $\mu_1-\mu=\xi$ 解的数目 $\ll h_1$, 并且

$$t=2\mu\xi+\xi^2$$

当 $\xi=0$ 时， t 也等于 0, 而当 $\xi>0$ 时 t 则满足不等式

$$2lh_1\xi<t\leq(2l+3)h_1\xi.$$

又由于和 S' 中的求和的整个区间的长度 $\ll lh_1^2$, 当 $\xi=0$ 时，求得：

$$S'\ll M^{-2}h_1^2l.$$

而当 $\xi>0$ 时, 可以应用引理 1. $(H=M^{-2},U=h^2l,A=n^{-1/2}M^5(hl\xi)^{-1})$ 就得到

$$S'\ll n^{1/4}M^{-9/2}h^{5/2}l^{3/2}\xi^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}h^{-1/2}\xi^{-1/2}l^{-1/2}.$$

由此，引导出

$$\sum_{\substack{\mu \\ \mu_1-\mu\le h_1(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum_{\mu_1}|S'| \ll \sum_{\xi\ge 1}^{\le h(\frac{1}{l})^{5/3}} h(n^{1/4}M^{-9/2}h^{5/2}l^{3/2}\xi^{1/2}$$

$$+n^{-1/4}M^{1/2}h^{-1/2}l^{-1/2}\xi^{-1/2})+M^{-2}h^3l$$

$$\ll n^{1/4}M^{-9/2}h^5l^{-1}+n^{-1/4}M^{1/2}hl^{-4/3}+M^{-2}h^3l,$$

因而得到

$$\sum_{l>0}^{\le g-1}\sqrt{\sum_{\substack{\mu \\ \mu_1-\mu\le h_1 l^{-5/3}}}\sum_{\mu_1}|S'|}$$

$$\ll \sum_{l>0}^{\le Mh^{-1}}(M^{-1}h^{3/2}l^{1/2}+n^{1/8}M^{-9/4}h^{5/2}l^{-1/2}+n^{-1/8}M^{1/4}h^{1/2}l^{-2/3})$$

$$\ll M^{1/2}+n^{1/8}M^{-7/4}h^2+n^{-1/8}M^{7/12}h^{1/6}\ll n^{9/52},$$

研究和 $\sum\limits_{\substack{\mu \\ \mu_1-\mu>0}}\sum\limits_{\mu_1}\left|\sum\limits_{z>2M^2-\mu^2}^{\le D_jU}\varphi(z)e^{2\pi if(x)}\right|$. 假定 ξ 等于 $1,2,\ldots,h_1$ 中的一个数，对于位于 lh_1 和 lh_1+h_1 中间的任一个给定 μ, 方程 $\mu_1-\mu=\xi$ 的解的数目不多于 1 个，当 $\xi>0$ 时应用引理 1 $(H=M^{-2},U=h^2/l,A=n^{-1/2}M^5(hl\xi)^{-1})$ 而得到

$$\sum_{\substack{\mu_1 \\ \mu_1-\mu\ge 1}}\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le D_jU}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right| \ll \sum_{\xi\ge 1}^{\le h}\Bigg(n^{1/4}M^{-9/2}h^{5/2}l^{-1/2}\xi^{1/2}$$

$$+n^{-1/4}M^{1/2}h^{-1/2}l^{-1/2}\xi^{-1/2}+\ln\left(\frac{h^2}{l}+1\right)M^{-2}\Bigg)$$

$$\ll n^{1/4}M^{-9/2}h^4l^{-1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}l^{-1/2}+hM^{-2}\ln\left(\frac{h^2}{l}+1\right),$$

$$\sum_{\substack{\mu \\ \mu_1-\mu\ge 1}}\sum_{\mu_1}\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le D_jU}\varphi(z)e^{2\pi if(x)}\right|$$

$$\ll n^{1/4}M^{-9/2}h^5l^{-1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}hl^{-1/2}+h^2M^{-2}\ln\left(\frac{h^2}{l}+1\right),$$

所以有

$$\sum_{l>0}^{\leq g-1}\sqrt{\sum_{\mu}\sum_{\substack{\mu_1\\ \mu_1-\mu\geq 1}}\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq D_{jU}}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|}\ll\sum_{l>0}^{\leq Mh^{-1}}\Bigg(n^{1/8}M^{-9/4}h^{5/2}l^{-1/4}$$

$$+n^{-1/8}M^{1/4}h^{1/2}l^{-1/4}+hM^{-1}\ln^{1/2}\left(\frac{h^2}{l}+1\right)\Bigg)$$

$$\ll n^{1/8}M^{-6/4}h^{7/4}+n^{-1/8}Mh^{-1/4}+\ln^{1/2}\left(\frac{h^2}{l}+1\right)\ll n^{9/52}.$$

研究和 $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\substack{\mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum\limits_{j\geq 1}^{\leq 2l^2+l}\left|\sum\limits_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2/l}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|$. 假定 j 是 $1,2,\ldots,2l^2+l$ 中的一个数. 由于不等式

$$2lh_1\xi<t\leq(2l+3)h_1\xi$$

就可以得到 t 只经过满足下面条件的整数

$$T_0<t\leq T,\quad T_0=2h_1^2l^{-2/3},\quad T=(2l+3)h_1^2.$$

$$t=\mu_1^2-\mu^2,\quad lh_1<\mu\leq lh_1+h_1,\quad lh_1<\mu_1\leq lh_1+h_1,$$

这些 t 的数值中的每一个最多被采用 $n^{\varepsilon''}$ 次，所以有

$$\sum_{\mu}\sum_{\substack{\mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h(\frac{1}{l})^{5/3}}}\left|\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2l^{-1}}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2l^{-1}}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|$$

$$\ll n^{\varepsilon''}\sum_{t>T_0}^{\leq T}{}'\left|\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2l^{-1}}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2l^{-1}}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|,$$

这里 Σ' 乃表示 t 经过上述所指出的界限内且能表示为

$$t=\mu_1^2-\mu^2,\quad lh_1<\mu,\quad \mu_1\leq lh_1+h$$

的全部整数，而所得到的这个和式，去掉乘数 $n^{\varepsilon''}$ 以后，就可以分为 $\ll\ln n$ 个具有形式

$$\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}\left|\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2/l}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|,\quad \frac{3}{2}\tau<\tau_1\leq 2\tau$$

的和式. 对于和式 $\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l}^{2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2/l}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}$ 可以应用引理 2. 取

$$H=M^{-2},\quad U=M^2,\quad A=\frac{M^5}{\sqrt{n}\tau}$$

的时候就可以相信引理 2 的条件是满足, 又由等式 $f'(z_{\nu,t})=\nu$ 确定 $z_{\nu,t}$, 又令

$$f'(2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2l^{-1},t)=\nu_1(t),$$

$$f'(2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2l^{-1},t)=\nu_2(t),$$

$$\phi(\nu,t)=\frac{M^2}{z_{\nu,t}(z_{\nu,t}-t)\sqrt{\sqrt{n}((z_{\nu,t}-t)^{-3/2}-z_{\nu,t}^{-3/2})/4}},$$

$$\psi(\nu,t)=\sqrt{n}(\sqrt{z_{\nu,t}}-\sqrt{z_{\nu,t}-t})-\nu z_{\nu,t},$$

就有

$$\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2/l}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}$$

$$\leq\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}+O(n^{-1/4}M^{1/2}\tau^{-1/2}),$$

$$\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}'\left|\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2/l}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|$$

$$\ll\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}\left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|+O\Big(\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}'n^{-1/4}M^{1/2}\tau^{-1/2}\Big).$$

但是满足条件

$$t=\mu_1^2-\mu^2,\quad lh_1<\mu_1\leq lh_1+h_1,\quad lh_1<\mu\leq lh_1+h_1$$

的所有 t 的个数不超过 h_1^2 个, 所以就有

$$\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}'n^{-1/4}M^{1/2}\tau^{-1/2}\ll n^{-1/4}M^{1/2}h,$$

$$\left(\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}'\left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|\right)^2$$

$$\ll h^2\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}'\left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|^2$$

$$\ll h^2\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}\left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|^2.$$

关于 t 的和式可以分成为 $\ll \frac{\tau l^2}{h^2}$ 个具有如下形式的和：

$$\sum_{t>\tau_2}^{\leq\tau_3}\left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|^2,\quad \tau_2<\tau_3\leq\tau_2+\frac{h^2}{l^2}.$$

容易证明这里 $\nu=\nu_1=\nu_1(t)$ 和 $\nu=\nu_2=\nu_2(t)$ 都是 t 的减小函数，令 $t=\omega_1(\nu)$ 和 $t=\omega_2(\nu)$ 分别表示它们的反函数. 又有

$$\sum_{t>\tau_2}^{\leq\tau_3}\left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|^2\ll\sum_t\sum_{\nu_0}\sum_\nu\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}.$$

这里 ν_0 所经过的区间相同于 ν, 并且

$$\phi(t)=\phi(\nu_0,t)\phi(\nu,t),\psi(t)=\psi(\nu_0,t)-\psi(\nu,t)$$

交换和号的次序，就可以得到

$$\sum_t\sum_{\nu_0}\sum_\nu\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}\ll\sum_{\nu_0}\sum_\nu|V_{\nu_0,\nu}|,$$

$$V_{\nu_0,\nu}=\sum_{t>t'}^{\leq t''}\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}.$$

这里的 ν_0 和 ν 分别经过满足条件

$$\nu'<\nu_0\leq\nu'',\quad \nu'<\nu\leq\nu'',\quad \nu'=\nu_1(\tau_3),\quad \nu''=\nu_2(\tau_2)$$

的整数，对于给定的 ν_0 和 ν, t' 和 t'' 则由等式

$$t'=\max(\tau_2,\omega_1(\nu_0),\omega_1(\nu))$$

$$t''=\min(\tau_3,\omega_2(\nu_0),\omega_2(\nu))$$

所确定，关于和式 $V_{\nu_0,\nu}$ 可以得到

$$\phi(t) \ll H, \quad t'' - t' \ll U, \quad H = n^{-1/2}M\tau^{-1}, \quad U = h^2 l^{-2}.$$

又有

$$\begin{aligned}
\nu'' - \nu' &= \nu_2(\tau_2) - \nu_1(\tau_3) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,\tau_2)\right]_{x=2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h^2/l} - \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,\tau_3)\right]_{x=2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l} \\
&\ll \left(\frac{h^2}{l}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,\tau)\right)\right]_{x=\beta,\tau=\theta} + (\tau_2-\tau_3)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right)\right]_{x=\beta,t=\theta} \\
&\ll h^2 l^{-2}\sqrt{n}M^{-3},
\end{aligned}$$

这里 β 是位于 $2M^2 - l^2h_1^2 - jh_1^2/l$ 和 $2M^2 - l^2h_1^2 - (j-1)h_1^2/l$ 中间的一个数，而 Q 是位于 τ_2 和 τ_3 中间的一个数，又容易得到 $h^2\sqrt{n}M^{-3}l^{-2} \gg 1$.

和式 $\sum\limits_{\nu_0}\sum\limits_{\nu}|V_{\nu_0,\nu}|$ 中间所包含 $\nu_0 = \nu$ 部分应具有

$$\ll (\nu'' - \nu')UH \ll M^{-2}\tau^{-1}l^{-4}h_1^4$$

考虑 $\nu_0 \neq \nu$ 的和式 $V_{\nu_0,\nu}$, 这里可以假定 $\nu_0 > \nu$ (对于 $\nu > \nu_0$ 的情形，可用相同的方法进行研究), 为了方便起见，规定 $\omega = \nu_0 - \nu$, 由 [1] 可以得到

$$\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2} = \frac{3}{2}\frac{(z_{\nu',t}^{1/2} - (z_{\nu',t} - t)^{1/2})\omega}{(z_{\nu',t}^{3/2} - (z_{\nu',t} - t)^{3/2})^2((z_{\nu',t} - t)^{-3/2} - z_{\nu',t}^{-3/2})}$$

由这式又可以得到

$$\frac{1}{A} \ll \frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2} \ll \frac{1}{A}, \quad A = \tau^2 M^{-2}\omega^{-1}.$$

再引用引理 1, 就求得

$$\begin{aligned}
V_{\nu_0,\nu} &\ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln n\right) \\
&\ll n^{-1/2}M\tau^{-1}(h^2l^{-2}M\omega^{1/2}\tau^{-1} + \tau M^{-1}\omega^{-1/2}).
\end{aligned}$$

在和式 $\sum\limits_{\nu_0}\sum\limits_{\nu}|V_{\nu_0,\nu}|$ 中，对应于 $\nu_0>\nu$ 的部分，就应有

$$\ll (\nu''-\nu')\sum_{\omega>0}^{\ll \nu''-\nu'} n^{-1/2}M\tau^{-1}(h^2l^{-2}M\omega^{1/2}\tau^{-1}+\tau M^{-1}\omega^{-1/2})$$

$$\ll h^2M^2n^{-1/2}(l\tau)^{-2}[h^2l^{-2}\sqrt{n}M^{-3}]^{5/2}\ll n^{3/4}h^3l^{-7}\left(\frac{h^2}{\tau}\right)^2M^{-11/2},$$

因而得到

$$\sum_{\mu}\sum_{\substack{\mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h(\frac{1}{l})^{5/3}}}\left|\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2/l}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|$$

$$\ll\sqrt{h^2\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}\left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|^2}+O(n^{-1/4}M^{1/2}h\ln n)$$

$$\ll\sqrt{h^2\cdot\frac{\tau l^2}{h^2}\max\sum_{t}\sum_{\nu_0}\sum_{\nu}\phi(t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}}+O(n^{-1/4}M^{1/2}h\ln n)$$

$$\ll\sqrt{\tau l^2\left(h_1^4M^{-2}l^{-4}\tau^{-1}+n^{3/4}M^{-11/2}h^7l^{-7}\left(\frac{h^2}{\tau^{-2}}\right)\right)}$$

$$+O(n^{-1/4}M^{1/2}h\ln n)$$

$$\ll n^{3/8}M^{-11/4}h^{5/2}l^{-2}\ln n+h^2M^{-1}l^{-1}\ln n+O(n^{-1/4}M^{1/2}h\ln n).$$

$$\sum_{\mu}\sum_{\substack{\mu_1\\ \mu_1-\mu\geq h(\frac{1}{l})^{5/3}}}\sum_{j\geq 0}^{\leq 2l^2+l}\left|\sum_{z>2M^2-l^2h_1^2-jh_1^2/l}^{\leq 2M^2-l^2h_1^2-(j-1)h_1^2/l}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|$$

$$\ll(n^{3/8}M^{-11/4}h^{5/2}+h^2M^{-1}l+n^{-1/4}M^{1/2}hl^2)\ln n,$$

所以有

$$\sum_{l\geq 1}^{\leq g-1}\ln^{1/2}n\sqrt{n^{3/8}M^{-11/4}h^{5/2}+h^2M^{-1}l+n^{-1/4}M^{1/2}hl^2}$$

$$\ll\left(hM^{-1/2}\left[\frac{M}{h}\right]^{3/2}+n^{3/16}M^{-11/8}h^{5/4}\left[\frac{M}{h}\right]\right)\ln^{1/2}n$$

$$\ll n^{9/52+\varepsilon'''},$$

也就是

$$\sum_{l\geq 1}^{\leq g-1}\sqrt{|G'|}\ll n^{9/52+\varepsilon'''},$$

对于和数 G'' 可以使用研究 G' 时所用的相同方法而得到

$$\sum_{l\geq 1}^{\leq g-1}\sqrt{|G''|}\ll n^{9/52+\varepsilon^{(4)}}.$$

6. 研究满足条件

$$\xi=\mu_1-\mu\leq h\left[\frac{h}{M}\right]^{2/3}l^{-5/3}$$

的和数 G, 假定 ξ 是 $0,1,\ldots,h\left[\frac{h}{M}\right]^{2/3}l^{-5/3}$ 中间的一个数. 这里 $\xi=\mu_1-\mu$ 的解的数目不超过 h 个，当 $\xi=0$ 时，求得

$$S\ll 1,$$

而当 $\xi>0$ 时, 可以应用引理 1 ($H=M^{-2},U=M^2,A=n^{-1/2}M^5(hl\xi)^{-1}$), 就得到

$$S\ll n^{1/4}M^{-5/2}h^{1/2}l^{1/2}\xi^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}h^{-1/2}l^{-1/2}\xi^{-1/2}.$$

这里推导出满足条件 $\xi\leq h\left[\frac{h}{M}\right]^{2/3}l^{-5/3}$ 的和数 G 应有

$$\begin{aligned}&\ll h+\sum_{\xi>0}^{\leq h^{5/3}M^{-2/3}l^{-5/3}}h(n^{1/4}M^{-5/2}h^{1/2}l^{1/2}\xi^{1/2}\\&\quad+n^{-1/4}M^{1/2}h^{-1/2}l^{-1/2}\xi^{-1/2})\\&\ll h+n^{1/4}M^{-7/2}h^4l^{-2}+n^{-1/4}M^{1/2}hl^{-1},\end{aligned}$$

因而得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l>0}^{\leq g-1}\sqrt{h+n^{1/4}M^{-7/2}h^4l^{-2}+n^{-1/4}M^{1/2}hl^{-1}}\\&\ll Mh^{-1/2}+n^{1/8}M^{-7/4}h^2\ln n+n^{-1/8}M^{3/4}\\&\ll n^{9/52+\varepsilon}.\end{aligned}$$

现在研究满足条件 $\xi > h\left[\frac{h}{M}\right]^{2/3} l^{-5/3}$ 的和数 G. 由于不等式

$$2lh_1\xi < t \le (2l+3)h_1\xi$$

就得到 t 只经过满足条件

$$T_0 < t \le T, \quad T_0 = 2h_1^2 l^{-2/3}[h/M]^{2/3}, \quad T = (2l+3)h_1^2.$$

$$t = \mu_1^2 - \mu^2, \quad lh_1 \le \mu_1, \mu \le lh_1 + h_1$$

的整数，对于每个给定的 t, 最多只有 $n^{\varepsilon''}$ 个解，所以有

$$G \ll n^{\varepsilon} \sum_{t>T_0}^{\le T}{}' |S|.$$

这里记号 $\sum'$ 乃表示其中的 t 经过所规定的区间外，尚需满足 $t = \mu_1^2 - \mu^2$, $lh_1 < \mu$, $\mu_1 \le lh_1 + h_1$. 略去因子 $n^{\varepsilon''}$ 以后，就可以将这个和式分成 $\ll \ln n$ 个具有形式

$$G_1 = \sum_{t>\tau}^{\le \tau_1}{}' |S|, \quad \frac{3}{2}\tau < \tau_1 \le 2\tau$$

的和式，现在考虑其中的一个和式，对于这个和式可以应用引理 2, 令

$$H = M^{-2}, \quad U = M^2, \quad A = \frac{M^5}{\sqrt{n}\tau}.$$

可以相信该引理的条件是满足的，由等式 $f'(z_{\nu,t}) = \nu$ 确定 $z_{\nu,t}$. 令

$$f'(D_1) = \nu_1, \quad f'(D_2) = \nu_2.$$

$$\phi(\nu,t) = \frac{M^2}{z_{\nu,t}(z_{\nu,t}-t)\sqrt{\sqrt{n}((z_{\nu,t}-t)^{-3/2} - z_{\nu,t}^{-3/2})/4}}$$

$$\psi(\nu,t) = \sqrt{n}(\sqrt{z_{\nu,t}} - \sqrt{z_{\nu,t}-t}) - \nu z_{\nu,t}$$

就有

$$S = \sum_{\nu>\nu_1}^{\le \nu_2} \frac{1+i}{\sqrt{2}}\phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)} + O(n^{-1/4}M^{1/2}\tau^{-1/2}).$$

因而有

$$G_1 \ll G_2 + \sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}' n^{-1/4}M^{1/2}\tau^{-1/2} \ll G_2 + hn^{-1/4}M^{1/2},$$

$$G_2 = \sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}' \left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2} \phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|.$$

考虑和数 G_2. 这个和号的上限，下限 $\nu = \nu_1 = \nu_1(t)$ 和 $\nu = \nu_2 = \nu_2(t)$ 都是 t 的减小函数. 假定 $t = \omega_1(\nu)$ 和 $t = \omega_2(\nu)$ 分别是它们的反函数，就得到

$$\begin{aligned} G_2^2 &\ll h^2 \sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}' \left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2} \phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|^2 \\ &\ll h^2 \sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1} \left|\sum_{\nu>\nu_1}^{\leq\nu_2} \phi(\nu,t)e^{2\pi i\psi(\nu,t)}\right|^2 \\ &\ll h^2 \sum_{t}\sum_{\nu_0}\sum_{\nu} \phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}. \end{aligned}$$

在 [1] 中得到

$$\begin{aligned} &\sum_{t}\sum_{\nu_0}\sum_{\nu} \phi(t)e^{2\pi i\psi(t)} \\ &\quad \ll n^{3/4}M^{-11/2}\tau^{3/2} + n^{1/4}M^{-9/2}\tau^{3/2} + M^{-2}\tau \end{aligned}$$

因而有

$$G_2^2 \ll h^2M^{-2}\tau + n^{3/4}M^{-11/2}h^2\tau^{3/2},$$

$$G_2 \ll hM^{-1}\tau^{1/2} + n^{3/8}M^{-11/4}h\tau^{3/4},$$

$$G_1 \ll M^{-1}\tau^{1/2}h + n^{3/8}M^{-11/4}h\tau^{3/4} + n^{-1/4}M^{1/2}h,$$

$$\begin{aligned} G &\ll n^{\varepsilon''}(M^{-1}T^{1/2}h + n^{3/8}M^{-11/4}hT^{3/4} + n^{-1/4}M^{1/2}h) \\ &\ll n^{\varepsilon''}(M^{-1}h^2l^{1/2} + n^{3/8}M^{-11/4}h^{5/2}l^{3/4} + n^{-1/4}M^{1/2}h), \end{aligned}$$

就得到

$$\sum_{l>0}^{\leq g-1}\sqrt{|G|}$$

$$\ll \sum_{l>0}^{\leq g-1}\sqrt{n^{\varepsilon''}(M^{-1}h^2l^{1/2}+n^{3/8}M^{-11/4}h^{5/2}l^{3/4}+n^{-1/4}M^{1/2}h}$$

$$\ll n^{\varepsilon''/2}(M^{3/4}h^{-1/4}+n^{3/16}h^{-1/8}+n^{-1/8}M^{5/4}h^{-1/2})\ll n^{9/52}.$$

7. 考虑满足条件 $l=0$ 的 Ω_l. 当 $t=0$ 时, 关于 z 求和易得 $\ll 1$, 和式中对应于 $t>0$ 部分, 可以应用引理 1. ($H=M^{-2}, U=M^2, A=n^{-1/2}M^5t^{-1}$) 就得到

$$\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq 4M^2-\mu^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|\ll n^{1/4}M^{-5/2}t^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}t^{-1/2}.$$

但是 $t=0$ 的解的数目不超过 h 个, 而 $t=r$, 当 $r>0$ 时的解的数目不超过 $n^{\varepsilon''}$ 个, 现在先考虑 Ω_0 中满足 $t\leq h^2\left[\frac{h}{M}\right]^{2/3}$ 的部分应有

$$\ll h+n^{\varepsilon''}\sum_{r>0}^{\leq h^2[h/M]^{2/3}}(n^{1/4}M^{-5/2}r^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}r^{-1/2})$$

$$\ll h+n^{1/4}M^{-7/2}h^4+n^{-1/4}hM^{1/2}\ll n^{18/52},$$

所以有

$$\Omega_0^2\ll h+n^{1/4}M^{-7/2}h^4+n^{-1/4}M^{1/2}h$$

$$+\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ t=\mu_1^2-\mu^2\geq h^2[\frac{h}{M}]^{2/3}}}\sum\left|\sum_{z>2M^2}^{\leq 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|$$

$$+\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ t=\mu_1^2-\mu^2\geq h^2[\frac{h}{M}]^{2/3}}}\sum\left\{\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq 2M^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\leq 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|\right\}.$$

相似于考虑当 $l>0$ 时的和数

$$\sum_{\substack{\mu \\ \mu_1-\mu=\xi\geq h[\frac{h}{M}]^{2/3}l^{-5/3}}}\sum_{\mu_1}\left|\sum_{z>2M^2}^{\leq 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(x)}\right|$$

的方法，可以得到

$$\sum_{\substack{\mu \\ t\geq h^2[\frac{h}{M}]^{2/3}}}\sum_{\mu_1}\left|\sum_{z>2M^2}^{\leq 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|\ll n^{18/52}.$$

现在考虑和数

$$\sum_{\substack{\mu \\ t=\mu_1^2-\mu^2\geq h^2[\frac{h}{M}]^{2/3}}}\sum_{\mu_1}\left\{\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq 2M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|+\left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\leq 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|\right\}.$$

应用引理 1, 取 $(H=M^{-2},U=h^2,A=n^{-1/2}M^5t^{-1})$ 就得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq 2M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|+\left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\leq 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|\\ &\ll n^{1/4}M^{-9/2}h^2t^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}t^{-1/2}.\end{aligned}$$

当 $\mu_1^2-\mu^2=t>0$ 最多只有 n^ε 个解，所以有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mu \\ t\geq h^2[\frac{h}{M}]^{2/3}}}\sum_{\mu_1}\left\{\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\leq 2M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|+\left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\leq 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|\right\}\\ &\ll\sum_{t>0}^{\leq h^2}(n^{1/4}M^{-9/2}h^2t^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}t^{-1/2})\\ &\ll n^{1/4}M^{-9/2}h^5+n^{-1/4}M^{1/2}h\ll n^{18/52},\end{aligned}$$

所以得到

$$\Omega_0\ll n^{9/52}.$$

由上面所证明的各部分结果，总和得到

$$\Omega\ll n^{9/52+\varepsilon''},\quad U_M\ll n^{35/52+\varepsilon''}Mz_m.$$

当 $m \ll \frac{1}{\Delta}$ 时，得到

$$U_M \ll n^{35/52+\varepsilon_1},$$

而当 $m \gg \frac{1}{\Delta}$ 时，得到

$$U_M \ll \frac{n^{35/52+\varepsilon_1}}{\Delta^s m^s} \ll n^{35/52+\varepsilon_1},$$

所以我们的结果就得到证明.

参考文献

[1] Виноградов И М. К вопросу о числе целых точек в заданной облясти. *Известия Ак. Наук СССР, сер. Матем.*, 1960, **24**: 777 ~ 786

[2] Виноградов И М. Улучшение асимптотических сумм в теории чисел. *Известия Ак. Наук СССР, сер. Матем.*, 1955, **19**:3 ~ 10

[3] Виноградов И М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР*, 1947, **23**

圆内整点问题 *†

用 $R(t)$ 表示圆 $x^2+y^2=t$ 的内面及圆周上面的整点的数目，很容易证明当 $t\to\infty$ 时 $R(t)\sim\pi t$, 实际上我们有

$$R(t)=\pi t+O(t^{\alpha}), \tag{1}$$

这里 α 代表某个小于 1 的数，我们的问题就是去寻求使得 (1) 式成立的 α 的下界 ϑ. 到现在为止，最好的结果是华罗庚在 1942 年得到的 $\vartheta\le\frac{13}{40}$. 又尹文霖曾在 [4] 中从事于这方面的工作，但是他的证明是错的，我们将于下节指出他的错误，本文的目的是使用 [1] 和 [3] 的方法来处理圆内整点问题，并得到 $\vartheta\le\frac{12}{37}+\epsilon$, 这里 ϵ 是任一给定的正数.

§1.

关于文 [4] 中的错误：在文 [4] 中所得到的

$$D=2^3\cdot3^3(u^2+v^2)^2u^2v^2(2u^8+8u^6v^2+13u^4v^4+8u^2v^6+2v^8)$$

是错误的，实际上应该有 $D=0$, 因此该文的证明是错的. 实际上该文中对于 H 的处理也存在有错误，现在我们来证明 $D=0$. 由于 [4]

$$\begin{aligned}\phi_u&=(u^2+v^2)^{-7/2}\{X(12u^2v^2-3v^4)+Y(-6u^3v+9uv^3)\\&\quad+Z(2u^4-11u^2v^2+2v^4)+W(9u^3v-6uv^3)\},\end{aligned}$$

这里

$$X=m_1m_2m_3,\quad Y=\Sigma m_1m_2n_3,\quad Z=\Sigma m_1n_2n_3,\quad W=n_1n_2n_3,$$

而得到

$$\begin{aligned}\phi_{uu}&=(u^2+v^2)^{-9/2}\{(-60u^3v^2+45uv^4)X+(24u^4v-72u^2v^3+9v^5)Y\\&\quad+(-6u^5+63u^3v^2-36uv^4)Z+(-36u^4v+63u^2v^3-6v^5)W\},\end{aligned}$$

因此有

---

* 1962 年 9 月 27 日收到.

† 原载数学学报, **13**(1963), no. 2, pp. 299 – 313.

$D =$

$$\begin{vmatrix} -60u^2v^2+45v^4 & 24u^4-72u^2v^2+9v^4 & -6u^4+63u^2v^2-36v^4 & -36u^4+63u^2v^2-6v^4 \\ -6u^4+63u^2v^2-36v^4 & -36u^4+63u^2v^2-6v^4 & 9u^4-72u^2v^2+24v^4 & 45u^4-60u^2v^2 \\ 12u^2v^2-3v^4 & -6u^4+9u^2v^2 & 2u^4-11u^2v^2+2v^4 & 9u^4-6u^2v^2 \\ -6u^2v^2+9v^4 & 2u^4-11u^2v^2+2v^4 & 9u^2v^2-6v^4 & -3u^4+12u^2v^2 \end{vmatrix},$$

在行列式中将第二行加于第一行，将第四行加于第三行，第四列取出公因子 3 得到

$$D = \begin{vmatrix} -6u^2+9v^2 & -12u^2+3v^2 & 3u^2-12v^2 & 3u^2-2v^2 \\ -6u^4+63u^2v^2-36v^4 & -36u^4+63u^2v^2-6v^4 & 9u^4-72u^2v^2+24v^4 & 15u^4-20u^2v^2 \\ 6v^2 & -4u^2+2v^2 & 2u^2-4v^2 & 2u^2 \\ -6u^2v^2+9v^4 & 2u^4-11u^2v^2+2v^4 & 9u^2v^2-6v^4 & -u^4+4u^2v^2 \end{vmatrix} \times 3(u^2+v^2)^2.$$

将 (-1) 乘第一列加于第二列，将 2 倍第四列加于第二列，又将 $\frac{2}{3}$ 倍第一列加于第三列，将 (-3) 倍第四列加于第三列得到

$$D = 3(u^2+v^2)^2 \begin{vmatrix} 3(-2u^2+3v^2) & -10v^2 & -10u^2 & 3u^2-2v^2 \\ -6u^4+63u^2v^2-36v^4 & -40u^2v^2+30v^4 & -40u^4+30u^2v^2 & 15u^4-20u^2v^2 \\ 6v^2 & -4v^2 & -4u^2 & 2u^2 \\ -6u^2v^2+9v^4 & 3u^2v^2-7v^4 & 3u^4-7u^2v^2 & -u^4+4u^2v^2 \end{vmatrix}.$$

在上式第二列中取出公因子 v^2 而在第三列中取出公因子 u^2, 即得第二列和第三列完全相同，故 $D=0$.

§2.

我们令

$$\Delta f(x,y) = f(x+m_1+m_2+m_3, y+n_1+n_2+n_3) - \Sigma f(x+m_1+m_2, y+n_1+n_2) + \Sigma f(x+m_1, y+n_1) - f(x,y).$$

又令

$$G(x,y) = \Delta(\sqrt{x^2+y^2}),\quad X = 6m_1m_2m_3,\quad Y = 2\Sigma m_1m_2n_3$$
$$Z = 2\Sigma m_1n_2n_3,\quad W = 6n_1n_2n_3,$$

这里 $m_i \geq 1$ 的整数，而 n_i 为整数，$\max(x,y) \geq L$, $m_i = O(\eta)$, $n_i = O(\eta)$.

由 [1] 有

$$G_{xx}G_{yy} - G_{xy}^2 = -\frac{3}{4(x^2+y^2)^7}Q(X,Y,Z,W) + O\left(\frac{(X^2+Y^2+Z^2+W^2)\eta}{L^9}\right),$$

这里

$$\begin{aligned} Q(X,Y,Z,W) &= (8x^4+6x^2y^2+3y^4)y^2X^2 \\ &+3(4x^6+4x^4y^2+21x^2y^4+6y^6)Y^2 \\ &+3(6x^6+21x^4y^2+4x^2y^4+4y^6)Z^2+(3x^4+6x^2y^2+8y^4)x^2W^2 \\ &-2xy(8x^4-4x^2y^2+3y^4)XY-2xy(3x^4-4x^2y^2+8y^4)ZW \\ &-2(2x^6+20x^4y^2+9x^2y^4+6y^6)XZ \\ &-2(6x^6+9x^4y^2+20x^2y^4+2y^6)YW \\ &+2(4x^4+3x2y^2+4y^4)xyXW-90x^3y^3YZ. \end{aligned}$$

现在我们要证明下面的三个引理.

引理 1. 当 $x \geq y$ 时，我们有

$$Q(X,Y,Z,W) \geq 10^{-5}\{x^4(yX-xY)^2+x^2y^2(yY-xZ)^2 +x^4(yZ-xW)^2\}.$$

证. 首先我们证明

$$Y^2 \geq XZ, \quad Z^2 \geq YW.$$

由于

$$\begin{aligned} Y^2 &= 4\Big[2m_1m_2m_3(m_1n_2n_3+m_2n_1n_3+m_3n_1n_2) \\ &+\frac{1}{2}(m_1m_2n_3-m_1m_3n_2)^2+\frac{1}{2}(m_1m_3n_2-m_2m_3n_1)^2 \\ &+\frac{1}{2}(m_1m_2n_3-m_2m_3n_1)^2+m_1^2m_2m_3n_2n_3 \\ &+m_1m_2^2m_3n_1n_3+m_1m_3^2m_2n_1n_2\Big] \\ &= XZ+\frac{1}{2}(m_1m_2n_3-m_1m_3n_2)^2+\frac{1}{2}(m_1m_2n_3-m_2m_3n_1)^2 \\ &+\frac{1}{2}(m_1m_3n_2-m_2m_3n_1)^2. \end{aligned}$$

同样的我们可以证明 $Z^2 \geq YW$.

(1) 设 $yX - xY = \alpha xY$ 而 $|\alpha| \le \frac{1}{2}$. 令

$$\begin{aligned}
Q_1(X,Y,Z,W) &= (8x^4 - 4x^2y^2 + 3y^4)(yX - xY)^2 \\
&+(3x^4 - 4x^2y^2 + 8y^4)(yZ - xW)^2 + 42x^2y^2(yY - xZ)^2 \\
&+10x^2(y^2X - x^2Z)^2 + 6y^2(y^2Y - x^2W)^2 \\
&+(9x^4y^2 + 8x^2y^4 + 4y^6)(Z^2 - YW) \\
&+(4x^6 + 12x^4y^2 + 12x^2y^4 + 4y^6)(Y^2 - XZ),
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
Q(X,Y,Z,W) &= Q_1(X,Y,Z,W) + \{4x^4y^2W^2 - 8x^2y^4YW + 8x^2y^4Z^2 \\
&+8y^6(Y^2 - XZ) - 12x^2y^4YW + 8xy^5XW\} + \{-6x^3y^3YZ \\
&+9x^4y^2Z^2 - 9x^4y^2YW + 6x^3y^3XW + 6x^2y^4(Y^2 - XZ)\} \\
&+\{4x^4y^2Y^2 - 8x^4y^2XZ + 8x^6Z^2 - 12x^6YW + 8x^5yXW\} \\
&= Q_1(X,Y,Z,W) + \{4y^2(x^2W - y^2Y)^2 + [(4+8\alpha) \\
&+(4-8\alpha)]x^2y^4Z^2 + 4y^6Y^2 - 8y^6XZ - (4-8\alpha)x^2y^4YW\} \\
&+\{3x^2y^2(yY - xZ)^2 + [(3+6\alpha) + (3-6\alpha)]x^4y^2Z^2 \\
&-(3-6\alpha)x^4y^2YW + 3x^2y^4Y^2 - 6x^2y^4XZ\} + \{4x^4y^2Y^2 \\
&-8x^4y^2XZ + [(4+8\alpha) + (4-8\alpha)]x^6Z^2 - (4-8\alpha)x^6YW\} \\
&\ge Q_1(X,Y,Z,W) + \{4y^6Y^2 + (4+8\alpha)x^2y^4Z^2 - 8y^6XZ\} \\
&+\{3x^2y^4Y^2 + (3+6\alpha)x^4y^2Z^2 - 6x^2y^4XZ\} \\
&+\{4x^4y^2Y^2 + (4+8\alpha)x^6Z^2 - 8x^4y^2XZ\}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

由于 $yX - xY = \alpha xY, |\alpha| \le \frac{1}{2}$. 再设 $xZ - yY = \beta\alpha(xZ)$. 因此我们有

$$y^2X = (1+\alpha)(1-\beta\alpha)x^2Z, (y^2X - x^2Z)^2 = \alpha^2(1 - \beta\alpha - \beta)^2x^4Z^2,$$

$$Y^2 = \frac{1-\beta\alpha}{1+\alpha}XZ, \qquad (3)$$

$$Y^2 - XZ = \frac{-\alpha - \beta\alpha}{1+\alpha}XZ, \qquad (4)$$

这里不妨假定 $Z > 0$, 否则由 (2) 式显见我们的引理 1 在 $|\alpha| \le \frac{1}{2}$ 时是成立的.

(1a) 若 $|\beta| \geq 1$, 则有 $x^2y^2(xZ-yY)^2 \geq \alpha^2x^4y^2Z^2$,

(1b) 若 $|\beta| < 1$, 则由 (4) 式显见 α 不能为正，否则 $Y^2 - XZ < 0$,

(1c) 如果 $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 0$ 而 $\beta \geq 0$, 则 $Y^2 - XZ \geq -\frac{\alpha}{1+\alpha}XZ$,

(1d) 如果 $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 0, -\frac{1}{2} \leq \beta \leq 0$, 则

$$(y^2X - x^2Z)^2 \geq \alpha^2x^4Z^2, Y^2 - XZ \geq -\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}XZ.$$

如果 $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 0, \beta \leq -\frac{1}{2}$, 则 $(y^2X - x^2Z)^2x^2 \geq \frac{25}{16}\alpha^2x^6Z^2$.

(1A) 当 $\frac{1}{2} \geq \alpha \geq 0$ 时 (下面各式常用到 $x \geq y$), 则有

$$\begin{aligned}
&\{4y^6Y^2 + (4+8\alpha)x^2y^4Z^2 - 8y^6XZ\} \\
&\quad + \{3x^2y^4Y^2 + (3+6\alpha)x^4y^2Z^2 - 6x^2y^4XZ\} + 7x^2y^2(yY - xZ)^2 \\
&\geq \{4y^6Y^2 + (4+8\alpha+4\alpha^2)x^2y^4Z^2 - 8y^6XZ\} \\
&\quad + \{3x^2y^4Y^2 + (3+6\alpha+3\alpha^2)x^4y^2Z^2 - 6x^2y^4XZ\} \\
&\geq \left\{4\frac{y^8}{x^2}\frac{X^2}{(1+\alpha)^2} - 8y^6XZ + 4(1+\alpha)^2x^2y^4Z^2\right\} \\
&\quad + \left\{3\frac{y^6}{(1+\alpha)^2}X^2 - 6x^2y^4X + 3(1+\alpha)^2x^4y^2Z^2\right\} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{4x^4y^2Y^2 + (4+8\alpha)x^6Z^2 - 8x^4y^2XZ\} + 6x^4(yX - xY)^2 \\
&\geq (4+6\alpha^2)x^4y^2Y^2 + (4+8\alpha)x^6Z^2 - 8x^4y^2XZ \\
&= \frac{(4+6\alpha^2)}{(1+\alpha)^2}x^2y^4X^2 - 6x^4y^2XZ + (4+8\alpha)x^6Z^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

(1B) 如果 $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 0, \beta \geq 0$ 时，则有

$$\begin{aligned}
&\{4y^6Y^2 + (4+8\alpha)x^2y^4Z^2 - 8y^6XZ\} \\
&\quad + \{3x^2y^4Y^2 + (3+6\alpha)x^4y^2Z^2 - 6x^2y^4XZ\} \\
&\quad + \{4x^4y^2Y^2 + (4+8\alpha)x^6Z^2 - 8x^4y^2XZ\} \\
&\quad + (8y^6 + 6x^2y^4 + 8x^4y^2)(Y^2 - XZ) \\
&\geq \left\{4\frac{y^8}{x^2(1+\alpha)^2} + (4+8\alpha)x^2y^4Z^2 - 8\left(1+\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)y^6XZ\right\}
\end{aligned}$$

$$+\left\{3y^6\frac{X^2}{(1+\alpha)^2}-6\left(1+\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)x^2y^4XZ+(3+6\alpha)x^4y^2Z^2\right\}$$
$$+\left\{4x^2y^4\frac{X^2}{(1+\alpha)^2}-8\left(1+\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)x^4y^2XZ+(4+8\alpha)x^6Z^2\right\}$$
$$\geq 0.$$

(1C) 如果 $-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 0, \beta\leq 0$, 则有

$$\{4y^6Y^2+(4+8\alpha)x^2y^4Z^2-8y^6XZ\}+4x^2(y^2X-x^2Z)^2$$
$$+\{3x^2y^4Y^2-6x^2y^4XZ+(3+6\alpha)x^4y^2Z^2\}+3x^2(y^2X-x^2Z)^2$$
$$\geq\left\{4\frac{y^8}{x^2(1+\alpha)^2}X^2+4(1+\alpha)^2x^2y^4Z^2-8y^6XZ\right\}$$
$$+\left\{3y^6\frac{X^2}{(1+\alpha)^2}-6x^2y^4XZ+3(1+\alpha)^2x^4y^2Z^2\right\}$$
$$\geq 0.$$

如果 $-\frac{1}{2}\leq\beta\leq 0$, 则有

$$\{4x^4y^2Y^2+(4+8\alpha)x^6Z^2-8x^4y^2XZ\}+(4x^6+12x^4y^2)(Y^2-XZ)$$
$$\geq 4x^2y^4\frac{X^2}{(1+\alpha)^2}-8\left(1+\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)x^4y^2XZ+(4+8\alpha)x^6Z^2$$
$$\geq 0.$$

如果 $\beta\leq-\frac{1}{2}$, 则有

$$\{4x^4y^2Y^2+(4+8\alpha)x^6Z^2-8x^4y^2XZ\}+3x^2(y^2X-x^2Z)^2$$
$$\geq 4x^2y^4\frac{X^2}{(1+\alpha)^2}-8x^4y^2XZ+\left(4+8\alpha+\frac{75}{16}\alpha^2\right)x^6Z^2\geq 0.$$

故当 $-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$ 时，我们的引理 1 得证.

(2) 设 $yX-xY=\alpha xY$ 而 $\alpha\geq\frac{1}{2}$, 则 y 不可能为负，否则将有正数等于负数.

(2a) 如果 $W\geq 0$, 则有

$$Q(X,Y,Z,W)=\{10x^2y^4X^2+18x^6Z^2-26x^4y^2XZ\}$$
$$+\{(Y^2-XZ)(4x^6+14x^4y^2+18x^2y^4+12y^6)$$
$$+(8x^4-4x^2y^2+3y^4)(yX-xY)^2+45x^2y^2(yY-xZ)^2$$

$$+(2x^4y^2-3x^2y^4+4y^6)Y^2+(3x^4-4x^2y^2+8y^4)(yZ-xW)^2\}$$
$$+\{(15x^4y^2+16x^2y^4+4y^6)Z^2-(9x^4y^2+22x^2y^4+4y^6)YW\}$$
$$+\{2y^6Y^2+10x^4y^2W^2-6x^2y^4YW\}$$
$$+\left\{(8x^5+6x^3y^2+8xy^4)W\left(yX-\frac{3}{2}xY\right)\right\}.$$

故由 $yX\geq\frac{3}{2}xY$ 显见引理 1 成立.

(2b) 如果 $W<0$, 则有

$$Q(X,Y,Z,W)=\{(1.5x^4-4x^2y^2+3y^4)(yX-xY)^2+6y^6Y^2$$
$$+10x^2y^4Z^2+12y^6Z^2+45x^2y^2(yY-xZ)^2$$
$$+(2x^2y^4X^2-3x^2y^4XZ+2x^2y^4Z^2)$$
$$+(4x^6+16x^4y^2+15x^2y^4+12y^6)(Y^2-XZ)\}$$
$$+\{6.5x^4(yX-xY)^2+2.5x^6|W|^2+12x^6Y|W|-8x^5yX|W|\}$$
$$+\{(0.5x^6+6x^4y^2+8x^2y^4)W^2+(8x^2y^4X^2-24x^4y^2XZ+18x^6Z^2)$$
$$+18x^4y^2Z^2+(18x^4y^2+40x^2y^4+4y^6)Y|W|$$
$$-(6x^3y^2+8xy^4)yX|W|-2xy(3x^4-4x^2y^2+8y^4)ZW\}.$$

又我们有

$$6.5x^4(yX-xY)^2+2.5x^6|W|^2+12x^6Y|W|-8x^5yX|W|$$
$$=6.5x^4y^2\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}X^2-\frac{8\alpha-4}{1+\alpha}x^5y|W|X+2.5x^6|W|^2\geq 0.$$

($2b_1$) 当 $W\leq 0, Z\geq 0$ 时，则 $-ZW\geq 0$, 故

设 $\alpha\leq 2$, 显见引理 1 成立.

当 $\alpha\geq 2$, 则 $3x^2y^4X^2\geq 3x^2y^2(9x^2Y^2)\geq 27x^4y^2XZ$.

而 $5x^2y^4X^2+(6x^4y^2+8x^2y^4)W^2-(6x^3y^2+8xy^4)X|W|y\geq 0$. 故引理 1 也成立.

($2b_2$) 当 $W\leq 0, Z\leq 0$ 时，则 $-XZ\geq 0$. 由

$$8x^2y^4X^2+(5x^4y^2+3x^2y^4)W^2-(6x^3y^2+8xy^4)yX|W|\geq 0,$$
$$(x^4y^2+5x^2y^4)W^2+(10x^6+18x^4y^2)Z^2-2xy(3x^4+8y^4)ZW\geq 0,$$

故引理 1 也成立.

(3) 当 $yX - xY = \alpha xY$ 而 $-1 < \alpha \le -\frac{1}{2}$ 时，当然这里 Y 不可能为负.

(3a) 假定 $W \ge 0, Z \ge 0$, 则有 $xY = \frac{yX}{1+\alpha} \ge 2yX$.

($3a_1$) 设 $3yX \ge xY \ge 2yX$, 则有

$$
\begin{aligned}
Q(X,Y,Z,W) = &\{(1.5x^4 - 4x^2y^2 + 3y^4)(yX - xY)^2 + 4x^6(Y^2 - XZ) \\
&+(3x^4 - 4x^2y^2 + 8y^4)(yZ - xW)^2 + 45x^2y^2(yY - xZ)^2\} \\
&+ \left\{2(4x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4)xW\left(yX - \tfrac{1}{3}xY\right)\right. \\
&\left.+ \left(9\tfrac{1}{3}x^6 + 9x^4y^2 + 16x^2y^4 + 4y^6\right)(Z^2 - YW)\right\} \\
&+\left\{6.5x^4(yX - xY)^2 + 10x^2y^4X^2 + 9x^4y^2Y^2 + 8\tfrac{2}{3}x^6Z^2\right. \\
&\left.-40x^4y^2XZ\right\} + \{7x^4y^2Y^2 - 7x^4y^2YW + 2x^4y^2W^2\} \\
&+\{15x^2y^4Y^2 - 18x^2y^4XZ + 3x^4y^2Z^2\} \\
&+\{3.5y^6Y^2 - 12y^6XZ + 3x^4y^2Z^2\} \\
&+\left\{14.5y^6Y^2 + 8x^4y^2W^2 - 21\tfrac{1}{3}x^2y^4YW\right\}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

利用 $yX \ge \frac{1}{3}xY$ 及 $x^2Y^2 \ge 4y^2X^2$ 就显见我们的引理 1 成立.

($3a_2$) 设 $xY \ge 3yX$, 则有

$$
\begin{aligned}
Q(X,Y,Z,W) = &\{(1.5x^4 - 4x^2y^2 + 3y^4)(yX - xY)^2 \\
&+(12x^6 + 10x^4y^2 + 16x^2y^4 + 4y^6)(Z^2 - YW) \\
&+(3x^4 - 4x^2y^2 + 8y^4)(yZ - xW)^2 + 45x^2y^2(yY - xZ)^2 \\
&+4x^6(Y^2 - XZ)\} \\
&+\{6.5x^4(yX - xY)^2 + 10x^2y^4X^2 + 6x^4y^2Y^2 - 40x^4y^2XZ + 6x^6Z^2\} \\
&+\{15x^2y^4Y^2 + 5x^4y^2Z^2 - 18x^2y^4XZ - 12y^6XZ\} \\
&+\{2(4x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4)xyXW\} \\
&+\{18y^6Y^2 + 8x^4y^2W^2 - 24x^2y^4YW\} \\
&+\{10x^4y^2Y^2 - 8x^4y^2YW + 2x^4y^2W^2\}.
\end{aligned}
$$

再利用 $(xY)^2 \ge 9y^2X^2$ 就显见引理 1 是成立.

(3b) 当 $Y \ge 0, W \ge 0, Z \le 0$ 时，负项只有 $-XY, -YW$, 利用 $Z^2 \ge YW$, 又因为 $-ZW \ge 0$. 即证得引理 1.

(3c) 当 $W \le 0$, 因为 $Y \ge 0$, 由 $Q(X,Y,Z,W)$ 的等式 (5), 再利用

$$
\begin{aligned}
&\Big\{2(4x^4+3x^2y^2+4y^4)xW\left(yX-\tfrac{1}{3}xY\right)+\\
&\quad+\left(9\tfrac{1}{3}x^6+9x^4y^2+16x^2y^4+4y^6\right)(Z^2-YW)\Big\}\\
&\ge 2(4x^4+3x^2y^2+4y^4)(xY-yX)x|W|\\
&\ge 0
\end{aligned}
$$

及

$$x^2Y^2 \ge 4y^2X^2, \quad xY \ge 2yX.$$

即证得引理 1.

(4) $\alpha = -1$, 此时 $X = 0$, 由 [1] 显见本引理成立.

(5) $\alpha < -1$, 则 Y 一定是负的.

(5a) 设 W 为正，则 $-XY, -YW, XW$ 都是正的，利用前面的同样方法，显见本引理 1 成立.

(5b) 设 $W \le 0, Z \le 0$. 由于 $Y \le 0$, 则

$$
\begin{aligned}
Q(X,Y,Z,W,) &= 2xy(8x^4-4x^2y^2+3y^4)X|Y|\\
&+(0.5x^4-4x^2y^2+8y^4)(yZ-xW)^2\\
&+\{(4x^6Y^2+4y^6Z^2-8x^3y^3YZ)+[(4x^6+12x^4y^2)Y^2\\
&+16x^2y^4Z^2-32x^3y^3YZ]+(63x^2y^4Y^2+10x^4y^2Z^2-50x^3y^3YZ)\}\\
&+\{(18x^6+50x^4y^2)Z^2-(12x^6+18x^4y^2+38x^2y^4)YW\}\\
&+\{(3x^6+6y^6)Y^2-(2x^2y^4+4y^6)YW+x^4y^2W^2\}\\
&+\{(6x^2y^2+3y^4)y^2X^2+9x^4y^2W^2-2(3x^2y^2+4y^4)xyX|W|\}\\
&+\{(18x^2y^4+12y^6)X|Z|+0.001x^4y^2X^2+x^6Y^2+12y^6Y^2\}\\
&+\{2.5x^4(yZ-xW)^2+(4x^6+40x^4y^2)X|Z|+7.999x^4y^2X^2\\
&-8x^5yX|W|\}.
\end{aligned}
$$

设 $x|W|-y|Z| = \beta y|Z|$, 如果 $\beta \le 4.5$, 则

$$(4x^6+40x^4y^2)X|Z| \ge 8x^5yX|W|,$$

则显见引理 1 成立.

设 $x|W|-y|Z|=\beta y|Z|$, 如果 $4.5 \le \beta \le 9$, 则

$$
\begin{aligned}
&7.999x^4y^2X^2+2.5x^4(yZ-xW)^2+(4x^6+40x^4y^2)X|Z|-8x^5yX|W| \\
&\ge 7.999x^4y^2X^2+2.5x^6\frac{\beta^2W^i}{(1+\beta)^2}-\left(8-\frac{44}{1+\beta}\right)x^5yX|W| \\
&> 7.999x^4y^2X^2+2.5x^6\left(\frac{4.5}{5.5}\right)^2W^2-3.6x^5yX|W|>0.
\end{aligned}
$$

而当 $\beta \ge 9$ 时, 则有

$$
\begin{aligned}
&7.999x^4y^2X^2+2.5x^6\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^2W^2-\left(8-\frac{44}{1+\beta}\right)x^5yX|W| \\
&\ge 7.999x^4y^2X^2+(2.5)(0.81)x^6W^2-8x^5yX|W| \ge 0.
\end{aligned}
$$

(5c) 如果 $W \le 0, Z \ge 0$. 由于 $Y \le 0$, 则 $-YZ, -WZ, -XY$ 都是正的, 由

$$
\begin{aligned}
&\{(2x^2y^2+3y^4)y^2X^2+(6x^2y^2+8y^4)x^2W^2-2(3x^2y^2+4y^4)xyX|W|\} \\
&+\{7.5x^4y^2X^2-8x^5yX|W|+2.5x^6|W|^2\} \ge 0
\end{aligned}
$$

及

$$
(7x^6+45x^2y^4)Y^2=(7x^6-2\sqrt{7.45}x^4y^2+45x^2y^4)Y^2+2\sqrt{7.45}x^4y^2Y^2,
$$

再利用 $Y^2 \ge XZ, Z^2 \ge YW$ 及 $-XY \ge 0, -ZW \ge 0$, 即得引理 1 的证明, 总之由上面各段即得引理 1 是正确的.

引理 2. 我们有

$$
\begin{aligned}
G_{xx}=(x^2+y^2)^{-9/2}\Big\{&(-60x^3y^2+45xy^4)\left(\tfrac{1}{6}X\right) \\
&+(24x^4y-72x^2y^3+9y^5)\left(\tfrac{1}{2}Y\right) \\
&+(-6x^5+63x^3y^2-36xy^4)\left(\tfrac{1}{2}Z\right) \\
&+(-36x^4y+63x^2y^3-6y^5)\left(\tfrac{1}{6}W\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

证. 见 [1] 的 G_{uu}.

引理 3. 假定 m_i 中存在一个或一个以上使得 $m_i \ge t^\varepsilon n_i$. 这里 ε 是任一给定的正数, 而 $t \to \infty$, 则有

$$
Q(X,Y,Z,W) \ge 10^{-5}[x^6(Y^2+Z^2+W^2)].
$$

证. 由于

$$Z^2 - YW \cdot \frac{2}{3} = 4\{(n_1n_2m_3)^2 + (n_2n_3m_1)^2 + (n_1n_3m_2)^2\} \geq t^{\varepsilon}W^2, \quad (6)$$

在 $Q(X,Y,Z,W)$ 中关于 Z^2 的各项中都取个很小的系数，然后再利用 (6) 式，即

$$\begin{aligned} Q(X,Y,Z,W) \geq\ & (8x^4 + 6x^2y^2 + 3y^2)y^2X^2 + 3(4x^6 + 4x^4y^2 \\ & +21x^2y^4 + 6y^6)Y^2 + (3 - 10^{-10})(6x^6 + 21x^4y^2 + 4x^2y^4 + 4y^6)Z^2 \\ & +\{(3 + 10^{-10}t^{\varepsilon})x^6 + (6 + 10^{-10}t^{\varepsilon})x^4y^2 + (8 + 10^{-10}t^{\varepsilon})x^2y^4 \\ & +10^{-10}t^{\varepsilon}y^6\}W^2 - 2xy(8x^4 - 4x^2y^2 + 3y^4)XY - 2xy(3x^4 - 4x^2y^2 \\ & +8y^4)ZW - 2(2x^6 + 20x^4y^2 + 9x^2y^4 + 6y^6)XZ \\ & -\left\{\left(12 - \frac{12}{3} \cdot 10^{-10}\right)x^6 + \left(18 - \frac{42}{3} \cdot 10^{-10}\right)x^4y^2\right. \\ & \left. + \left(40 - \frac{8}{3} \cdot 10^{-10}\right)x^2y^4 + \left(4 - \frac{8}{3} \cdot 10^{-10}\right)y^6\right\}YW \\ & +2(4x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4)xyXW - 90x^3y^3YZ. \end{aligned}$$

然后再利用 $t^{\varepsilon} \to \infty$ 很容易将含有 $-ZW, -YW$ 及 XW 的各项消去，最后再利用

$$(8x^4 - 4x^2y^2 + 3y^4)(yX - xY)^2 \geq 0,$$

$$10x^2y^4X^2 + 17x^6Z^2 - 26x^4y^2XZ \geq 0,$$

$$45x^2y^2(yY - xZ)^2 \geq 0 \quad 及 \quad Y^2 \geq XZ,$$

即证得引理 3 成立.

§3.

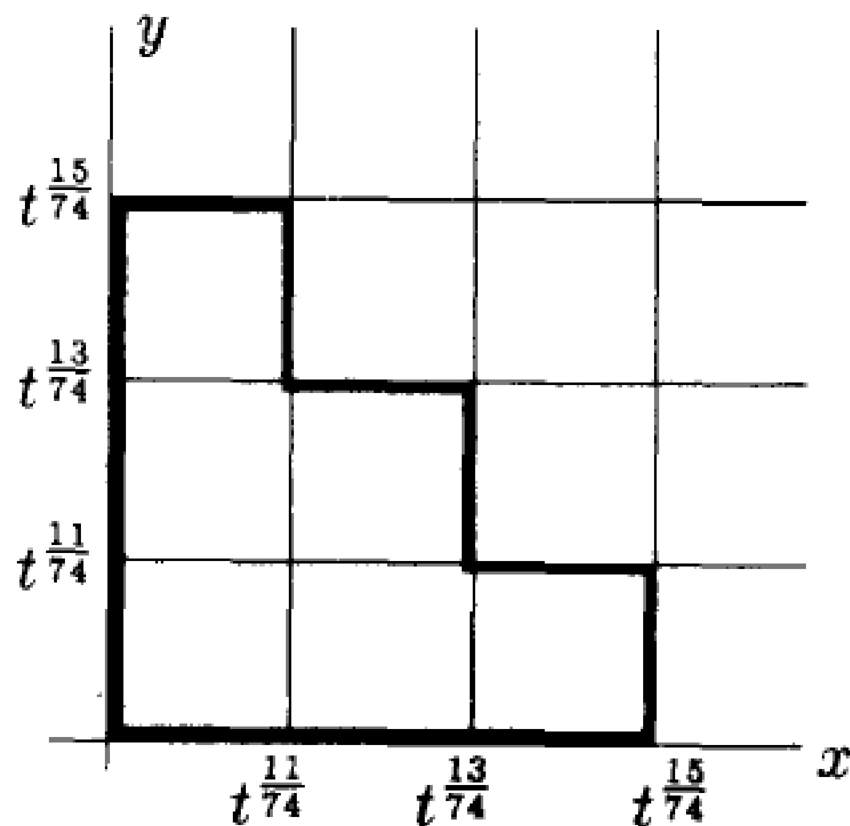
我们知道 [1]

$$\int_0^t \{R(n) - \pi n\}dn = \frac{t}{\pi}\sum_{v=1}^{\infty} \frac{r(v)}{v} J_2\{2\pi\sqrt{vt}\}.$$

这里 $r(v)$ 是方程式

$$m^2 + n^2 = v$$

的解答的数目. 显然的，我们有



$$\int_0^t \{R(n)-\pi n\}dn = \frac{4t}{\pi}\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{J_2\{2\pi\sqrt{(x^2+y^2)t}\}}{x^2+y^2}$$

令 C 表示图形中用粗线所围成的区域，而以 C' 表示第一象限中余下的区域，如果我们取 $0<\alpha<1$ (实际上我们以后取 $\alpha=\frac{12}{37}$), 就能够导出

$$\int_t^{t\pm t^\alpha}\{R(n)-\pi n\}dn = 4\int_t^{t\pm t^\alpha}\sum_C\sum\frac{\sqrt{n}J_1\{2\pi\sqrt{(x^2+y^2)n}\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}dn$$
$$+\frac{4}{\pi}\left\{\sum_{C'}\sum\frac{nJ_2\{2\pi\sqrt{(x^2+y^2)n}\}}{x^2+y^2}\right\}_t^{t\pm t^\alpha}$$
$$=\sum\nolimits_1+\left\{\sum\nolimits_2\right\}_t^{t\pm t^\alpha}$$

这里我们有

$$J_1\{2\pi\sqrt{vn}\}=\frac{\sin\{2\pi\sqrt{vn}-\frac{1}{4}\pi\}}{\pi(vn)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{(vn)^{3/4}}\right).$$

因此有

$$\sum\nolimits_1 = O\left\{\int_t^{t\pm t^\alpha}|\phi(n)|n^{\frac{1}{4}}dn\right\}+O\left(t^{\alpha+1/4}\right),$$

这里

$$\phi(n)=\sum_C\sum\frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)n}}}{(x^2+y^2)^{3/4}},\quad t-t^\alpha\le n\le t+t^\alpha.$$

相似地，我们有

$$\sum\nolimits_2 = O\{n^{3/4}|\psi(n)|\}+O(t^{1/4}),$$

这里

$$\psi(n)=\sum_{C'}\sum\frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)n}}}{(x^2+y^2)^{5/4}},\quad t-t^\alpha\le n\le t+t^\alpha.$$

如果 $x \le t^{11/74}$, 那么有

$$n^{\frac{1}{4}}\Bigg|\sum_{\substack{C\\ x\le t^{11/74}}}\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)n}}}{(x^2+y^2)^{3/4}}\Bigg| \le n^{\frac{1}{4}}\sum_{x\le t^{11/74}}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}$$

$$\le n^{\frac{1}{4}}\sum_{x\le t^{11/74}}\left(\sum_{y=1}^{x}\frac{1}{x^{3/2}}+\sum_{y=x+1}^{\infty}\frac{1}{y^{3/2}}\right)$$

$$=O\Bigg(n^{\frac{1}{4}}\sum_{x\le t^{11/74}}x^{-1/2}\Bigg)$$

$$=O(t^{1/4+11/148})$$

$$=O(t^{12/37}).$$

当 $y \le t^{\frac{11}{74}}$ 时，同样的结果也能够成立.

如果 $x \ge t^{15/74}$ 时，则有

$$n^{\frac{3}{4}}\Bigg|\sum_{\substack{C'\\ x\ge t^{15/74}}}\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)n}}}{(x^2+y^2)^{5/4}}\Bigg| \le n^{\frac{3}{4}}\sum_{x\ge t^{15/74}}O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)=O(t^{3/4-15/148})$$

$$=O(t^{2\cdot 12/37})=O(t^{24/37}).$$

当 $y \ge t^{15/74}$ 时，同样的结果也能够成立.

令 D 表示正方形 $t^{11/74} \le x, y \le t^{15/74}$ 和 C 的共同部分，而以 D' 表示这个正方形的其余部分，则有

$$n^{\frac{1}{4}}|\phi(n)| = n^{\frac{1}{4}}\Bigg|\sum_{D}\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)n}}}{(x^2+y^2)^{3/4}}\Bigg| + O(t^{12/37})$$

和

$$n^{\frac{3}{4}}|\psi(n)| = n^{\frac{3}{4}}\Bigg|\sum_{D'}\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)n}}}{(x^2+y^2)^{5/4}}\Bigg| + O(t^{24/37}).$$

§4.

现在我们来考虑这种形式

$$S=\sum_{x=N}^{2N}\sum_{y=M}^{2M}e^{2\pi i f(x,y)}$$

的和式，这里 $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)t}$. 这个和式 S 可分为二个部分和，即

$$S=\sum_{\substack{x=N\\x\ge y}}^{2N}\sum_{y=M}^{2M}e^{2\pi if(x,y)}+\sum_{\substack{x=N\\x<y}}^{2N}\sum_{y=M}^{2M}e^{2\pi if(x,y)}.$$

如果说 $2M\le N$, 则上面的第二个和式就不存在；如果说 $2N<M$, 则上面的第一个和式就不存在. 这里我们再假定 $\max(M,N)=L$, 估计第二个和式的方法和估计第一个和式的方法完全相同，只不过将 m_i 与 n_i 互调而 $n_i\ge 0$, 所以说我们只对第一和式进行估值. 现在我们考虑的 L 一定满足条件

$$t^{11/74}\le L\le t^{15/74},$$

当 $L\ge t^{2/11-2.5\varepsilon}$ 时，由 [1] 的 (23) 式，我们有

$$S=O\left\{L^{7/4}t^{1/32}\left(\log\frac{1}{2}\right)^{1/8}\right\}.$$

我们现在来考虑当 $t^{11/74}\le L\le t^{2/11-2.5\varepsilon}$ 时的 S 的估值，应用 [1] 的引理 2 三次，我们就得到

$$\begin{aligned}S&=O(L^2\rho^{-\frac12})+O\left[L\rho^{-\frac12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{m_1=1}^{\rho^{\frac12}-1}\sum_{n_1=0}^{\rho^{\frac12}-1}|S_1^{(i)}|\right)^{\frac12}\right]\\&=O(L^2\rho^{-\frac12})+O\left[L^{\frac32}\rho^{-1}\sum_{i=1}^{4}\left\{\sum_{m_1=1}^{\rho^{\frac12}-1}\sum_{n_1=0}^{\rho^{\frac12}-1}\left(\sum_{m_2=1}^{\rho-1}\sum_{n_2=0}^{\rho-1}|S_2^{(i)}|\right)^{\frac12}\right\}^{\frac12}\right]\\&=O(L^2\rho^{-\frac12})\\&\quad+O\left[L^{\frac74}\rho^{-\frac32}\sum_{i=1}^{8}\left\{\sum_{m_1=1}^{\rho^{\frac12}-1}\sum_{n_1=0}^{\rho^{\frac12}-1}\left[\sum_{m_2=1}^{\rho-1}\sum_{n_2=0}^{\rho-1}\left(\sum_{m_3=1}^{\rho^2-1}\sum_{n_3=0}^{\rho^2-1}|S_3^{(i)}|\right)^{\frac12}\right]^{\frac12}\right\}^{\frac12}\right],\end{aligned}$$

这里

$$S_3^1=S_3=\sum\sum e^{2\pi i\psi(x,y)},\quad \psi(x,y)=\sqrt{t}\,\triangle\,\{\sqrt{x^2+y^2}\},$$
$$\rho=t^{-1/15-\epsilon}L^{8/15}.$$

而 $S_3^{(i)}$ 只不过将 n_1,n_2,n_3 有时可能改成为负号，而 m_1,m_2,m_3 恒为正，在下一节我们将证明 $|S_3^{(i)}|\ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1}$. 而当 $W=0$ 时，由 [1] 有

$|S_3^{(i)}| \ll L^{-2}\rho^7 t^{1/2}[X^2+Y^2+Z^2]^{-1/2}$, 所以说当 $L \le t^{2/11-2.5\varepsilon}$ 时，我们有

$$\begin{aligned} S &= O(L^2\rho^{-1/2}) + O[L^{7/4}(L^{-2}t^{1/2}\rho^{3.5})^{1/8}] \\ &= O[L^2(L^{8/15}t^{-1/15-\varepsilon})^{-1/2}] + O(t^{1/16}L^{3/2}\rho^{3.5/8}) \\ &= O(L^{26/15}t^{1/30+\varepsilon/2}). \end{aligned} \tag{7}$$

§5.

考虑和式

$$S = \sum_{M \le y \le 2M} \sum_{N \le x \le 2N} e^{2\pi i \psi(x,y)},$$

我们将和式 S 分成为二个部分和即

$$S = \sum_{M \le y \le 2M} \sum_{\substack{N \le x \le 2N \\ x \ge y}} e^{2\pi i \psi(x,y)} + \sum_{M \le y \le 2M} \sum_{\substack{N \le x \le 2N \\ x < y}} e^{2\pi i \psi(x,y)}.$$

估计第二个和式的方法和估计第一个和式的方法完全是相同的，所以说我们只对第一个和式进行估值，这里我们又假定 $L \le t^{2/11-2.5\varepsilon}$. 将区域 $D(N \le x \le 2N, M \le y \le 2M, x \ge y)$ 分成为二个子区域，所有的满足下面三个条件

$$|yX - xY| \le \alpha xY, \quad |yY - xZ| \le \beta xZ, \quad |yZ - xW| \le \gamma xW$$

的 D 中的点 (x,y) 都属于第一个子区域 D_1, 不属于第一个子区域的 D 中的点都属于第二个子区域，这里 α, β, γ 是和 x, y 无关的很小的数，由于在第二个子区域中存在有 $Q(X,Y,Z,W)t \gg L^6W^2t$, 并且这里可假定 $W \ne 0$, 否则由 [1] 已知有 $Q(X,Y,Z,W)t \gg L^6(X^2+Y^2+Z^2+W^2)t$, 所以说可用 [2] 中的引理 ε 和引理 ζ 和使用完全相同于 [1] 中的方法进行估值，并且可得到我们所要证明的结果，所以说我们只需对属于第一个子区域中的 S 的部分和进行估值，由于第一个子区域 D_1 中的点都必须满足上述的三个条件而 α, β, γ 又是充分小的固定的正常数，所以说很容易推出 Y, Z, W 都是正的，并且由引理 2 可得到关于 $\psi_{xx}(x,y)$ 有估值

$$L^{-4}Wt^{1/2} \ll |\psi_{xx}| \ll L^{-4}(X+Y+Z+W)t^{1/2}.$$

我们用和式 S_1 表示和式 S 中对应于第一个子区域 D_1 中的部分和，现在我们来处理 S_1. 由于有

$$L^{-4}Wt^{1/2} \ll |\psi_{xx}| \ll L^{-4}(X+Y+Z+W)t^{1/2},$$
$$|\psi_{xxx}| \ll t^{1/2}L^{-5}(X+Y+Z+W).$$

又将区域 D_1 分成为不多于 $O((\log t))^2$ 个子区域，使得在每一个子区域中恒有

$$\frac{1}{R} \ll |\psi_{xx}| \ll \frac{1}{R},$$

这里有

$$t^{-1/2}L^4(X+Y+Z+W)^{-1} \ll R \ll t^{-1/2}L^4W^{-1},$$

设 D_{11} 为其中的任一个子区域，我们将子区域 D_{11} 再分成为二个子区域，凡是满足条件

$$|yZ-xW| \ll L^{1-\alpha}W$$

的 D_{11} 中的点 (x,y) 都属于第一个子区域 D_{111}, 不属于 D_{111} 的 D_{11} 中的点都属于 D_{112}. 我们用记号 S_{11} 表示和式 S_1 中对应于子区域 D_{111} 的部分和，这里我们取 $L^\alpha = L^{1/2}W^{1/2}\rho^{-3.5/2}R^{-1/4}, \rho = t^{-1/15-\varepsilon}L^{8/15}$. 又用记号 S_{12} 表示和式 S_1 中对应于子区域 D_{112} 中的部分和，关于 S_{11} 我们可以使用普通的方法进行估值，即设 $L^{1-\alpha}\psi_{xx} \gg 1$ 时，可以使用 [3] 中的引理 7, 而得到

$$\begin{aligned} S_{11} &\ll L\cdot L^{1-\alpha}\psi_{xx}^{\frac{1}{2}} \ll L^{2-1/2}W^{-1/2}\rho^{3.5/2}(\rho^{3.5}L^{-4}t^{1/2})^{1/4} \\ &\ll L^{1/2}W^{-1/2}\rho^{10.5/4}t^{1/8}. \end{aligned}$$

而当 $L^{1-\alpha}\psi_{xx} \ll 1$ 时，则有

$$S_{11} \ll L\cdot\psi_{xx}^{-\frac{1}{2}} \ll L(L^{-4}Wt^{1/2})^{-1/2} \ll L^3W^{-1/2}t^{1/4}.$$

现在我们对于 S_{12} 进行估值. 这里有

$$S_{12} = \sum_y \sum_{C_1(y)\le x\le C_2(y)} e^{2\pi i\psi(x,y)},$$

这里的 $C_1(y)$ 和 $C_2(y)$ 都是 y 的一次函数，也就是说 $C_1(y) = \alpha_1 y + \beta_1, C_2(y) = \alpha_2 y + \beta_2$ 又有 $y \le C_1(y), C_2(y) \le 2L$. 又在区间 $C_1(y) \le$

$x \leq C_2(y)$ 中的数 x 都一定满足 $|yZ - xW| \gg L^{1-\alpha}W$. 利用 [3] 中的引理 6, 我们得到

$$S_{12} = S_{12\mathrm{I}} + S_{12\mathrm{II}} + S_{12\mathrm{III}},$$

这里

$$\begin{aligned} S_{12\mathrm{I}} &= e^{\frac{\pi}{4}i} \sum_y \sum_{v_1(y) \leq v \leq v_2(y)} \frac{e^{2\pi i \eta(y)}}{\sqrt{\psi_{xx}(n_v(y), y)}} \\ &= e^{\frac{\pi}{4}i} \sum_y \sum_{v_1(y) \leq v \leq v_2(y)} \frac{e^{2\pi i \psi(n_v(y), y) - v n_v(y)}}{\sqrt{\psi_{xx}(n_v(y), y)}}, \end{aligned}$$

$$S_{12\mathrm{II}} \ll \sum_y (L+R)L^{-1} \ll L + R,$$

$$S_{12\mathrm{III}} \ll \sum_y \sqrt{R} \ll LR^{1/2},$$

$$v_1(y) = \psi_x(C_2(y), y), \quad v_2(y) = \psi_x(C_1(y), y).$$

又在这里我们用到 $\psi_{xx} \leq 0$. 交换和号的次序，对于一个固定的 v 而 y 只经过正整数，它使得 $v_1(y) \leq v$, 同时又使得 $v_2(y) \geq v$. 由于 $v_1(y) = v$ 或 $v_2(y) = v$ 的 y 的解的数目都不超过有限个，又由于 $v_1(y)$ 和 $v_2(y)$ 都是 y 的连续函数，所以说可假定同时满足条件 $v_1(y) \leq v$ 及 $v_2(y) \geq v$ 的 y 的解只经过不多于有限段的连续正整数，而每段的的长度当然是不超过 L, 现在考虑其中的任一段，对于这些 y 我们考虑

$$\sum_y e^{2\pi i \eta(y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\psi_{xx}(n_v(y), y)}},$$

其中

$$\eta(y) = \psi(n_v(y), y) - v n_v(y), \quad \eta'(y) = \psi_y(n_v(y), y),$$

$$\eta''(y) = (\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2)\psi_{xx}^{-1} = H(n_v(y), y)\psi_{xx}^{-1}(n_v(y), y).$$

对于固定的 v 而言，$n_v(y)$ 仍指满足方程 $\psi_x(x, y) = v$ 的 x 的解, 对于一个给定的 y, 它必须满足 $v_1(y) \leq v \leq v_2(y)$. 当 $v = v_2(y) = \psi_x(C_1(y), y)$ 时, 有 $n_v(y) = C_1(y)$, 当 $v = \psi_x(x, y) \leq v_2(y) = \psi_x(C_1(y), y)$ 时，有 $n_v(y) \geq C_1(y)$, 这里用到 $\psi_{xx} \leq 0$. 同样的当 $v \geq v_1(y)$ 时，则有 $n_v(y) \leq C_2(y)$. 故有

$$C_1(y) \leq n_v(y) \leq C_2(y).$$

即有

$$|yZ - n_v(y)W| \gg L^{1-\alpha}W.$$

故由引理 1 和引理 3 我们有

$$H(n_v(y), y) \gg L^{-8}W^2tL^{-2\alpha},$$

这里我们用到

$$\begin{aligned} L^{-2\alpha} &= L^{-1}W^{-1}\rho^{3.5}R^{1/2} \gg L^{-1}W^{-1}\rho^{3.5}(t^{1/2}\rho^{3.5}L^{-4})^{-1/2} \\ &\gg L\rho^{3.5/2}t^{-1/4}W^{-1} \gg L\rho^{-3.5/2}t^{-1/4} \gg (\rho^2/L)t^{2.5\varepsilon}. \end{aligned}$$

最后一式是因为

$$\rho^{3.75} = (t^{-1/15-\varepsilon}L^{8/15})^{3.75} \ll t^{-1/4}L^2t^{-3\varepsilon}$$

及

$$W^2 \gg t^{-2\varepsilon}(X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2). \quad \text{(否则由引理 3 即得我们的结果.)}$$

显然我们有

$$H(n_v(y), y) \ll L^{-8}t(X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2).$$

于是由 [3] 的引理 7 可得

$$\begin{aligned} \sum_y \frac{e^{2\pi i\eta(y)}}{\sqrt{\psi_{xx}(n_v(y), y)}} &\ll L(H\psi_{xx}^{-1})^{1/2}\psi_{xx}^{-\frac{1}{2}} + (H\psi_{xx}^{-1})^{-1/2}\psi_{xx}^{-\frac{1}{2}} \\ &\ll L(L^{-8}\rho^7t)^{1/2}R + (L^{-8-2\alpha}W^2t)^{-1/2}, \end{aligned}$$

又 v 的个数不超过 $L(|\psi_{xx}| + |\psi_{xy}|) \ll L^{-3}\rho^{3.5}t^{1/2}$, 所以我们得到

$$\begin{aligned} S_{11\mathrm{I}} &\ll (L(L^{-8}\rho^7t)^{1/2})L^{-3}\rho^{3.5}t^{1/2}(L^{-4}Wt^{1/2})^{-1} \\ &\quad + (L^{-8-2\alpha}W^2t)^{-1/2}L^{-3}\rho^{3.5}t^{1/2} \\ &\ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1} + L^{1+\alpha}W^{-1}\rho^{3.5} \\ &\ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1} + L^{3/2}W^{-1/2}\rho^{3.5/2}(t^{1/2}\rho^{3.5}L^{-4})^{1/4} \\ &\ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1} + t^{1/8}L^{1/2}W^{-1/2}\rho^{10.5/4} \\ &\ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1}, \end{aligned}$$

这是因为

$$L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1} \gg t^{1/8}L^{1/2}W^{-1/2}\rho^{10.5/4},\ L^{-5/2}t^{3/8}W^{-1/2}\rho^{7-10.5/4} \gg 1.$$
$$L^{-5/2}t^{3/8}\rho^{(28-10.5-7)/4} = L^{-5/2}t^{3/8}\rho^{10.5/4} \gg 1,$$
$$(t^{-1/15-\varepsilon}L^{8/15})^{10.5/4}t^{3/8}L^{-5/2} \gg 1.$$
$$t^{(45-21)/120-10.5/4\varepsilon} \gg L^{(300-168)/120}, \quad \text{即当} \quad L \le t^{2/11-2.5\varepsilon}.$$

又我们有

$$S_{12\mathrm{II}} \ll L + R \ll L + L^4W^{-1}t^{-1/2} \ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1},$$
$$S_{12\mathrm{III}} \ll L\sqrt{R} \ll L(L^{-4}Wt^{1/2})^{-1/2} \ll L^3W^{-1/2}t^{-1/4}$$
$$\ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1}.$$

这是因为 $L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1} \gg L$, 则 $\rho^7t^{1/2} \gg L^3W$, $\rho^{3.5}t^{1/2} \gg L^3$,

$$(t^{-1/15-\varepsilon}L^{8/15})^{3.5}t^{1/2} = t^{(15-7)/30}L^{28/15}t^{-3.5\varepsilon} \gg L^3, \quad t^{8/30-3.5\varepsilon} \gg L^{17/15}.$$

故当 $L \ll t^{8/34-5\varepsilon}$ 时，上列各式一定成立

又 $L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1} \gg L^4W^{-1}t^{-1/2}$, 则有 $\rho^7t \gg L^6$, $t(t^{-1/15-\varepsilon}L^{8/15})^7 \gg L^6$, $t^{8/15-7\varepsilon} \gg L^{(90-56)/15} = L^{34/15}$. 故当 $L \le t^{8/34-7\varepsilon}$ 时，上列各式一定成立.

又 $L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1} \gg L^3W^{-1/2}t^{-1/4}$, 则有 $(t^{-\frac{1}{15}-\varepsilon}L^{\frac{8}{15}})^{\frac{14-3.5}{2}}t^{\frac{3}{4}} \gg L^5$, $t^{\frac{45-21}{60}-\frac{10.5}{2}\varepsilon}L^{\frac{84}{30}} \gg L^5$, $t^{\frac{24}{60}-\frac{10.5}{2}\varepsilon} \gg L^{\frac{300-168}{60}}$, 即当 $L \ll t^{\frac{2}{11}-2.5\varepsilon}$ 时，上面的各式都能成立，总之我们得到当 $L \ll t^{\frac{2}{11}-2.5\varepsilon}$, $W \ne 0$ 时，有

$$S \ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}W^{-1},$$

而当 $W = 0$ 时，由 [1] 的方法已知有

$$S \ll L^{-2}\rho^7t^{1/2}[X^2+Y^2+Z^2]^{-1/2}.$$

§6.

我们的结果的证明：由 (7) 式及 [1] 中的引理 1, 我们得到当 $\max(x, y) \le$

$t^{2/11-2.5\varepsilon}$ 时，有

$$\sum_R\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)t}}}{(x^2+y^2)^{3/4}} = O(L^{26/15-3/2}t^{1/30+\varepsilon/2}) = O(L^{7/30}t^{1/30+\varepsilon/2}).$$

和

$$\sum_R\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)t}}}{(x^2+y^2)^{5/4}} = O(L^{26/15-5/2}t^{1/30+\varepsilon/2}) = O(L^{-23/30}t^{1/30+\varepsilon/2}).$$

又当 $\max(x,y) \ge t^{2/11-2.5\varepsilon}$ 时，由 [1] 的 (25) 式有

$$\sum_R\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)t}}}{(x^2+y^2)^{5/4}} = O(L^{-3/4}t^{1/32+\varepsilon}).$$

现在我们将和式分为部分和，即

$$\sum_D\sum \frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)t}}}{(x^2+y^2)^{3/4}} = \sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\left\{\sum_{2^{p-1}}^{2^p}\sum_{2^{q-1}}^{2^q}\frac{e^{2\pi i\sqrt{(x^2+y^2)t}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}\right\}.$$

由图形我们有

$$\begin{aligned} n^{1/4}|\phi(n)| &= O\left(t^{\frac{1}{4}}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\{\max(2^p,2^q)\}^{7/30}t^{1/30+\varepsilon/2}\right) + O(t^{12/37}) \\ &= O(t^{1/4+(13/74)\cdot(7/30)+1/30+\varepsilon/2}) + O(t^{12/37}) \\ &= O(t^{12/37+\varepsilon}). \end{aligned}$$

相似地由图形我们有

$$n^{3/4}|\psi(n)| = O\left[t^{\frac{3}{4}}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\{\max(2^p,2^q)\}^{-23/30}t^{1/30+\varepsilon}\right.$$

这里 $\max(2^p,2^q) \le t^{2/11-2.5\varepsilon}$

$$\left. +t^{\frac{3}{4}}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\left\{\begin{matrix}\max(2^p,2^q) \\ \max(2^p,2^q) \ge t^{2/11-2.5\varepsilon}\end{matrix}\right\}^{-3/4} t^{1/32+\varepsilon} + t^{12/37+1/4}\right]$$

$$\begin{aligned} &= O(t^{3/4-(13/74)\cdot(23/30)+1/30+\varepsilon/2}) \\ &\quad +O(t^{3/4-(2/11)\cdot(3/4)+1/32}) + O(t^{12/37+1/4}) \\ &= O(t^{24/37+\varepsilon}), \end{aligned}$$

因此我们有

$$\int_{t}^{t\pm t^{12/37}}\{R(n)-\pi n\}dn=O(t^{24/37+\varepsilon}).$$

由此用普通的方法我们得到

$$R(t)=\pi t+O(t^{12/37+\varepsilon}).$$

附注. 我们非常感谢尹文霖先生在 1962 年 10 月对本文进行了详细的验算，并提了一些意见. 在 1963 年 1 月，我们收到了尹文霖先生的信，信中说他得到了另外一种可以证明同样结果的方法.

参考文献

[1] Hua Loo Keng. The lattice-points in a circle. *The Quar. Jour. of Math.* , 1942, **XIII**: 18 ~ 30

[2] Titchmarsh E C. The lattice-points in a circle. *Proc. London Math. Soc.*, 1935, **38**(2): 96 ~ 115

[3] 尹文霖. 狄氏除数问题. 北京大学学报， 1959, **5**(2): 103 ~ 127

[4] Yin Wenlin. The lattice-points in a circle. *Scientia Sinica*, 1962, **11**(1): 10 ~ 15

关于三维区域内整点个数渐近公式的改进 (II)*†

众所周知，高斯研究了和式 $\sum_{t=1}^{n} h(-t)$ 的渐近状态，其中 $h(-t)$ 表示具有负判别式 $-t$ 的正定二次型的类数. 估计这一问题的余项由维诺格拉多夫着手研究. 在 [1] 中他给出了余项的阶： $n^{11/16+\epsilon}$. 在 [2] 中他改进到 $n^{19/28+\epsilon}$, 其中 ϵ 为一任意小正数. 关于这一问题已经发表的最好的余项估计是我们得到的. 在 [3] 中我们给出它的阶为 $n^{35/52+\epsilon}$. 现在我们给出它的阶为 $n^{2/3+\epsilon}$.

用类似的方法可以得到，球 $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ 内整点个数渐近公式的余项的阶为 $a^{4/3+\epsilon}$.

下面的引理对得到我们的结果是有用的，其证明见 [4].

引理 1 设 $H>0, U^2 \gg A \gg 1, 0<r-q \le U$. 设 $f(x), \varphi(x)$ 是两个实函数，且在区间 $q \le x \le r$ 上有 $A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \varphi(x) \ll H$. 假定区间 (q,r) 可以分成有限个子区间，使 $\varphi(x)$ 在每一个子区间上单调，则

$$\sum_{q<x\le r} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} \ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln(U+1)\right).$$

引理 2 设 $H>0, U^2 \gg A \gg 1, 0<r-q \ll U^2$, $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是两个代数函数，其阶不超过某一常数，且在区间 $q<x\le r$ 上我们有

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad f'''(x) \ll \frac{1}{AU},$$

$$H \ll \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

则

$$\sum_{q<x\le r} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(q)\le k\le f'(r)} Z_k + O(HT + H\ln(U+1)),$$

其中

$$Z_k = b_k \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{f''(x_k)}} e^{2\pi i(-kx_k + f(x_k))},$$

* 1963 年 2 月 13 日收到.

† 原载 *Sci. Sin.*, **12**(1963), pp. 751–764.

x_k 由关系式 $f'(x_k)=k$ 定义， $b_k=1$ （当 $k\neq f'(q)$ 且 $k\neq f'(r)$ 时), 或 $b_k=0.5$ （当 $k=f'(q)$ 或 $k=f'(r)$ 时). 此外， T 满足 $T\ll\sqrt{A}$, 且有 $T\ll\max(\frac{1}{(f'(q))},\frac{1}{(f'(r))})$.

众所周知，主要问题是估计下述表达式

$$B=\sum_{m=1}^{\infty}C_mW_m,$$

其中

$$W_m=\sum_{x>\sqrt{n}+1}^{\le\sqrt{4n/3}}W_{m,x};\quad W_{m,x}=\sum_{y>-\sqrt{x^2-n}}^{\le\sqrt{x^2-n}}e^{2\pi im\frac{n+y^2}{x}}.$$

C_m 只依赖于 m, 且 $C_m\ll Z_m$, 这里

$$Z_m=\begin{cases}\frac{1}{m}, & m\le\frac{1}{\Delta}\\ \frac{1}{\Delta^s m^{s+1}}, & m>\frac{1}{\Delta},\end{cases}\qquad \Delta=n^{-1/3},\ s\text{是一充分大正整数}.$$

由文 [1] 知道，对于 $m\le\sqrt{n}$ 有

$$W_m\ll m\sqrt{n}+\sqrt{n}(\log n)^2$$

成立.

对于 $M>\sqrt{n}$, 我们有平凡不等式 $W_m\ll\sqrt{n}$. 于是我们得到:

$$\sum_{m>0}^{\le n^{1/5}}C_mW_m\ll\sum_{m>0}^{\le n^{1/5}}\frac{m\sqrt{n}+\sqrt{n}(\log n)^2}{m}\ll n^{2/3+\epsilon},$$

$$\sum_{m>n^{2/3+\epsilon_1}}^{\le n^{1/2}}C_mW_m\ll\sum_{m>n^{1/3+\epsilon_1}}^{\le n^{1/2}}\frac{m\sqrt{n}}{\Delta^s m^{s+1}}\ll n^{2/3+\epsilon},$$

$$\sum_{m>n^{1/2}}C_mW_m\ll\sum_{m>n^{1/2}}\frac{n}{\Delta^s m^{s+1}}\ll n^{2/3+\epsilon},$$

其中 $\epsilon_1=\frac{1}{6(s-1)}\le\frac{\epsilon}{8}$. 于是

$$B=B_0+O(n^{2/3+\epsilon}),$$

$$B_0=\sum_{m>n^{1/6}}^{\le n^{1/3+\epsilon_1}}C_m\sum_{\mu>-m}^{\le m}\sum_{v>(\mu^2+3m^2)/4m}^{\le m}\frac{2im\sqrt{n}}{4mv-\mu^2}e^{2\pi i\sqrt{n(4mv-\mu^2)}}.$$

和式 B_0 可以分为 $\ll \log n$ 个和式 U_m:

$$U_m = \sum_{m>M_0}^{\le M} C_m \sum_u \sum_v \frac{2im\sqrt{n}}{4mv-\mu^2} e^{2\pi i\sqrt{n(4mv-\mu^2)}}.$$

其中 M_0, M 是整数，且

$$n^{1/6} \le M_0 < M \le n^{1/3+\epsilon_1},\ M \le \sqrt{\frac{3}{2}} M_0.$$

由 [2] 我们知道

$$U_M \ll M n^{1/2+\epsilon} Z_M \max|\Omega|,$$

$$\Omega = \sum_{z>2M^2}^{\le 4M^2} \left| \sum_{\mu>-M}^{\le M} \frac{e^{2\pi i(\alpha\mu^2+\sqrt{n(z-\mu^2)})}}{z-\mu^2} \right|,$$

这里 $0<\alpha<1$. 重复 [2] 的过程可以得到，当 $n^{1/6} \ll M \ll n^{1/4}$ 时,

$$U_M \ll n^{1/2+\epsilon/2}(M^{1/3}n^{1/12} + M^{2/3}n^{-1/12}) \ll n^{2/3+\epsilon},$$

因此剩下的问题就是对 $n^{1/4} \ll M \ll n^{1/3+\epsilon_1}$ 的情形来估计和式 U_M. Ω 的相对于 $\mu=0$ 的部分是 $O(1)$, 于是

$$\Omega \ll 1 + \sum_{2M^2<x\le 4M^2} \left| \sum_{\mu>0}^{\le M} \frac{e^{2\pi i(\alpha\mu^2+\sqrt{n(x-\mu^2)})}}{z-\mu^2} \right|.$$

显然有

$$\Omega^2 \ll 1 + \sum_{0<\mu\le M} \sum_{\substack{0<\mu_1\le M \\ \mu_1\ge\mu}} \left| \sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu^2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right|,$$

其中

$$\varphi(z) = \frac{M^2}{z(z-t)}, \quad f(z) = f(z,t) = \sqrt{n}(\sqrt{z} - \sqrt{z-t}),$$

$$t = \mu_1^2 - \mu^2.$$

我们有

$$\sum_{0<\mu\le M} \sum_{\substack{0<\mu_1\le M \\ \mu_1\ge\mu}} \left| \sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu^2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right| \le G + G' + G'' + G''',$$

其中

$$G=\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ \mu_1\ge\mu}}\sum_{\substack{0<\mu_1\le M\\ 0\le t\le M^{11/6}}}|S|,\qquad G'=\sum_{0<\mu\le M}\sum_{\substack{0<\mu_1\le M\\ M^{11/6}<t\le M^2}}|S'|$$

$$G''=\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ M^{11/6}<t\le M^2}}\sum_{0<\mu_1\le M}|S''|,\qquad G'''=\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ M^{11/6}<t\le M^2}}\sum_{0<\mu_1\le M}|S'''|,$$

$$S=\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)},\quad S'=\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 2M^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)},$$

$$S''=\sum_{z>2M^2}^{\le 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)},\qquad S'''=\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\le 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}.$$

现在我们来估计和式

$$\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ 0\le t\le M^{11/6}}}\sum_{0<\mu_1\le M}\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|.$$

由于 $t^2=\mu_1^2-\mu^2=0$ 的解数是 M, 且 $t=\mu_1^2-\mu^2$ 对于给定 $t(1\le t\le M^{11/6})$ 的解数 $\ll n^{\epsilon/8}$, 根据引理 1 $(H=M^{-2},U=2M^2,A=n^{-1/2}M^5t^{-1})$, 和式

$$\sum_{\mu}\sum_{\substack{\mu_1\\ 0\le t\le M^{11/6}}}\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|$$

与 $t=0$ 对应的部分 $\ll M$, 和式

$$\sum_{\mu}\sum_{\substack{\mu_1\\ 0\le t\le M^{11/6}}}\left|\sum_{z>2M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu^2}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|$$

与 $1\le t\le M^{11/6}$ 对应的部分为

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le t\le M^{11/6}}(n^{1/4}M^{-5/2}t^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}t^{-1/2})n^{\epsilon/8}\\ &\ll n^{1/4}M^{-5/2}(M^{11/6})^{3/2}n^{\epsilon/8}+n^{-1/4}M^{1/2}(M^{11/6})^{1/2}n^{\epsilon/8}\\ &\ll n^{1/4}M^{1/4}n^{\epsilon/8}+n^{-1/4}M^{17/12}n^{1/2}n^{\epsilon/8}.\end{aligned}$$

于是当 $n^{1/4} \le M \le n^{1/3+\epsilon}$ 时我们有 $G \le n^{1/3+\epsilon}$.

我们来估计和式

$$\sum_{\substack{0<\mu\le M \\ M^{11/6}<t\le M^2}} \sum_{0<\mu_1\le M} \left| \sum_{z>2M^2}^{\le 4M^2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right|.$$

对于给定的 t 值，由 $t=\mu_1^2-\mu^2 \ge M^{11/6}$ 的解数 $\ll n^{\epsilon/8}$, 我们得到

$$G'' \ll \sum_{t>M^{11/6}}^{\le M^2} n^{\epsilon/8} |S''|.$$

把上面的和式分为 $\ll \log n$ 个和式，每一个具有形式：

$$\sum_{t>\tau}^{\le \tau_1} |S''|, \quad \frac{3}{2}\tau \le \tau_1 \le 2\tau.$$

根据引理 2 $(H=M^{-2}, U=M^2, A=\frac{M^5}{\sqrt{n\tau}})$ 可得

$$\sum_{z>2M^2}^{\le 4M^2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} = \sum_{v>v_1}^{\le v_2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \phi(v,t) e^{2\pi i \psi(v,t)} + O(n^{-1/4} M^{1/2} \tau^{-1/2}),$$

其中

$$v_1 = v_1(t) = f'(2M^2,t), \quad v_2 = v_2(t) = f'(4M^2,t),$$

$$\phi(v,t) = \frac{M^2}{z_{v,t}(z_{v,t}-t)\sqrt{\{(z_{v,t}-t)^{-3/2} - z_{v,t}^{-3/2}\}\sqrt{n}/4}},$$

$$\psi(v,t) = \sqrt{n}(\sqrt{z_{v,t}} - \sqrt{z_{v,t}-t}) - v z_{v,t}.$$

$z_{v,t}$ 由关系式 $f'(z_{v,t}) = v$ 决定. 于是得到

$$\begin{aligned}\sum_{t>\tau}^{\le\tau_1} \left| \sum_{z>2M^2}^{\le 4M^2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right| &\ll \sum_{t>\tau}^{\le\tau_1} \left| \sum_{v>v_1}^{\le v_2} \phi(v,t) e^{2\pi i \psi(v,t)} \right| + \sum_{t>\tau}^{\le\tau_1} (n^{-1/4} M^{1/2} t^{-1/2}) \\ &\ll M \left(\sum_{t>\tau}^{\le\tau_1} \left| \sum_{v>v_1}^{\le v_2} \phi(v,t) e^{2\pi i \psi(v,t)} \right|^2 \right)^{1/2} + n^{-1/4} M^{3/2}.\end{aligned}$$

下面我们考虑和式

$$\sum_{t>\tau}^{\le\tau_1} \left| \sum_{v>v_1}^{\le v_2} \phi(v,t) e^{2\pi i \psi(v,t)} \right|^2.$$

设 $t=w_1(v)$ 和 $t=w_2(v)$ 分别是 $v_1=v_1(t)$ 和 $v_2=v_2(t)$ 的反函数；交换求和顺序得：

$$\sum_{t>\tau}^{\le\tau_1}\left|\sum_{v>v_1}^{\le v_2}\phi(v,t)e^{2\pi i\psi(v,t)}\right|^2=\sum_{t}\sum_{v_0}\sum_{v}\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}$$
$$\ll\sum_{v_0>v'}^{\le v''}\sum_{v>v'}^{\le v''}\left|\sum_{t>t'}^{\le t''}\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}\right|,$$

其中

$$\phi(t)=\phi(v_0,t)\phi(v,t),\quad \psi(t)=\psi(v_0,t)-\psi(v,t),$$
$$v'=v_1(\tau_1),\quad v''=v_2(\tau),$$
$$t'=\max(\tau,w_1(v_0),w_1(v)),\quad t''=\min(\tau_1,w_2(v_0),w_2(v)).$$

由于

$$\phi(t)\ll Mn^{-1/2}t^{-1},\quad t''-t'\ll M^2,$$

$$\begin{aligned}v''-v'&=v_2(\tau)-v_1(\tau_1)\\&=\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x,\tau)\right]_{x=4M^2}-\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x,\tau_1)\right]_{x=2M^2}\\&\ll M^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right)\right]_{x=\beta,t=\theta}\\&\quad+(\tau-\tau_1)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right)\right]_{x=\beta,t=\theta}\\&\ll n^{1/2}M^{-3}t(\ge 1),\end{aligned}$$

我们有

$$\sum_{v_0=v}\sum\left|\sum_{t>t'}^{\le t''}\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}\right|\ll n^{1/2}M^{-3}tMn^{-1/2}t^{-1}M^2\ll 1.$$

若 $v_0\ne v$, 利用 $w=v_0-v$, 由 [1] 知

$$\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2}=\frac{\frac{3}{2}\{z_{v',t}^{1/2}-(z_{v',t}-t)^{1/2}\}w}{[z_{v',t}^{3/2}-(z_{v',t}-t)^{3/2}]^2[(z_{v',t}-t)^{-3/2}-z_{v',t}^{-3/2}]}$$

因此

$$\frac{1}{A}\ll\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2}\ll\frac{1}{A},\quad A=\tau^2M^{-2}w^{-1}$$

成立. 由引理 1 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{v_0\neq 0}\sum\left|\sum_{t>t'}^{\le t''}\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}\right| \\
&\ll (v''-v')\sum_{w=1}^{\le v''-v'}(n^{-1/2}M^4t^{-2}w^{1/2}+n^{-1/2}w^{-1/2}) \\
&\ll n^{-1/2}M^4t^{-2}(n^{1/2}M^{-3}t)^{5/2}+n^{-1/2}(n^{1/2}M^{-3}t)^{3/2} \\
&\ll n^{3/4}M^{-7/2}t^{1/2}+n^{1/4}M^{-9/2}t^{3/2} \\
&\ll n^{3/4}M^{-5/2}+n^{1/4}M^{-3/2}, \quad 因为 t\le M^2.
\end{aligned}$$

于是, 当 $n^{1/4}\le M\le n^{1/3+\epsilon_1}$ 时

$$G''\ll n^{\epsilon/4}[n^{-1/4}M^{3/2}+(M^2+n^{3/4}M^{-1/2}+n^{1/4}M^{1/2})^{1/2}]\ll n^{1/3+\epsilon}.$$

现在我们来估计和式

$$\sum_{\substack{\mu \\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\sum_{\mu_1}\left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\le 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|.$$

取 $\epsilon'\le\frac{\epsilon}{8}$ 为一任意小正数, 且 $\frac{1}{\epsilon'}$ 为整数. 对于实数 $M^{\epsilon'}$, 用 $[M^{\epsilon'}]$ 表示 $M^{\epsilon'}$ 的整数部分. 若 $0<\mu\le M$, 则

$$\mu^2=i_1[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-1}+\cdots+i_m[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-m}+R(\mu^2).$$

其中 $i_1,\dots,i_m$ 是整数, 且满足

$$0\le i_1\le\frac{M^2}{[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-1}},\quad 0\le i_2,i_3,\dots,i_m\le[M^{\epsilon'}]-1,$$

与

$$0\le R(\mu^2)<[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-m}.$$

设 $\mu(m)=i_1[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-1}+\cdots+i_m[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-m}$. 如果 $\mu=\mu_1+\cdots+\mu_l$, 则定义 $\mu(m)=\mu_1+\cdots+\mu_l(m)$. 令 $\mu(0)=0$. 若 $\mu^2<[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-m}$, 则

$\mu(m)=0$. 我们有

$$\sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\sum \left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\le 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right| \le \sum_{\substack{\mu\ \ \mu_1\\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\sum \left\{\left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu([\frac{1}{4\epsilon'}])}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{z>4M^2-\mu([\frac{1}{4\epsilon'}])}^{\le 4M^2-\mu([\frac{1}{4\epsilon'}]-1)}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|+\cdots+\left|\sum_{z>4M^2-\mu(1)}^{\le 4M^2}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|\right\}$$

$$=\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\sum_{0<\mu_1\le M}\left|\sum_{z>4M^2-\mu^2}^{\le 4M^2-\mu([\frac{1}{4\epsilon'}])}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|+\sum_{i=1}^{[\frac{1}{4\epsilon'}]}S_i,$$

其中

$$S_i=\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\sum_{0<\mu_1\le M}\left|\sum_{z>4M^2-\mu(i)}^{\le 4M^2-\mu(i-1)}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|.$$

我们来估计和式 $S_i\,(i\ge 1)$. 设

$$D_{ijl}=4M^2-\min(M,j[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'-i+1}+[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'-i+1})(i)+l[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-i},$$

$$N=\frac{M}{[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'-i+1}},$$

$$S_{ij}=\sum_{\substack{\mu\\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\sum_{0<\mu_1\le M}\left|\sum_{z>4M^2-\mu(i)}^{\le 4M^2-\mu(i-1)}\varphi(z)e^{2\pi i f(z)}\right|,$$

这里

$$j[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'-i+1}<\mu\le\min(M,j[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'-i+1}+[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'-i+1}),\qquad (*)$$

则

$$S_i=\sum_{j\ge 0}^{\le N}S_{ij}.$$

我们来估计 S_{ij}. 对于属于 $(*)$ 式的每个 μ 和 μ^*, 有

$$|\mu-\mu^*|\le[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'-i+1}.$$

对于事先给定的小正数 ϵ', 取 M 为充分大的正数，则有 $M \le 2[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon'}$, 且

$$|\mu^2 - \mu^{*2}| \le |\mu + \mu^*||\mu - \mu^*| \le 4[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i + 1}.$$

由这一不等式及 $\mu(m)$ 的定义得：

$$|\mu(i) - \mu^*(i)| \le 5[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i + 1},$$

$$0 \le \mu(i) - \mu(i-1) \le [M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i + 1}.$$

我们知道， $[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i}$ 可以分为 $\mu(i)$, $\mu(i-1)$, $\mu^*(i)$ 及 $\mu^*(i-1)$, 因而 $[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i}$ 可以分为 $\mu(i) - \mu^*(i)$, $\mu(i) - \mu(i-1)$, $\mu(i) - \mu^*(i-1)$. 由于 $\mu(i)$ 是 i 的递增函数，故有

$$S_{ij} \le \sum_{l=0}^{6[M^{\epsilon'}]} S_{ijl}, \quad S_{ijl} = \sum_{\mu} \sum_{\substack{0<\mu_1 \le M \\ M^{11/6} < t \le M^2}} \left| \sum_{z > D_{ijl}}^{\le D_{ijl} + [M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i}} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right|,$$

这里

$$j[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon' - i + 1} \le \mu \le \min(M, j[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon' - i + 1} + [M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon' - i + 1}).$$

下面我们估计 S_{ijl}. 对于给定的 $t = \mu_1^2 - \mu^2 \ge M^{11/6}$, 由于 $\mu_1^2 - \mu^2 = t$ 的解数 $\ll n^{\epsilon/8}$, 故得：

$$S_{ijl} \ll n^{\frac{\epsilon}{8}} \sum_{M^{11/6} < t \le M^2}^{(i,j)} \left| \sum_{z > D_{ijl}}^{\le D_{ijl} + [M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i}} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right|,$$

其中符号 $\sum^{(i,j)}$ 表示 t 遍取满足条件 $t = \mu_1^2 - \mu^2$ 及

$$j[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon' - i + 1} \le \mu \le \min(M, j[M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon' - i + 1} + [M^{\epsilon'}]^{1/\epsilon' - i + 1}), \quad 0 < \mu_1 \le M$$

的数. 把上面最后的和式分成 $\ll \log n$ 个和，每个和形如

$$\sum_{t > \tau}^{\le \tau_1 (i,j)} \left| \sum_{z > D_{ijl}}^{\le D_{ijl} + [M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i}} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right|, \quad \frac{3}{2}\tau < \tau_1 \le 2\tau.$$

由引理 2($H = M^{-2}$, $U = M^2$, $A = \frac{M^5}{\sqrt{n\tau}}$) 得

$$\sum_{z > D_{ijl}}^{\le D_{ijl} + [M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon' - i}} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} = \sum_{v > v_1}^{\le v_2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \phi(v,t) e^{2\pi i \psi(v,t)} + O(n^{-1/4} M^{1/2} t^{-1/2}),$$

其中 $v_1=v_1(t)=f'(D_{ijl},t),\quad v_2=v_2(t)=f'(D_{ijl}+[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-i},t)$,

$$\phi(v,t)=\frac{M^2}{z_{v,t}(z_{v,t}-t)\sqrt{\{(z_{v,t}-t)^{-3/2}-z_{v,t}^{-3/2}\}\sqrt{n}/4}},$$

$$\psi(v,t)=\sqrt{n}(\sqrt{z_{v,t}}-\sqrt{z_{v,t}-t})-vz_{v,t}.$$

$z_{v,t}$ 由 $f'(z_{v,t})=v$ 定义，故得

$$\begin{aligned}&\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}^{(i,j)}\Bigg|\sum_{z>D_{ijl}}^{\leq D_{ijl}+[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-i}}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\Bigg|\\&\quad\ll\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}^{(i,j)}\Bigg|\sum_{v>v_1}^{\leq v_2}\phi(v,t)e^{2\pi i\psi(v,t)}\Bigg|+\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}^{(i,j)}n^{-1/4}M^{1/2}t^{-1/2}\\&\quad\ll M^{1-\frac{i\epsilon'-\epsilon'}{2}}\left(\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}\Bigg|\sum_{v>v_1}^{\leq v_2}\phi(v,t)e^{2\pi i\psi(v,t)}\Bigg|^2\right)^{1/2}+n^{-1/4}M^{3/2},\end{aligned}$$

这里用到

$$\sum_{t>\tau}^{\leq\tau_1}{}^{(i,j)}1\ll M^{2-i\epsilon'+\epsilon'}.$$

现把区间 $\tau<t\leq\tau_1$ 分成 $\ll M^{i\epsilon'}$ 个长度 $\ll\frac{\tau}{[M^{\epsilon'}]^i}$ 的小区间，考察和式

$$\sum_{t>\tau_2}^{\leq\tau_3}\Bigg|\sum_{v>v_1}^{\leq v_2}\phi(v,t)e^{2\pi i\psi(v,t)}\Bigg|^2,\quad\tau_2<\tau_3\leq\tau_2+\frac{\tau}{[M^{\epsilon'}]^i}.$$

设 $t=w_1(v)$ 与 $t=w_2(v)$ 分别是 $v_1=v_1(t)$ 与 $v_2=v_2(t)$ 的反函数，交换求和次序得

$$\begin{aligned}\sum_{t>\tau_2}^{\leq\tau_3}\Bigg|\sum_{v>v_1}^{\leq v_2}\phi(v,t)e^{2\pi i\psi(v,t)}\Bigg|^2&=\sum_t\sum_{v_0}\sum_v\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}\\&\ll\sum_{v_0>v'}^{\leq v''}\sum_{v>v'}^{\leq v''}\Bigg|\sum_{t>t'}^{\leq t''}\phi(t)e^{2\pi i\psi(t)}\Bigg|,\end{aligned}$$

其中

$$\phi(t)=\phi(v_0,t)\phi(v,t),\quad\psi(t)=\psi(v_0,t)-\psi(v,t),$$

$$v'=v_1(\tau_3),\quad v''=v_2(\tau_2),$$

$$t'=\max(\tau_2,w_1(v_0),w_1(v)),\quad t''=\min(\tau_3,w_2(v_0),w_2(v)).$$

由于

$$\phi(t) \ll n^{-1/2} M \tau^{-1}, \quad t'' - t' \ll \frac{\tau}{[M^{\epsilon'}]^i},$$

$$\begin{aligned}
v'' - v' &= v_2(\tau_2) - v_1(\tau_3) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau_2)\right]_{x=D_{ijl}+[M^{\epsilon'}]^{2/\epsilon'-i}} - \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau_3)\right]_{x=D_{ijl}} \\
&\ll M^{2-i\epsilon'}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right)\right]_{x=\beta, t=Q} \\
&\quad + \tau [M^{\epsilon'}]^{-i}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right)\right]_{x=\beta, t=Q} \\
&\ll n^{1/2} M^{-3-i\epsilon'} \tau (\geq 1),
\end{aligned}$$

我们有

$$\sum_{v_0=v}\sum \left|\sum_{t>t'}^{\leq t''} \phi(t) e^{2\pi i \psi(t)}\right| \ll n^{1/2} M^{-3-i\epsilon'} \tau \frac{\tau}{[M^{\epsilon'}]^i} n^{-1/2} M \tau^{-1} \ll M^{-2-2i\epsilon'} \tau.$$

当 $v_0 \neq v$ 时，令 $w = v_0 - v$. 由 [1] 知

$$\frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial t^2} = \frac{\frac{3}{2}[z_{v',t}^{1/2} - (z_{v',t} - t)^{1/2}] w}{[z_{v',t}^{3/2} - (z_{v',t} - t)^{3/2}]^2 [(z_{v',t} - t)^{-3/2} - z_{v',t}^{-3/2}]},$$

因此

$$\frac{1}{A} \ll \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial t^2} \ll \frac{1}{A}, \quad A = \tau^2 M^{-2} w^{-1}.$$

由引理 1 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{v_0 \neq v}\sum \left|\sum_{t>t'}^{\leq t''} \phi(t) e^{2\pi i \psi(t)}\right| \\
&\ll (v'' - v') \sum_{w>0}^{\leq v''-v'} (n^{-1/2} M^{2-i\epsilon'} \tau^{-1} w^{1/2} + n^{-1/2} w^{-1/2}) \\
&\ll n^{-1/2} M^{2-i\epsilon'} \tau^{-1} (n^{1/2} M^{-3-i\epsilon'} \tau)^{5/2} + n^{-1/2} (n^{1/2} M^{-3-i\epsilon'} \tau)^{3/2} \\
&\ll n^{3/4} M^{-11/2-7i\epsilon'/2} \tau^{3/2} + n^{1/4} M^{-9/2-3i\epsilon'/2} \tau^{3/2}.
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
S_{ijl} \ll n^{\epsilon/8}\Bigg\{& M^{1-(i\epsilon'-\epsilon')/2} M^{i\epsilon'/2} \left(\sum_{t>\tau_2}^{\leq \tau_3} \left|\sum_{v>v_1}^{\leq v_2} \phi(v,t) e^{2\pi i \psi(v,t)}\right|^2\right)^{1/2} \\
&+ n^{-1/4} M^{3/2}\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\ll n^{\epsilon/8}\Big\{M^{1+\epsilon'/2}(M^{-2-2i\epsilon'}\tau+n^{1/4}M^{-9/2-3i\epsilon'/2}\tau^{3/2}$$
$$+n^{3/4}M^{-11/2-7i\epsilon'/2}\tau^{3/2})^{1/2}+n^{-1/4}M^{3/2}\Big\}.$$

于是，当 $n^{1/4}\le M\le n^{1/3+\epsilon_1}$, $1\le i\le\left[\frac{1}{4\epsilon'}\right]$ 时，我们有

$$S_i\ll\sum_{j\ge0}^{\le N}\sum_{l=0}^{6[M^{\epsilon'}]}|S_{ijl}|$$
$$\ll M^{i\epsilon'}n^{\epsilon/8}\{M^{1+\epsilon'/2}M^{-i\epsilon'}(1+n^{1/4}M^{-3/2+i\epsilon'/2}+n^{3/4}M^{-5/2})^{1/2}\}$$
$$+n^{-1/4}M^{3/2+i\epsilon'}$$
$$\ll n^{1/3+\epsilon}.$$

现在我们来估计

$$\sum_{0<\mu\le M}\ \sum_{\substack{0<\mu_1\le M\\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\left|\sum_{z\ge4M^2-\mu^2}^{\le4M^2-\mu([\frac{1}{4\epsilon'}])}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|.$$

由 $\mu\left(\left[\frac{1}{4\epsilon'}\right]\right)$ 的定义知

$$\mu^2-\mu\left(\left[\frac{1}{4\epsilon'}\right]\right)\ll[M^{\epsilon'}]^{\frac{2}{\epsilon'}-[\frac{1}{4\epsilon'}]}\ll M^{2-1/4+\epsilon'}.$$

根据引理 1 (取 $H=M^{-2}$, $U=M^{2-1/4+\epsilon'}$, $A=n^{-1/2}M^5t^{-1}$) 得

$$\sum_{z\ge4M^2-\mu^2}^{\le4M^2-\mu([\frac{1}{4\epsilon'}])}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\ll n^{1/4}M^{-11/4+\epsilon'}t^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}t^{-1/2}.$$

对给定的 t, 由于 $t=\mu_1^2-\mu^2$ 的解数 $\ll n^{\epsilon/8}$, 故当 $n^{1/4}\le M\le n^{1/3+\epsilon_1}$ 时,

$$\sum_{0<\mu\le M}\ \sum_{\substack{0<\mu_1\le M\\ M^{11/6}\le t\le M^2}}\left|\sum_{z\ge4M^2-\mu^2}^{\le4M^2-\mu([\frac{1}{4\epsilon'}])}\varphi(z)e^{2\pi if(z)}\right|$$
$$\ll n^{\frac{\epsilon}{8}}\sum_{M^{11/6}<t\le M^2}(n^{1/4}M^{-11/4+\epsilon'}t^{1/2}+n^{-1/4}M^{1/2}t^{-1/2})$$
$$\ll n^{\epsilon/8}(n^{1/4}M^{-1/4+\epsilon/8}+n^{-1/4}M^{3/2})$$
$$\ll n^{1/3+\epsilon},$$

于是得，当 $n^{1/4} \le M \le n^{1/3+\epsilon_1}$ 时有

$$\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ M^{11/6}\le t\le M^2}} \sum_{0<\mu_1\le M} \left| \sum_{z\ge 4M^2-\mu^2}^{\le 4M^2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right| \ll n^{1/3}.$$

用估计

$$\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ M^{11/6}\le t\le M^2}} \sum_{0<\mu_1\le M} \left| \sum_{z\ge 4M^2-\mu^2}^{\le 4M^2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right|$$

的同样的方法，容易得到当 $n^{1/4} \le M \le n^{1/3+\epsilon_1}$ 时有

$$\sum_{\substack{0<\mu\le M\\ M^{11/6}\le t\le M^2}} \sum_{0<\mu_1\le M} \left| \sum_{z\ge 2M^2-\mu^2}^{\le 2M} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)} \right| \ll n^{1/3+\epsilon}.$$

于是我们得 $\Omega \ll n^{1/6+\epsilon}$.

因此对于 $M \le \frac{1}{\Delta}$, 有

$$U_m \ll n^{2/3+\epsilon}.$$

当 $M > \frac{1}{\Delta}$ 时也有同样的结果，因此

$$B \ll n^{2/3+\epsilon},$$

由此即得结论成立.

参 考 文 献

[1] Виноградов И М. К вопросу о числе целых точек в заданной области. *Известия Ак. Наук СССР, сер. Матем.*, 1960, **24**: 777 ~ 786

[2] Виноградов И М. Улучшение асимпототических сумм в теории чисел. *Известия Ак. Наук СССР, сер. Матем.*, 1955, **19**: 3 ~ 10

[3] Chen Jingrun. Improvement of asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions. *Acta Mathematics Sinica*, 1962, **12**: 408 ~ 420

关于三维除数问题 *†

§1.

用 $d_3(n)$ 记将 n 表成为三个因子乘积的表法个数，则有渐近公式

$$\sum_{n\le x} d_3(n) = xP_3(\log x) + \triangle_3(x)$$

此处 $P_3(\log x)$ 为 $\log x$ 的一个二次多项式，也就是 $\zeta^3(x)x^{s-1}/s$ 在极点 $s=1$ 上的残数，又用 α_3 表使

$$\triangle_3(x) = O(x^{\alpha})$$

成立的 α 的下确界，Voronoi, Walfisz, Atksinson, Rankin, 越民义 [3]、尹文霖 [4,5]、越民义和吴方 [6] 曾分别证明了

$$\alpha_3 \le \frac{1}{2}, \frac{43}{87}, \frac{37}{75}, 0.4931466\ldots, \frac{14}{29}, \frac{25}{52}, \frac{10}{21}, \frac{8}{17}.$$

在本文中，我们将证明

$$\alpha_3 \le \frac{5}{11}.$$

§2.

命 $X=[x^{7/11}]$ 又命

$$\Omega = \Omega_{PQR} = \sum_{P<p\le 2P} \sum_{\substack{Q<q\le 2Q \\ pqr\le X}} \sum_{R<r\le 2R} e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}}$$

及 $C = C_{PQR} = PQR$. 在本节中我们将给 Ω 以若干不同的估计. 先叙述两个引理，这二个引理在 [1] 中已经证明过了.

引理 1. 假定 H, U, A, q, r 是满足条件

$$H>0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0 < r-q \ll U$$

---

* 1963 年 4 月 29 日收到.

† 原载数学学报，**14**(1964), no. 4, pp. 549 – 558.

的实数，在区间 $q < x \le r$ 中实函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 满足不等式

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H.$$

同时上述的区间又可以分成为有限个区间，在其中任一个区间，函数 $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 都是单调的. 则有

$$\sum_{q<x\le r} \varphi(x)e^{2\pi i f(x)} \ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln(U+1)\right).$$

引理 2. 假定 H, U, A, q, r 是满足条件

$$H > 0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0 < r - q \ll U$$

的实数，其次假定 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是次数不超过某常数的代数函数，同时假定它们在区间 $q < x \le r$ 中满足条件

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad f'''(x) \ll \frac{1}{AU}$$
$$H \ll \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

则存在有公式

$$\sum_{q<x\le r} \varphi(x)e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(q)\le k\le f'(r)} Z_k + O(HT + H(\log U + 1)),$$

而 x_k 是由等式 $f'(x_k) = k$ 所决定，如果 k 和 $f'(q)$ 或 $f'(r)$ 没有一个相同，则取 $b_k = 1$. 如果 k 和 $f'(q)$ 或 $f'(r)$ 有一个相同时，则取 $b_k = 0.5$. 最后 $T \ll \sqrt{A}$ 而对于非整数的 $f'(q)$ 与 $f'(r)$ 又有

$$T \ll \max\left(\frac{1}{(f'(q))}, \quad \frac{1}{(f'(r))}\right).$$

§**2.1.** 首先我们假定

$$C^{1/3} \le R \le C^{1/2}$$

现在我们要对这个和式

$$\sum_{P<p\le 2P} \sum_{\substack{Q<q\le 2Q \\ pqr\le X}} \sum_{R<r\le 2R} e^{6\pi i (xpqr)^{1/3}}$$

进行估值，显然我们有

$$\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{R<r\le\min(2R,X/pq)} e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}}$$

$$\ll x^{\varepsilon}\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left|\sum_{R<r\le\min(2R,X/y)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right|.$$

令 $h=[C^{23/42}x^{-1/6}]$, 并使用记号 I_y 来表示一个最大的正整数，它使得不等式

$$R+hI_y\le\min(2R,X/y)$$

成立，显然我们有

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left|\sum_{R<r\le\min(2R,X/y)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right|$$

$$\ll\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left(\sum_{k=0}^{2[Rh^{-1}]}|S_k|+\left|\sum_{hI_y<r\le\min(2R,X/y)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right|\right),\qquad(1)$$

这里

$$S_k=\sum_{R+kh<r\le R+(k+1)h} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}.$$

现在我们要对这个和式

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ}|S_k|$$

进行估值，我们令 $l=r-r'$ 显然我们有

$$\left(\sum_{PQ<y\le 4PQ}|S_k|\right)^2\ll(PQ)^2h$$

$$+(PQ)\sum_{R+kh<r\le R+(k+1)h}\ \sum_{\substack{R+kh<r'\le R+(k+1)h\\ r>r'}}\ \sum_{PQ<y\le 4PQ} e^{6\pi i x^{\frac13}(r^{\frac13}-r'^{\frac13})y^{\frac13}}$$

$$=(PQ)^2h$$

$$+(PQ)\sum_{R+kh<r\le R+(k+1)h}\ \sum_{0<l\le r-R-kh}\ \sum_{PQ<y\le 4PQ} e^{6\pi i x^{\frac13}(r^{\frac13}-(r-l)^{\frac13})y^{\frac13}}$$

$$=(PQ)^2h$$

$$+(PQ)\sum_{0<l\le h}\ \sum_{l+R+kh<r\le R+(k+1)h}\ \sum_{PQ<y\le 4PQ} e^{6\pi i x^{\frac13}(r^{\frac13}-(r-l)^{\frac13})y^{\frac13}}.\qquad(2)$$

对于这个和式

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ} e^{6\pi i x^{1/3}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})y^{1/3}},$$

我们将使用引理 2, 我们令 $f(y,r)=3x^{1/3}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})y^{1/3}$, 则我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}f(y,r)=x^{1/3}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})y^{-2/3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(y,r)=-\frac{2}{3}x^{1/3}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})y^{-5/3}.$$

由等式 $(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})x^{1/3}y_v^{-2/3}=v$ 我们可以得到

$$y_v=x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}v^{-3/2},$$

$$f(y_v)-vy_v=2x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}v^{-1/2},$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(y,r)\right]_{y=y_v}=-\frac{2}{3}x^{-1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{-3/2}v^{5/2}.$$

由上面这二个式子及引理 2 我们可以得到

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ} e^{6\pi i x^{1/3}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})y^{1/3}}$$
$$=\sum_{v_1<v\le v_2}\frac{e^{4\pi i x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}v^{-1/2}}}{\sqrt{\frac{-2}{3}}x^{-1/4}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{-3/4}v^{5/4}}$$
$$+O(x^{-1/6}C^{1/3}(PQ)^{1/2}l^{-1/2}) \tag{3}$$

这里 $v_1=v_1(r)=\left[\frac{\partial}{\partial y}f(y,r)\right]_{y=4PQ}$, $v_2=v_2(r)=\left[\frac{\partial}{\partial y}f(y,r)\right]_{y=PQ}$. 我们容易知道 $v_1(r)$ 和 $v_2(r)$ 都是 r 的减小函数，令 $w_1(v)$ 为 $v=v_1(r)$ 关于 r 的反函数， $w_2(v)$ 为 $v=v_2(r)$ 关于 r 的反函数，交换和号的次序我们可以得到

$$\sum_{l+R+kh<r\le R+(k+1)h}\ \sum_{v_1(r)<v\le v_2(r)}\sqrt{\frac{-3}{2}}x^{1/4}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/4}$$
$$\cdot v^{-5/4}e^{4\pi i x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}v^{-1/2}}=\sum_{v_1(R+(k+1)h)<v\le v_2(R+l+kh)}$$
$$\sum_{\max(R+l+kh,w_1(v))<r\le\min(R+(k+1)h,w_2(v))}\frac{e^{4\pi i x^{1/2}(r^{\frac13}-(r-l)^{\frac13})^{\frac32}v^{-\frac12}}}{\sqrt{\frac{-2}{3}}x^{-\frac14}(r^{\frac13}-(r-l)^{\frac13})^{-\frac34}v^{\frac54}}. \tag{3'}$$

由于 $(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/4}$ 和 $(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}$ 都是 r 的代数函数所以我们可以先来考虑和式

$$\sum_{\max(R+l+kh,w_1(v))<r\le\min(R+(k+1)h,w_2(v))} e^{4\pi i x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}v^{-1/2}}. \qquad (4)$$

令 $F(r,l)=2x^{1/2}v^{-1/2}\{r^{1/3}-(r-l)^{1/3}\}^{3/2}$, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}F(r,l) &= x^{1/2}v^{-1/2}\{r^{1/3}-(r-l)^{1/3}\}^{1/2}\{r^{-2/3}-(r-l)^{-2/3}\},\\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}F(r,l) &= \frac{1}{6}x^{1/2}v^{-1/2}\{r^{1/3}-(r-l)^{1/3}\}^{-1/2}[-3r^{-4/3}-3(r-l)^{-4/3}\\
&\quad -2r^{-2/3}(r-l)^{-2/3}+4(r-l)^{1/3}r^{-5/3}+4(r-l)^{-5/3}r^{1/3}]\\
&= \frac{1}{6}x^{1/2}v^{-1/2}\{r^{1/3}-(r-l)^{1/3}\}^{-1/2}G(r,l),\\
\frac{\partial^3}{\partial r^3}F(r,l) &= \frac{1}{36}x^{1/2}v^{-1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{-3/2}[40r^{-8/3}(r-l)^{2/3}\\
&\quad -68r^{-7/3}(r-l)^{1/3}+27r^{-2}-12r^{-5/3}(r-l)^{-1/3}\\
&\quad +15r^{-4/3}(r-l)^{-2/3}-15r^{-2/3}(r-l)^{-4/3}\\
&\quad +12r^{-1/3}(r-l)^{-5/3}-27(r-l)^{-2}+68r^{1/3}(r-l)^{-7/3}\\
&\quad -40r^{2/3}(r-l)^{-8/3}]\\
&= \frac{1}{36}x^{1/2}v^{-1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{-3/2}H(r,l).
\end{aligned}$$

由于 $l\ll R$, 我们就可以使用中值定理关于 l 展开，即得

$$\begin{aligned}
G(r,l) &= G(r,0)+l\left[\frac{\partial}{\partial l}G(r,l)\right]_{l=0}+\frac{l^2}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial l^2}G(r,l)\right]_{l=Q_1} \quad \text{这里 } 0<Q_1<l,\\
H(r,l) &= H(r,0)+l\left[\frac{\partial}{\partial l}H(r,l)\right]_{l=0}+\frac{l^2}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial l^2}H(r,l)\right]_{l=0}\\
&\quad +\frac{l^3}{3!}\left[\frac{\partial^3}{\partial l^3}H(r,l)\right]_{l=Q_2} \quad \text{这里 } 0<Q_2\le l.
\end{aligned}$$

由于上面这四个式子及 $l\ll R$ 我们就可以得到

$$\begin{aligned}
x^{1/2}v^{-1/2}R^{-3}l^{3/2} &\ll \frac{\partial^2}{\partial r^2}F(r,l)\ll x^{1/2}v^{-1/2}R^{-3}l^{3/2},\\
x^{1/2}v^{-1/2}R^{-4}l^{3/2} &\ll \frac{\partial^3}{\partial r^3}F(r,l)\ll x^{1/2}v^{-1/2}R^{-4}l^{3/2}.
\end{aligned}$$

由于

$$x^{1/3}C^{-2/3}l\ll v\ll x^{1/3}C^{-2/3}l, \qquad (5)$$

故有

$$x^{1/3}C^{1/3}R^{-3}l \ll \frac{\partial^2}{\partial r^2}F(r,l) \ll x^{1/3}C^{1/3}R^{-3}l,$$
$$x^{1/3}C^{1/3}R^{-4}l \ll \frac{\partial^3}{\partial r^3}F(r,l) \ll x^{1/3}C^{1/3}R^{-4}l. \tag{6}$$

现在我们分为二种情况对 (4) 式进行估值.

§**2.1.1.** 当 $C^{1/3} \le R \le C^{3/7}$, 如果我们有 $x^{1/3}C^{1/3}R^{-3}l \ll C^{4/7}/(Rh)$, 则由 (6) 式及引理 1 我们有

$$\sum_r e^{4\pi i x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}v^{-1/2}} \ll h^{1/2}C^{2/7}R^{-1/2} + x^{-1/6}C^{-1/6}R^{3/2}l^{-1/2}. \tag{7}$$

如果我们有

$$x^{1/3}C^{1/3}R^{-3}l \gg \frac{C^{4/7}}{Rh} \tag{8}$$

则选取 ρ 使得

$$C^{4/7}R^{-2} \ll x^{1/3}C^{1/3}R^{-4}l\rho \ll C^{4/7}R^{-2}.$$

由 (8) 式及 $R \ge C^{1/3}$ 就可以得到

$$\rho \ll C^{4/7}R^{-1}/(x^{1/3}C^{1/3}R^{-3}l) \ll h,$$

$$\rho \gg x^{-1/3}C^{-1/3}C^{4/7}R^2l^{-1} \gg x^{-1/3}C^{4/7}Rl^{-1}.$$

由引理 1 及 [2] 中的引理 2 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_r e^{4\pi i x^{\frac12}(r^{\frac13}-(r-l)^{\frac13})^{\frac32}v^{-\frac12}} &\ll \frac{h}{\rho^{\frac12}} + \frac{h^{\frac12}}{\rho^{\frac12}}\left\{\sum_{s=1}^{\rho}\left|\sum_r e^{2\pi i(F(r+s,l)-F(r,l))}\right|\right\}^{\frac12}\\ &\ll x^{\frac16}C^{-\frac27}R^{-\frac12}l^{\frac12}h + \frac{h^{\frac12}}{\rho^{\frac12}}\left\{\sum_{s=1}^{\rho}\left(hC^{\frac27}R^{-1} + \left(\frac{s}{\rho}\right)^{-\frac12}RC^{-\frac27}\right)\right\}^{\frac12}\\ &\ll x^{\frac16}C^{-\frac27}R^{-\frac12}l^{\frac12}h + hC^{\frac17}R^{-\frac12} + h^{\frac12}R^{\frac12}C^{-\frac17}.\end{aligned} \tag{9}$$

由 (5), (7), (9) 及 [1] 中的引理 1 我们有

$$PQ\sum_{0<l\le h}\sum_{v_1(R+(k+1)h)<v\le v_2(R+l+kh)}\sum_{\max(R+l+kh,w_1(v))\le r\le\min(R+(k+1)h,w_2(v))}\frac{e^{4\pi i x^{\frac{1}{2}}(r^{\frac{1}{3}}-(r-l)^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}v^{-\frac{1}{2}}}}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}(r^{\frac{1}{3}}-(r-l)^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{5}{2}}}}$$

$$\ll CR^{-1}\sum_{0<l\le h}\left\{\frac{x^{1/4}R^{-1/2}l^{3/4}}{(x^{1/3}C^{-2/3}l)^{1/4}}[x^{1/6}C^{-2/7}R^{-1/2}l^{1/2}h+hC^{1/7}R^{-1/2}\right.$$

$$\left.+h^{1/2}R^{1/2}C^{-1/7}+h^{1/2}C^{2/7}R^{-1/2}+x^{-1/6}C^{-1/6}R^{3/2}l^{-1/2}]\right\}$$

$$\ll x^{1/3}h^3R^{-2}C^{37/42}+x^{1/6}h^{5/2}R^{-2}C^{55/42}+x^{1/6}h^2R^{-1}C^{43/42}$$

$$+x^{1/6}C^{61/42}R^{-2}h^2+Ch. \tag{10}$$

由 (2), (3), (3'), (10), $h=x^{-1/6}C^{23/42}$, $R\le C^{3/7}$ 及 $C\ll x^{7/11}$ 我们就得到

$$\sum_{PQ\le y\le 4PQ}|S_k|\ll CR^{-1}h^{1/2}+x^{1/6}h^{3/2}R^{-1}C^{37/84}$$

$$+x^{1/12}h^{5/4}R^{-1}C^{55/84}+x^{1/12}hR^{-1/2}C^{43/84}+x^{1/12}C^{61/84}R^{-1}h$$

$$+C^{1/2}h^{1/2}+x^{-1/12}C^{11/12}R^{-3/4}h^{3/4}$$

$$\ll x^{1/12}C^{61/84}R^{-1}h,$$

故有

$$\sum_{k=0}^{2[R/h]}\sum_{PQ<y\le 4PQ}|S_k|\ll x^{1/12}C^{61/84}. \tag{11}$$

§**2.1.2.** 当 $C^{3/7}\le R\le C^{1/2}$, 由于

$$x^{1/3}C^{1/3}R^{-3}l\ll\frac{\partial^2}{\partial r^2}F(r,l)\ll x^{1/3}C^{1/3}R^{-3}l,$$

故由引理 1 我们有

$$\sum_r e^{4\pi i x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2}v^{-1/2}}$$

$$\ll h(x^{1/6}C^{1/6}R^{-3/2}l^{1/2})+x^{-1/6}C^{-1/6}R^{3/2}l^{-1/2}. \tag{12}$$

故由 (5), (12), $C^{3/7} \le R \le C^{1/2}$, $C \ll x^{7/11}$ 及 [1] 中的引理 1 我们有

$$PQ \sum_{0<l\le h} \sum_{v_1(R+(k+1)h)\le v\le v_2(R+l+kh)} \sum_{\max(R+l+kh,w_1(v))\le r\le \min(R+(k+1)h,w_2(v))} x^{1/4}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/4}$$

$$\cdot v^{-5/4} e^{4\pi i x^{1/2}(r^{1/3}-(r-l)^{1/3})^{3/2} v^{-1/2}} \ll PQ \sum_{0<l\le h} \left\{ \frac{x^{1/4}R^{-1/2}l^{3/4}}{(x^{1/3}C^{-2/3}l)^{1/4}} \right.$$

$$\left. \cdot (hx^{1/6}C^{1/6}R^{-3/2}l^{1/2} + x^{-1/6}C^{-1/6}R^{3/2}l^{-1/2}) \right\}$$

$$\ll x^{1/6}R^{-2}h^2C^{61/42} + Ch. \tag{13}$$

由 (2), (3), (3'), (13), $C^{3/7} < R \le C^{1/2}$, $C \ll x^{7/11}$, 我们有

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ} |S_k| \ll x^{1/12}R^{-1}hC^{61/84} + C^{1/2}h^{1/2} + x^{-1/12}C^{11/12}R^{-3/4}h^{3/4}$$

$$\ll x^{1/12}R^{-1}hC^{61/84},$$

故有

$$\sum_{k=0}^{2[R/h]} \sum_{PQ<y\le 4PQ} |S_k| \ll x^{1/12}C^{61/84}. \tag{14}$$

§2.1.3. 在本小节中我们将对和式

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ} \left| \sum_{hI_y<r\le \min(2R,X/y)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}} \right| \tag{15}$$

进行估值. 当 $C^{3/7} < R \le C^{1/2}$ 时, 显然我们有

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ} \left| \sum_{hI_y<r\le \min(2R,X/y)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}} \right| \ll (PQ)h \ll CR^{-1}h$$

$$\ll x^{1/12}C^{61/84}. \tag{16}$$

这里我们用到 $h = x^{-1/6}C^{23/42}$, $C \le x^{7/11}$, $R > C^{3/7}$.

现在我们将对 $C^{1/3} < R \le C^{3/7}$ 时的 (15) 式进行估值, 我们知道如果 $X > 8C$ 则 $\min(2R, X/y) = 2R$, 故 I_y 与 y 无关, 则使用下面的方法知道 (17) 式能够成立. 当 $X < 8C$ 时我们知道如果 y 在某区间内变动, 该

区间的始点设为 D 而该区间的长度 $\ll \frac{h[PQ]}{R}x^{-\varepsilon}$, 即为 $y = D + y_1$, 其中 $PQ < D \le 4PQ$, $0 \le y_1 \le \frac{h[PQ]}{R}x^{-\varepsilon}$, 则 $\frac{X}{y}$ 的变动范围不超过 $hx^{-\varepsilon/2}$, 这是因为

$$\left|\frac{X}{y} - \frac{X}{D}\right| = \left|\frac{X}{D+y_1} - \frac{X}{D}\right| = \left|\frac{X}{D}\left(1 - \frac{y_1}{D} + \frac{y_1^2}{D^2} - \cdots\right) - \frac{X}{D}\right| \ll hx^{-\varepsilon/2},$$

所以说我们可以将 y 所经过的区间 $PQ < y \le 4PQ$ 分成为不多于 $\frac{R}{h}x^{\varepsilon}$ 个子区间，使得其中任一个子区间的长度 $\ll \frac{h(PQ)}{R}x^{-\varepsilon}$, 并且当 y 在其中任取的某一个子区间 $\left[E, E + \frac{h(PQ)}{R}x^{-\varepsilon}\right]$ 内变动时，则 I_y 恒等于 I_E. 令 $l = r - r'$. 由于引理 1 及 $\min(2R, X/y) - I_E h \ll h$, $h = x^{-1/6}C^{23/42}$, $C^{1/3} \le R \le C^{3/7}$, $(PQ) \le C^{2/3}$, $C \le x^{7/11}$ 和 [6] 中的第 171 页我们有

$$\left(\sum_{E<y\le E+\frac{h(PQ)}{R}x^{-\varepsilon}}\left|\sum_{I_E h<r\le\min(2R,X/y)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right|\right)^2$$

$$\ll \left(\frac{1}{4X}\sum_{E<y\le E+\frac{h(PQ)}{R}x^{-\varepsilon}}\left|\sum_{I_E h<r\le\min(2R,X/E)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\sum_{s=0}^{X-1}\sum_{k=1}^{4X} e^{2\pi ik\frac{X-ry-s}{4X}}\right|\right)^2$$

$$\ll \left(\frac{1}{4X}\max_k \sum_{E<y\le E+\frac{h(PQ)}{R}x^{-\varepsilon}}\left|\sum_{I_E h<r\le\min(2R,X/E)} e^{2\pi i\{3(xyr)^{1/3}-\frac{kyr}{4X}\}}\right|\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k=1}^{4X}\min\left(X, \frac{1}{\left\langle\frac{k}{4X}\right\rangle}\right)\right)^2$$

$$\ll \left(\max_k \sum_{E<y\le E+\frac{h(PQ)}{R}x^{-\varepsilon}}\left|\sum_{I_E h<r\le\min(2R,X/E)} e^{2\pi i\{3(xyr)^{1/3}-\frac{kyr}{4X}\}}\right|\right)^2$$

$$\ll \frac{(PQ)^2h^3}{R^2} + \frac{h(PQ)}{R}\sum_{I_E h<r\le\min(2R,X/E)}\ \sum_{I_E h<r'\le\min(2R,X/E)}$$

$$\cdot\sum_{E<y\le E+\frac{h(PQ)}{R}x^{-\varepsilon}} e^{2\pi i\{3x^{1/3}(r^{1/3}-r'^{1/3})y^{1/3}-\frac{k(r-r')}{4X}y\}}$$

$$\ll \frac{(PQ)^2h^3}{R^2} + \left(\frac{PQh}{R}\right)\sum_{I_E h<r\le\min(2R,X/E)}$$

$$\cdot\sum_{0<l\le h}\left(\frac{hPQ}{R}x^{1/6}C^{-1/3}l^{1/2}(PQ)^{-1/2} + x^{-1/6}C^{1/3}(PQ)^{1/2}l^{-1/2}\right)$$

$$\ll \frac{(PQ)^2h^3}{R^2}+\left(\frac{h}{R}\right)^2(x^{1/6}h^{5/2}C^{-1/3}(PQ)^{3/2}+x^{-1/6}C^{4/3}h^{1/2}(PQ)^{1/2})$$
$$\ll x^{1/6}C^{61/42}\left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

故当 $C^{1/3}<R\le C^{3/7}$ 时，有

$$\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left|\sum_{hI_y<r\le\min(2R,X/y)}e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right|\ll\frac{R}{h}x^{\varepsilon}\frac{h}{R}x^{1/12}C^{61/84}$$
$$\ll x^{\frac{1}{12}+\varepsilon}C^{61/84}. \tag{17}$$

§**2.1.4.** 由 (1), (11), (14), (16) 及 (17) 得到当 $C^{1/3}<R\le C^{1/2}$ 时，我们有

$$\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{R<r\le\min(2R,X/pq)}e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}}\ll x^{1/12}C^{61/84}. \tag{18}$$

§**2.2.** 现在我们假定 $R\ge C^{1/2}$ 而对和式

$$\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{R<r\le\min(2R,X/pq)}e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}}$$

进行估值，显然我们有

$$\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\left|\sum_{R<r\le\min(2R,X/y)}e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right|$$
$$\ll x^{\varepsilon}\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left|\sum_{R<r\le\min(2R,X/y)}e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right|. \tag{19}$$

我们令 $g(r)=3(xyr)^{1/3}$ 则有

$$\frac{d}{dr}g(r)=(xy)^{1/3}r^{-2/3},\quad \frac{d^2}{dr^2}g(r)=-\frac{2}{3}(xy)^{1/3}r^{-5/3}.$$

由 $(xy)^{1/3}r_v^{-2/3}=v$ 可以得到 $r_v=(xy)^{1/2}v^{-3/2}$, 故有

$$g(r_v)-vr_v=2(xy)^{1/2}v^{-1/2},\quad \left[\frac{d^2}{dr^2}g(r)\right]_{r=r_v}=-\frac{2}{3}(xy)^{-1/2}v^{5/2}.$$

现在我们使用引理 2 并得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left|\sum_{R<r\le\min(2R,X/y)} e^{6\pi i(xyr)^{1/3}}\right| \\
\ll &\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left(\left|\sum_{v_1<v\le v_2}\frac{e^{4\pi i(xy)^{1/2}v^{-1/2}}}{\sqrt{-\frac{2}{3}(xy)^{-1/2}v^{5/2}}}\right|+x^{-1/6}y^{-1/6}r^{5/6}\right)\\
\ll &\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left|\sum_{v_1<v\le v_2}x^{1/4}y^{1/4}v^{-5/4}e^{4\pi i(xy)^{1/2}}v^{-1/2}\right|+x^{-1/6}C^{5/6}. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

而这里 $v_1=(xy)^{1/3}[\min(2R,X/y)]^{-2/3}$, $v_2=(xy)^{1/3}R^{-2/3}$, 由于 $PQ<y\le 4PQ$, $C=PQR$, 故有

$$
2^{-2/3}x^{1/3}C^{1/3}R^{-1}\le v_1\le v_2\le(4x)^{1/3}C^{1/3}R^{-1}.
$$

我们将区间 $[2^{-2/3}x^{1/3}C^{1/3}R^{-1},(4x)^{1/3}C^{1/3}R^{-1}]$ 分成为不多于 $2[4x^{\frac{1}{3}}C^{-\frac{1}{3}}]$ 个子区间，并且使得其中的每一个子区间的长度都等于 N, 而其中的 $N\le C^{2/3}R^{-1}$, 故有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left|\sum_{v_1<v\le v_2}(xy)^{1/4}\frac{e^{4\pi i(xy)^{1/2}v^{-1/2}}}{v^{5/4}}\right|\\
\ll &\sum_{PQ<y\le 4PQ}\left\{\sum_{k=0}^{2[4x^{1/3}C^{-1/3}]}|S_k|+\frac{x^{1/4}y^{1/4}C^{2/3}R^{-1}}{\{(4x)^{1/3}C^{1/3}R^{-1}\}^{5/4}}\right\}\\
\ll &\sum_{k=0}^{2[4x^{1/3}C^{-1/3}]}\sum_{PQ<y\le 4PQ}|S_k|+x^{-1/6}C^{3/2}R^{-1}. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

这里的

$$
S_k=\sum_{v_k}(xy)^{1/4}\frac{e^{4\pi i(xy)^{1/2}}v^{-1/2}}{v^{5/4}},
$$

其中的 v_k 经过区间 $[2^{-2/3}x^{1/3}C^{1/3}R^{-1}+kN, 2^{-2/3}x^{1/3}C^{1/3}R^{-1}+(k+1)N]$ 中的一切整数. 现在我们来对和式

$$
\sum_{PQ<y\le 4PQ}|S_k|
$$

进行估值，显然我们有

$$\left(\sum_{PQ<y\le 4PQ}|S_k|\right)^2$$
$$\ll \sum_{v_k}\sum_{v_k'}\sum_{PQ<y\le 4PQ}\frac{(PQ)x^{1/2}y^{1/2}e^{4\pi i x^{1/2}(v_k^{-1/2}-v_k'^{-1/2})y^{1/2}}}{v_k^{5/4}v_k'^{5/4}}$$
$$\ll (PQ)^2x^{1/2}(PQ)^{1/2}\frac{C^{2/3}R^{-1}}{(x^{1/3}C^{1/3}R^{-1})^{5/2}}$$
$$+\sum_{v_k}\sum_{\substack{v_k'\\ v_k>v_k'}}\sum_{PQ<y\le 4PQ}\frac{(PQ)x^{1/2}y^{1/2}e^{4\pi i x^{1/2}(v_k^{-1/2}-v_k'^{-1/2})y^{1/2}}}{v_k^{5/4}v_k'^{5/4}},\qquad(22)$$

其中的 v_k 和 v_k' 分别独立地经过区间 $[2^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}C^{\frac{1}{3}}R^{-1}+kN, 2^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}C^{\frac{1}{3}}R^{-1}+(k+1)N]$ 中的一切整数，令 $l=v_k-v_k'$ 对于一个给定的 l, 则 (v_k, v_k') 的解答的组数不超过 N, 令

$$G(y)=2x^{1/2}(v_k^{-1/2}-v_k'^{-1/2})y^{1/2}.$$

则有 $x^{1/2}v_k^{-3/2}l(PQ)^{-3/2}\ll G''(y)\ll x^{1/2}v_k^{-3/2}l(PQ)^{-3/2}$, 现在我们使用引理 1 及 [2] 中的引理 1 就得到

$$\sum_{v_k}\sum_{v_k'}\sum_{PQ\le y\le 4PQ}\frac{(PQ)x^{1/2}y^{1/2}}{v_k^{5/4}v_k'^{5/4}}e^{4\pi i(xy)^{1/2}(v_k^{-1/2}-v_k'^{-1/2})}$$
$$\ll C^{2/3}R^{-1}\sum_{l=1}^{C^{2/3}R^{-1}}\frac{(PQ)^{3/2}x^{1/2}}{(x^{1/3}C^{1/3}R^{-1})^{5/2}}\{PQx^{1/4}(x^{1/3}C^{1/3}R^{-1})^{-3/4}$$
$$\cdot l^{1/2}(PQ)^{-3/4}+x^{-1/4}(x^{1/3}C^{1/3}R^{-1})^{3/4}l^{-1/2}(PQ)^{3/4}\}$$
$$\ll x^{-1/3}R^{-1}C^{7/3}+x^{-1/3}C^{8/3}R^{-2}.\qquad(23)$$

由 (22), (23) 及 $R\ge C^{1/2}$ 我们得到

$$\left(\sum_{PQ<y\le 4PQ}|S_k|\right)^2\ll x^{-1/3}C^{7/3}R^{-1},\qquad(24)$$

由 (20), (21), (24) 我们得到当 $R\ge C^{1/2}$ 时有

$$\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{R<r\le 2R}e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}}\ll x^{1/6}C^{5/6}R^{-1/2}+Cx^{-1/6}.\qquad(25)$$

§**2.3.** 现在我们假定 $C \le x^{6/11}$ 及 $R \ge C^{1/2}$ 而对和式

$$\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{R<r\le \min(2R,X/pq)} e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}}$$

进行估值，当 $R \gg x^{2/9}C^{2/9} \gg C^{1/2}$ 时，则由 (25) 我们得到

$$\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{R<r\le \min(2R,X/pq)} e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}} \le x^{1/18}C^{13/18} + x^{-1/6}C. \quad (26)$$

而当 $C^{5/9} \ll R \ll x^{2/9}C^{2/9}$ 时，则有

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3}(xpqr)^{1/3} \gg x^{1/3}C^{1/3}R^{-3} \gg R^{-3/2}.$$

故由 [4] 中的引理 6 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{P<p\le 2P}\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{R<r\le \min(2R,X/pq)} e^{6\pi i(xpqr)^{1/3}}\\ &\ll PQ\{R(x^{1/3}C^{1/3}R^{-3})^{1/6} + R^{1/2}(R^{-3/2})^{-1/6}\}\\ &\ll x^{1/18}C^{19/18}R^{-1/2} + CR^{-1/4}\\ &\ll x^{1/18}C^{7/9} + C^{7/8}. \end{aligned} \quad (27)$$

而当 $C^{1/2} \ll R \le C^{5/9}$ 时，设 $Q \gg P$, 由 $QP = CR^{-1}$, 故有 $C^{2/9} \ll Q \ll C^{1/2}$. 如果 $Q \gg C^{1/3}$, 则由 (18) 式我们有

$$\Omega \ll x^{1/12}C^{61/84}. \quad (28)$$

如果 $C^{1/3} \gg Q \gg x^{-1/12}C^{5/12}$, 则由 [6] 中的 (6) 式我们有

$$\Omega \ll x^{1/18}C^{7/9} + x^{-1/18}C^{8/9}. \quad (29)$$

如果 $x^{-1/12}C^{5/12} \gg Q \gg C^{2/9}$, 则由 [6] 中的 (4) 式我们有

$$\Omega \ll C^{8/9} + x^{1/24}C^{19/24}. \quad (30)$$

§**3.**

现在来证明 $\alpha_3 \le \frac{5}{11}$. 因为

$$\triangle_3(x)=\frac{x^{1/3}}{\sqrt{3}\pi}\sum_{n\le X}\frac{d_3(n)}{n^{2/3}}\cos\{6\pi(nx)^{1/3}\}+O(x^{2/3+\varepsilon}X^{-1/3}),$$

而 $X=[x^{7/11}]$, 故只须证明

$$\sum_{n\le X}\frac{d_3(n)}{n^{2/3}}\cos\{6\pi(nx)^{1/3}\}\ll x^{4/33}.$$

又我们可假定 P,Q,R 三者之中必至少有一个大于 $C^{1/3}$, 故可设 $R\ge C^{1/3}$. 由 (18), (25) 到 (30) 经对数分和与部分求和得到

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x^{7/11}}\frac{d_3(n)}{n^{2/3}}\cos\{6\pi(nx)^{1/3}\}=\sum_{n\le x^{6/11}}\frac{d_3(n)}{n^{2/3}}\cos\{6\pi(nx)^{1/3}\}\\&\quad+\sum_{x^{6/11}<n\le x^{7/11}}\frac{d_3(n)}{n^{2/3}}\cos\{6\pi(nx)^{1/3}\}\\&\ll x^{1/12}x^{\frac{7}{11}(61/84-2/3)}+x^{1/18+\frac{6}{11}(7/9-2/3)}+x^{-1/18+\frac{6}{11}(8/9-2/3)}\\&\quad+x^{\frac{6}{11}(8/9-2/3)}+x^{1/24+\frac{6}{11}(19/24-2/3)}+x^{1/18+\frac{6}{11}(13/18-2/3)}\\&\quad+x^{-1/6+\frac{6}{11}(1-2/3)}+x^{1/6+\frac{6}{11}(5/6-2/3-1/4)}+x^{-1/6+\frac{7}{11}(1-2/3)}\\&\ll x^{4/33},\end{aligned}$$

而得到希望的结果.

参 考 文 献

[1] Виноградов И М. К вопросу о числе целых точек в заданной области. *Известия Ак. Наук СССР, Сер. матем.*, 1960, **24**: 777 ~ 786

[2] Hua Loo Keng. The lattice-points in a circle. *Quar. Jour. of Math.*, 1942, **XIII** : 18 ~ 30

[3] 越民义. 一个除数问题. 数学学报, 1958, **8**: 496 ~ 506; 科学记录, 1958, **2**: 385 ~ 386

[4] 尹文霖. 三维除数问题. 科学记录, 1959, **3**: 169 ~ 173

[5] 尹文霖. 关于三维除数问题. 北京大学学报, 1959: 193 ~ 196

[6] 越民义, 吴方. 关于三维除数问题. 数学学报, 1962, **12**: 170 ~ 174; 中国科学, 1962, **12**

华林问题 $g(5)=37$ *†

华林 $g(k)$ 问题是数论中的一个有名问题，命 k 表示固定的正整数，以 $g(k)$ 表示一个最小的正整数 $s=s(k)$, 使得对于任意一个 $n>0$ 不定方程

$$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$$

常有正整数解答者. Dickson[1] 利用了维诺格拉朵夫的方法确定了当 $k\geq 6$ 时的 $g(k)$ 的数值，现在华林问题 $g(k)$ 中只有 $g(4)$ 和 $g(5)$ 的数值还没有确定， Dickson 曾在 [1] 中证明了 $37\leq g(5)\leq 54$, 我们曾在 [2] 中改善了该结果而得到 $37\leq g(5)\leq 40$, 现在我们使用华罗庚的方法确定了 $g(5)$ 的数值而得到 $g(5)=37$.

为了证明我们的结果，我们需要下面的这几个引理.

引理 1. 不大于 10^{785} 的正整数都能够表示成为 37 个正整数五次方的和.

证. Dickson 曾在 [1] 的第 711 页中有自 470348 开始到 1934×10^6 止所有的整数都能够表示成为 15 个非负整数五次方的和. 使用 [1] 的定理 12, 令 $n=5$, $t=22$, $l=470348$ 及 $L_0=1934\times 10^6$ 容易得到

$$\ln L_{22}\geq\left(\frac{5}{4}\right)^{22}\ln\left(\frac{1934\times 10^6}{3200}\right)+5\ln 5=\ln\left(\frac{1934\times 10^6}{3200}\right)^{(5/4)^{22}}5^5,$$

即有 $L_{22}\geq 10^{785}$, 故本引理得证.

引理 2. 如果 $(a,q)=1$, $q>0$ 命

$$S_{a,q}(f(x))=S_{a,q}=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi i\frac{a}{q}f(x)},$$

则有

$$|S_{a,q}(x^5)|\leq 40q^{1-1/5}.$$

证. 命 $q=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$, 此处 $p_1,p_2,\ldots,p_s$ 是 q 的所有不同素因子，以后我们常用 p 来表示素数，由 [3] 的引理 1.3 有

$$S_{a,q}(x^5)=\prod_{p|q}S_{a',p^l}\left(\frac{(qx/p^l)^5}{q/p^l}\right).$$

* 1963 年 6 月 26 日收到， 1963 年 11 月 20 日收到修改稿.

† 原载数学学报， **14**(1964), no. 5, pp. 715 – 734.

又我们由 [4] 的 pp. 269 – 271 中的引理 3 到引理 5, 我们有

$$|S_{a,p^\alpha}| \le \begin{cases} 4p^{-3/10}p^{\alpha(1-1/5)}, & 当\ (p-1,5)=5\ 并且\ p\le 128\ 时, \\ 5p^{\alpha(1-1/5)}, & 当\ p=5\ 时, \\ p^{\alpha(1-1/5)}, & 当\ (p-1,5)\ne 5\ 或\ p\ge 128\ 时. \end{cases}$$

故有

$$|S_{a,q}| \le \frac{5\times 4^6}{(11\times 41\times 31\times 61\times 71\times 101)^{3/10}} q^{1-1/5} < 40q^{1-1/5}.$$

引理 3. 当 $2<\alpha\le 5, (\alpha,5)=1$ 时我们有

$$|S_{a,5^\alpha}| \le 5^{\alpha-1}.$$

又我们有

$$\sum_{x=1}^{5} e^{2\pi i\frac{a}{5}x^5} = \sum_{x=1}^{5} e^{2\pi i\frac{a}{5}x} = 0, \quad 当 \quad (a,5)=1\ 时.$$

$$\left|\sum_{1\le x\le 25} e^{2\pi i\frac{a}{25}x^5}\right| = \left|5+10\left(\cos\frac{2\pi a}{25}+\cos\frac{14\pi a}{25}\right)\right|$$

$$\le \begin{cases} 17.8, & 当\ a=3\ 或\ a=4\ 或\ a=22\ 或\ a=21\ 时, \\ 15, & 当\ a\ne 3, a\ne 4, a\ne 22, a\ne 21, a\ne 25\ 时. \end{cases}$$

$$\left|\sum_{1\le x\le 11} e^{2\pi i\frac{a}{11}x^5}\right| = \left|1+10\cos 2\pi\frac{a}{11}\right|$$

$$\le \begin{cases} 9.48, & 当\ a=1\ 或\ a=10\ 时, \\ 8.7, & 当\ a=5\ 或\ a=6\ 时, \\ 5.6, & 当\ a\ne 1, a\ne 10, a\ne 5, a\ne 6, a\ne 11\ 时. \end{cases}$$

证. 现在我们先来证明第一个不等式, 用变换 $x=5^{\alpha-2}\xi+\eta$ 变换和数 $\sum\limits_{1\le x\le 5^\alpha} e^{2\pi i\frac{ax^5}{5^\alpha}}$, 此处 ξ 和 η 相互无关地经过值 $\xi=0,1,2,\ldots,24$ 而 $\eta=1,2,\ldots,5^{\alpha-2}$, 则此和数即化为

$$\begin{aligned}\sum_{1\le x\le 5^\alpha} e^{2\pi i\frac{ax^5}{5^\alpha}} &= \sum_{0\le\xi\le 24}\ \sum_{1\le\eta\le 5^{\alpha-2}} e^{2\pi i\frac{a(5^{\alpha-2}\xi+\eta)^5}{5^\alpha}} \\ &= \sum_{0\le\xi\le 24}\ \sum_{1\le\eta\le 5^{\alpha-2}} e^{2\pi i\frac{a\eta^5+5^{\alpha-1}a\eta^4\xi}{5^\alpha}} \\ &= \sum_{\substack{1\le\eta\le 5^{\alpha-2} \\ \eta\equiv 0(\mathrm{mod}\ 5)}} 25e^{2\pi i\frac{a\eta^5}{5^\alpha}} = 5^{\alpha-1},\end{aligned}$$

由此显见本引理第一个不等式能够成立，其余的几个式子显然亦成立.

引理 4. 假设 p 是一个 ≥ 11 的素数，而 $f(x)=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x$，其中 $(p,a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)=1$，$l$ 是一个正整数则有

$$\left|\sum_{1\leq x\leq p^l} e^{2\pi i\frac{f(x)}{p^l}}\right|\leq \max\{1,\min(p^{1/5},5p^{-3/10})\}p^{l(1-1/5)}.$$

证. 当 $l=1$ 时则由 [5] 的引理 1 我们有

$$\left|\sum_{1\leq x\leq p} e^{2\pi i\frac{f(x)}{p}}\right|\leq \{\min(p^{1/5},5p^{-3/10})\}p^{4/5},$$

故显见本引理能够成立. 现在我们假定 $l>1$，设 $x_1,\ldots,x_i$ 是 $f'(x)\equiv 0\pmod p$ 的不同根，其重数分别为 $m_1,\ldots,m_i$ 则有 $m_1+\cdots+m_i\leq 4$. 我们容易得到

$$\left|\sum_{1\leq x\leq p^l} e^{2\pi i f(x)/p^l}\right|\leq \sum_{1\leq v\leq p}|S_v|,$$

其中

$$S_v=\sum_{\substack{1\leq x\leq p^l\\ x\equiv v\ (\mathrm{mod}\ p)}} e^{2\pi i\frac{f(x)}{p^l}}.$$

我们可以将 x 表示成为 $y+p^{l-1}z$ 的形式，其中 $0<y\leq p^{l-1}$，$0\leq z\leq p-1$，当 $v\neq x_i$ 时我们有

$$\begin{aligned}S_v&=\sum_{\substack{0<y\leq p^{l-1}\\ y\equiv v\ (\mathrm{mod}\ p)}}\ \sum_{0\leq z\leq p-1} e^{2\pi i\frac{f(y+p^{l-1}z)}{p^l}}\\&=\sum_{\substack{0<y\leq p^{l-1}\\ y\equiv v\ (\mathrm{mod}\ p)}}\ \sum_{0\leq z\leq p-1} e^{2\pi i\frac{f(y)+p^{l-1}zf'(y)}{p^l}}=0.\end{aligned}$$

而当 $v=x_i$ 时我们可以得到

$$S_v=S_{x_i}=\left|\sum_{\substack{0<y\leq p^{l-1}\\ y\equiv v\ (\mathrm{mod}\ p)}} pe^{2\pi i f(y)/p^l}\right|,$$

令 σ_i 是一个最大的正整数，它使得 p^{σ_i} 能够整除 $f(py+v)-f(v)$ 的所有 y 的系数，由于

$$f(py+v)-f(v)=pyf'(v)+\frac{(py)^2}{2}f''(v)+\cdots+\frac{(py)^m}{m!}f^{(m)}(v)+\cdots$$

$$f'(v)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),\ldots,f^{(m_i)}(v)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),\ f^{(m_i+1)}(v)\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

故有 $2\le\sigma_i\le m_i+1$, 现在我们对于 l 来进行归纳法，我们得到

$$|S_v|=p^{\sigma_i-1}\left|\sum_{0<y\le p^{l-\sigma_i}}e^{2\pi i\frac{p^{-\sigma_i}\{f(py+v)-f(v)\}}{p^{l-\sigma_i}}}\right|$$
$$\le p^{\sigma_i-1}p^{(l-\sigma_i)(1-1/5)}\max\{1,\min(p^{1/5},5p^{-3/10})\}$$
$$=p^{l(1-1/5)}p^{\sigma_i/5-1}\max\{1,\min(p^{1/5},5p^{-3/10})\},$$

故有

$$\left|\sum_{1\le x\le p^l}e^{2\pi i\frac{f(x)}{p^l}}\right|\le\max\{1,\min(p^{1/5},5p^{-3/10})\}p^{l(1-1/5)}\sum_i p^{\sigma_i/5-1}.$$

如果 $f'(x)\equiv 0\pmod p$ 只有一个四重根则有

$$\sum_i p^{\sigma_i/5-1}\le p^{5/5-1}=1,$$

如果 $f'(x)\equiv 0\pmod p$ 只有四个单根则有

$$\sum_i p^{\sigma_i/5-1}\le 4p^{2/5-1}\le 1,\quad 因为\ p\ge 11,$$

如果 $f'(x)\equiv 0\pmod p$ 只有二个二重根则有

$$\sum_i p^{\sigma_i/5-1}\le 2p^{3/5-1}\le 1,$$

如果 $f'(x)\equiv 0\pmod p$ 有一个三重根，一个单根则有

$$\sum_i p^{\sigma_i/5-1}\le p^{4/5-1}+p^{2/5-1}\le 1,$$

如果 $f'(x)\equiv 0\pmod p$ 有一个二重根，二个单根则有

$$\sum_i p^{\sigma_i/5-1}\le p^{3/5-1}+2p^{2/5-1}\le 1,$$

故得 $\sum_i p^{\sigma_i/5-1}\le 1$. 因此本引理得证.

引理 5. 假定

$$f(x)=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x,$$

其中 $(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,q)=1$, 则有

$$\left|\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}}\right| \le 10^{15} q^{1-1/5}.$$

证. 由引理 4 及 [3] 中引理 1.3, 引理 1.6 和当 $p \ge 223$ 时有 $5p^{-3/10} \le 1$ 及

$$\begin{aligned}&(11\times13\times17\times19\times23\times29\times31)^{1/5}5^{36}(41\times43\times37\times47\times53\times59\\&\quad\times61\times67\times71\times73\times79\times83\times89\times97\times101\times103\times107\times109\\&\quad\times113\times127\times131\times137\times139\times149\times151\times157\times163\times173\\&\quad\times167\times179\times181\times191\times193\times197\times199\times211)^{-3/10}\\&\le 4\times10^6,\end{aligned}$$

故引理易得证明.

引理 6. 设 $i \le q$ 及 $(a,q)=1$, 则我们有

$$\left|\sum_{M<x\le M+i} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right| \le (10)^{15} q^{1-1/5}(\ln q+1).$$

证. 由于

$$\begin{aligned}\left|\sum_{M<x\le M+i} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right| &= \left|\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q}\sum_{M<j\le M+i}\sum_{M<x\le M+q} e^{2\pi i\frac{ax^5+bx}{q}} e^{-2\pi i\frac{bj}{q}}\right|\\&\le \frac{i}{q}\left|\sum_{M<x\le M+q} e^{2\pi i\frac{ax^5}{q}}\right| + \sum_{b=1}^{q-1}\frac{1}{2\left(\frac{b}{q}\right)}\left|\sum_{M<x\le M+q} e^{2\pi i\frac{ax^5+bx}{q}}\right|\cdot\frac{1}{q}\\&\le \frac{i}{q}\left|\sum_{1\le x\le q} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right| + \sum_{b=1}^{q-1}\frac{1}{b}\left|\sum_{1\le x\le q} e^{2\pi i\frac{ax^5+bx}{q}}\right|,\end{aligned}$$

由引理 2 和引理 5 即可得知本引理能够成立.

引理 7. 设 p 是一个 $\ge 10^{150}$ 的整数, $\alpha=\frac{a}{q}+z$, $|z|\le\frac{1}{10qp^4}$, $(a,q)=1$, $p^{\frac{1}{2}}\le q\le p^{1+\frac{1}{25}}$ 则有

$$\left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\alpha x^5}\right| \le p^{1-1/25}.$$

证. 我们先来考虑 $q \ge \frac{p}{2}$ 的情况, 此时我们有

$$\left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\alpha x^5}\right| \le \left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\cos 2\pi zx^5\right| + \left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\sin 2\pi zx^5\right|.$$

由于 $|zp^5|\le\frac{1}{5}$ 故当 x 经过值 $x=1,2,\ldots,p$ 时, 函数 $\cos 2\pi zx^5$ 和 $\sin 2\pi zx^5$

的符号都是不变的，它们的绝对值都是 x 的单调函数，故由 [6] 的 (5.2.1) 式我们有

$$\left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\alpha x^5}\right| \le 4\max_{1\le i\le p}\left|\sum_{1\le x\le i} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right|,$$

故由引理 6 得知本引理能够成立．现在我们来考虑 $q\le \frac{p}{2}$ 时的情况，我们可以把 x 所经过的区间分成为 $\le \frac{2p}{q}+1$ 个子区间使得其中的每一个子区间的长度 $\le \frac{q}{2}$，现在我们来考虑其中的某一个子区间，例如 $\left[M, M+\frac{q}{2}\right]$ 则有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{M\le x\le M+q/2} e^{2\pi i\alpha x^5}\right| &= \left|\sum_{M\le x\le M+q/2} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5+2\pi iz(x^5-M^5)}\right|\\ &\le \left|\sum_{M\le x\le M+q/2} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\cos 2\pi z(x^5-M^5)\right|\\ &\quad+\left|\sum_{M\le x\le M+q/2} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\sin 2\pi z(x^5-M^5)\right|.\end{aligned}$$

由于

$$|z(x^5-M^5)|\le\left(\frac{q}{2}\right)(5p^4)\left(\frac{1}{10qp^4}\right)\le\frac{1}{4},$$

故 $\cos 2\pi z(x^5-M^5)$ 和 $\sin 2\pi z(x^5-M^5)$ 的符号都是不变的，并且其绝对值都是 x 的单调函数．故由 [6] 中的 (5.2.1) 式我们有

$$\left|\sum_{M\le x\le M+q/2} e^{2\pi i\alpha x^5}\right| \le 4\max_{1\le i\le q/2}\left|\sum_{M\le x\le M+i} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right|.$$

故由引理 6 得到当 $q\ge p^{1-1/20}$ 时此时有

$$\left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\alpha x^5}\right| \le \left(\frac{2p}{q}+1\right)(4)(10)^{15}(\ln q+1)q^{1-1/5}\le p^{1-1/25}$$

$$(\text{因为 } p\ge 10^{150}),$$

而当 $p^{1/2}\le q\le p^{1-1/20}$ 时则有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\alpha x^5} &= \sum_{1\le y\le q} e^{2\pi i\frac{a}{q}y^5}\sum_{-yq^{-1}<t\le(p-y)q^{-1}} e^{2\pi iz(qt+y)^5}\\ &= \frac{1}{q}\left(\sum_{1\le y\le q} e^{2\pi i\frac{a}{q}y^5}\right)\int_0^p e^{2\pi izx^5}dx+6Q_1q,\quad |Q_1|\le 1.\end{aligned}$$

故由引理 2 显见本引理能够成立.

引理 8. 我们用 $d(m)$ 来代表 m 的因子的个数则有

$$\sum_{1\le i\le n}\{d(i)\}^j \le A_j n(\ln n+j)^{2^j-1},$$

其中

$$A_1=1,\quad A_2=\frac{1}{3},\quad A_3=\frac{1}{24},\quad A_4=\frac{1}{24\times 192}.$$

证. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} d(i) &= \sum_{1\le i\le n}\left(\sum_{j|i}1\right)=\sum_{1\le j\le n}\left[\frac{n}{j}\right]\\ &\le \sum_{1\le j\le n}\frac{n}{j}\le n+\int_1^n \frac{n}{t}\,dt\le n\ (\ln n+1). \qquad (1)\end{aligned}$$

所以说本引理当 $j=1$ 时是成立的，我们用记号 $K(m_1,m_2,\ldots,m_l)$ 来代表 $m_1,m_2,\ldots,m_t$ 的最小公倍数我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i\le n}(d(i))^2=\sum_{1\le i\le n}\left(\sum_{d|i}1\right)^2=\sum_{1\le m_1\le n}\ \sum_{1\le m_2\le n}\left[\frac{n}{K(m_1,m_2)}\right]\\ &\le \sum_{1\le m_1\le n}\ \sum_{1\le m_2\le n}\frac{n}{K(m_1,m_2)}\le \sum_{1\le m_1\le n}\ \sum_{d|m_1}\ \sum_{1\le m_2=dm_3\le n}\frac{n}{m_1m_3}\\ &\le \sum_{1\le m_4\le n}\ \sum_{1\le m_1=m_4m_5\le n}\ \sum_{1\le m_3\le n/m_4}\frac{n}{m_3m_4m_5}\le \sum_{1\le m_4\le n}\frac{n\left(\ln\dfrac{n}{m_4}+1\right)^2}{m_4}\\ &\le n\ (\ln n+1)^2+\int_1^n\frac{n\left(\ln\dfrac{n}{t}+1\right)^2}{t}\,dt\\ &=n\ (\ln n+1)^2+\int_1^n\frac{n}{t}\{(\ln n)^2+1+(\ln t)^2\\ &\quad -2\ln n\ln t-2\ln t+2\ln n\}dt\\ &=n\ (\ln n+1)^2+n\left\{\frac{1}{3}(\ln n)^3+(\ln n)^2+\ln n\right\}\\ &\le\frac{n}{3}(\ln n+2)^3, \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\sum_{1\le i\le n}\frac{d(i)}{i}=\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{i}\left[\left\{\sum_{1\le j\le i}d(j)\right\}-\left\{\sum_{1\le j\le i-1}d(j)\right\}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{1\le i\le n} d(i)\right\} + \sum_{1\le i\le n}\left\{\frac{\sum\limits_{1\le j\le i} d(j)}{i} - \frac{\sum\limits_{1\le j\le i} d(j)}{i+1}\right\}\\
&= \frac{\sum\limits_{1\le i\le n} d(i)}{n+1} + \sum_{1\le i\le n}\frac{\sum\limits_{1\le j\le i} d(j)}{i(i+1)}\\
&\le (\ln n+1) + \sum_{1\le i\le n}\frac{\ln i+1}{i+1}\\
&\le \ln n+1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_i^{i+1}\frac{\ln t+1}{t}\,dt\right)+\frac{\ln n+1}{n+1}\\
&\le \ln n+2+\int_1^n\frac{\ln t+1}{t}\,dt\\
&= \frac{1}{2}(\ln n)^2+2\ln n+2\\
&= \frac{1}{2}(\ln n+2)^2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le n}\frac{(d(i))^2}{i} &= \frac{\sum\limits_{1\le i\le n}(d(i))^2}{n+1} + \sum_{1\le i\le n}\frac{\sum\limits_{1\le j\le i}(d(j))^2}{i(i+1)}\\
&\le \frac{1}{3}(\ln n+2)^3 + \sum_{1\le i\le n}\frac{\frac{1}{3}(\ln i+2)^3}{i+1}\\
&\le \frac{1}{3}(\ln n+2)^3+\frac{1}{3}(\ln n+2)^2+\int_1^n\frac{\frac{1}{3}(\ln t+2)^3}{t}\,dt\\
&\le \frac{1}{12}(\ln n+2)^4+\frac{1}{3}(\ln n+2)^3+\frac{1}{3}(\ln n+2)^2\\
&\le \frac{1}{12}(\ln n+3)^4.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

由 (3) 和 (4) 二式我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le n}(d(i))^3 &= \sum_{1\le i\le n}\left(\sum_{d\mid i}1\right)^3\\
&\le \sum_{1\le m_1\le n}\ \sum_{1\le m_2\le n}\ \sum_{1\le m_3\le n}\left[\frac{n}{K(m_1,m_2,m_3)}\right]\\
&\le \sum_{1\le m_1\le n}\ \sum_{1\le m_2\le n}\ \sum_{1\le m_3\le n}\frac{n}{K(m_1,m_2,m_3)}
\end{aligned}
$$

$$\leq \sum_{1\leq m_1\leq n} \sum_{d_1|m_1} \sum_{1\leq m_2=d_1m_4\leq n} \sum_{1\leq m_3\leq n} \frac{n}{K(m_1m_4, m_3)}$$

$$\leq \sum_{1\leq m_1\leq n} \sum_{d_1|m_1} \sum_{1\leq m_4\leq \frac{n}{d_1}} \sum_{d_2|m_1m_4} \sum_{1\leq m_3=d_2m_5\leq n} \frac{n}{m_1m_4m_5}$$

$$\leq \sum_{1\leq m_1\leq n} \frac{n}{m_1} \sum_{d_1|m_1} \sum_{1\leq m_4\leq n/d_1} \frac{1}{m_4} \sum_{d_2|m_1m_4} \sum_{1\leq m_5\leq n/d_2} \frac{1}{m_5}$$

$$\leq n\ (\ln n+1) \sum_{1\leq m_1\leq n} \frac{1}{m_1} \sum_{d_1|m_1} \sum_{1\leq m_4\leq n/d_1} \frac{d(m_1)d(m_4)}{m_4}$$

$$\leq n\ (\ln n+1) \sum_{1\leq m_1\leq n} \frac{(d(m_1))^2}{m_1} \sum_{1\leq m_4\leq n} \frac{d(m_4)}{m_4}$$

$$\leq \frac{1}{24} n\ (\ln n+3)^7, \tag{5}$$

$$\sum_{1\leq i\leq n} \frac{(d(i))^3}{i} = \frac{\sum\limits_{1\leq i\leq n} (d(i))^3}{n+1} + \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\sum\limits_{1\leq j\leq i} (d(j))^3}{i(i+1)}$$

$$\leq \frac{1}{24}(\ln n+3)^7 + \sum_{1\leq i\leq n} \frac{(\ln i+3)^7}{24(i+1)}$$

$$\leq \frac{1}{24}(\ln n+3)^7 + \frac{3}{48}(\ln n+3)^6 + \int_1^n \frac{(\ln t+3)^7}{24t} dt$$

$$\leq \frac{1}{192}(\ln n+4)^8. \tag{6}$$

由 (1), (3), (4) 和 (6) 式我们有

$$\sum_{1\leq i\leq n} (d(i))^4 = \sum_{1\leq i\leq n} \Big(\sum_{j|i} 1\Big)^4$$

$$= \sum_{1\leq m_1\leq n} \sum_{1\leq m_2\leq n} \sum_{1\leq m_3\leq n} \sum_{1\leq m_4\leq n} \frac{n}{K(m_1, m_2, m_3, m_4)}$$

$$\leq \sum_{1\leq m_1\leq n} \sum_{d|m_1} \sum_{1\leq m_2\leq \frac{n}{d}} \sum_{d_1|m_1m_2} \sum_{1\leq m_3\leq \frac{n}{d_1}} \sum_{d_2|m_1m_2m_3} \sum_{1\leq m_4\leq \frac{n}{d_2}} \frac{n}{m_1m_2m_3m_4}$$

$$\leq n\ (\ln n+1) \sum_{1\leq m_1\leq n} \frac{d(m_1)}{m_1} \sum_{d|m_1} \sum_{1\leq m_2\leq \frac{n}{d}} \frac{d(m_2)}{m_2} \sum_{d_1|m_1m_2} \sum_{1\leq m_3\leq \frac{n}{d}} \frac{d(m_3)}{m_3}$$

$$\leq \frac{1}{2} n\ (\ln n+2)^3 \sum_{1\leq m_1\leq n} \frac{(d(m_1))^2}{m_1} \sum_{d|m_1} \sum_{1\leq m_2\leq \frac{n}{d}} \frac{(d(m_2))^2}{m_2}$$

$$\le \frac{1}{24} n\ (\ln n+3)^7 \sum_{1\le m_1\le n} \frac{(d(m_1))^3}{m_1}$$
$$\le \frac{1}{(24)(192)} n\ (\ln n+4)^{15}. \tag{7}$$

因此本引理得到证明.

引理 9. 假定 $\alpha=\frac{a}{q}+z$, $(a,q)=1$, p 是一个 $\ge 10^{150}$ 的整数, $p^{1+1/25}\le q\le 10p^4$, $|z|\le \frac{1}{10qp^4}$ 则我们有

$$\left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\alpha x^5}\right| \le p^{1-1/25}+(2^5)^{1/8}(34)^{1/16}p^{19/20}(\ln p+4)^{\frac{1}{16}(13\frac{2}{15})}.$$

证. 我们有

$$\left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right|^2 \le p+2\left|\sum_{\substack{x=1\\x>y}}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i\frac{a}{q}(x^5-y^5)}\right|. \tag{8}$$

令

$$l_1=x-y,\ f(x,y)=5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4,$$
$$h(x,y,z)=20x^3yz+30x^2yz^2+20xyz^3+30x^2y^2z+30xy^2z^2+20xy^3z,$$

则我们有

$$\left(\left|\sum_{\substack{x=1\\x>y}}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i\frac{a}{q}(x^5-y^5)}\right|\right)^2=\left(\left|\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{l_1=1}^{p-y} e^{2\pi i\frac{a}{q}\{(y+l_1)^5-y^5\}}\right|\right)^2$$
$$\le\left(\sum_{l_1=1}^{p}\left|\sum_{y=1}^{p-l_1} e^{2\pi i\frac{a}{q}f(y,l_1)}\right|\right)^2$$
$$\le p\sum_{l_1=1}^{p}\left|\sum_{y=1}^{p-l_1} e^{2\pi i\frac{a}{q}f(y,l_1)}\right|^2$$
$$\le p^3+2p\sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2} e^{2\pi i\frac{a}{q}\{f(y_1+l_2,l_1)-f(y_1,l_1)\}}\right|$$
$$=p^3+2p\sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2} e^{2\pi i\frac{a}{q}h(y_1,l_1,l_2)}\right|. \tag{9}$$

令 $g(x,y,z,w)=60x^2yzw+60xyzw^2+60xyz^2w+60xy^2zw$, 由于 $\sum_{l_1=1}^{p}(p-l_1)=\frac{1}{2}p(p-1)$, 故有

$$\left(2\sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2}e^{2\pi i\frac{a}{q}h(y_1,l_1,l_2)}\right|\right)^2\le p^2\sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2}e^{2\pi i\frac{a}{q}h(y_1,l_1,l_2)}\right|^2$$

$$\le p^5+2p^2S, \tag{10}$$

其中

$$S=\sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\sum_{l_3=1}^{p-l_1-l_2}\left|\sum_{y_2=1}^{p-l_1-l_2-l_3}e^{2\pi i\frac{a}{q}g(y_2,l_1,l_2,l_3)}\right|,$$

对于给定的正整数 z, 我们定义 $\tau_3(z)$ 是方程式 $z=l_1l_2l_3$ 的解 (l_1,l_2,l_3) 的组数，其中 $1\le l_1\le p$, $1\le l_2\le p-l_1$, $1\le l_3\le p-l_1-l_2$, 我们定义 $\tau_2(z)$ 是方程式 $z=l_1l_2$ 的解的组数，其中 $1\le l_1\le p$, $1\le l_2\le p-l_1$, 我们用 $K(i_1,i_2)$ 来表示 i_1 和 i_2 的最小公倍数， $d(i)$ 表示 i 的因子的个数则有

$$\begin{aligned}
\sum_{0<z\le p^3}\tau_3^2(z)&\le\sum_{0<z\le p^3}\Bigg(\sum_{\substack{d|z\\1\le d\le p^2,\,z/d\le p}}\tau_2(d)\Bigg)^2\\
&\le\sum_{1\le i_1\le p^2}\sum_{1\le i_2\le p^2}\tau_2(i_1)\tau_2(i_2)\frac{i_1p}{K(i_1,i_2)}\\
&\le\sum_{1\le i_1\le p^2}\sum_{\substack{d|i_1\\1\le d\le p,\,i_1/d\le p}}\sum_{1\le i_2\le p}\tau_2(i_2)\frac{i_1p}{K(i_1,i_2)}\\
&\le\sum_{1\le i_3\le p}\sum_{1\le i_1=i_3i_4\le i_3p}\sum_{1\le i_2\le p^2}\tau_2(i_2)\frac{i_3i_4p}{K(i_3i_4,i_2)}\\
&\le\sum_{1\le i_3\le p}\sum_{1\le i_4\le p}\sum_{d|i_3i_4}\sum_{1\le i_2=di_5\le p^2}\tau_2(di_5)\frac{p}{i_5}\\
&\le\sum_{1\le i_3\le p}\sum_{1\le i_4\le p}\sum_{d|i_3i_4}\sum_{1\le i_5\le p^2}d(i_5)d(d)\frac{p}{i_5}\\
&\le\sum_{1\le i_6\le p}\sum_{1\le i_7\le p}\sum_{1\le i_3=i_6i_8\le p}\sum_{1\le i_4=i_7i_9\le p}\sum_{1\le i_5\le p^2}\frac{pd(i_5)d(i_6)d(i_7)}{i_5}\\
&\le p^3\sum_{1\le i_5\le p^2}\frac{d(i_5)}{i_5}\sum_{1\le i_6\le p}\frac{d(i_6)}{i_6}\sum_{1\le i_7\le p}\frac{d(i_7)}{i_7}\\
&\le\frac{1}{2}p^3(\ln p+2)^6.
\end{aligned}\tag{11}$$

我们使用记号 $\sum\limits_{0<z\le p^3}^{(i)}$ 来表示一个和式，其中的 z 经过所指定的区间 $0<z\le p^3$ 并且满足条件 $\frac{1}{2}(\ln p+2)^{6+i/3}\le\tau_3(z)<\frac{1}{2}(\ln p+2)^{6+(1+i)/3}$. 我们使用记号 $\sum\limits_{0<z\le p^3}^{(0)}$ 来表示一个和式，其中的 z 经过所指定的区间 $0<z\le p^3$ 并且满足条件 $1\le\tau_3(z)<\frac{1}{2}(\ln p+2)^{6\frac{1}{3}}$. 我们使用记号 $\sum\limits_{l_1l_2l_3=z}$ 来表示一个和式，其中的 (l_1,l_2,l_3) 经过区间 $1\le l_1\le p$, $1\le l_2\le p-l_1$, $1\le l_3\le p-l_1-l_2$ 并且满足条件 $z=l_1l_2l_3$, 那末我们有

$$\begin{aligned}|S|^2&\le\left\{\sum_{i=0}^{50}|S_i|+\left(\sum_{i=51}^{[\ln p]}|S_i|\right)\right\}^2\le 52\left\{\sum_{i=0}^{50}|S_i|^2+\left(\sum_{i=51}^{[\ln p]}|S_i|\right)^2\right\}\\&\le 52\left\{\sum_{i=0}^{50}|S_i|^2+\ln p\sum_{i\ge 51}^{[\ln p]}|S_i|^2\right\},\end{aligned}\tag{12}$$

其中

$$S_i=\sum_{0<z\le p^3}^{(i)}\sum_{l_1l_2l_3=z}\left|\sum_{y_2=1}^{p-l_1-l_2-l_3}e^{2\pi i\frac{a}{q}g(y_2,l_1,l_2,l_3)}\right|.$$

由于当 $i\ge 1$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{0<z\le p^3}^{(i)}\tau_3(z)&\le\frac{2}{(\ln p+2)^{6+i/3}}\sum_{0<z\le p^3}^{(i)}\tau_3^2(z)\\&\le\frac{2}{(\ln p+2)^{6+i/3}}\sum_{0<z\le p^3}\tau_3^2(z)\le p^3(\ln p+2)^{-i/3},\end{aligned}$$

故当 $i\ge 1$ 时有

$$|S_i|^2\le p^3(\ln p+2)^{-i/3}\sum_{0<z\le p^3}^{(i)}\sum_{l_1l_2l_3=z}\left|\sum_{y_2=1}^{p-l_1-l_2-l_3}e^{2\pi i\frac{a}{q}g(y_2,l_1,l_2,l_3)}\right|^2.$$

我们使用 [4] 中 p.254 的引理 6 得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{y_2=1}^{p-l_1-l_2-l_3}e^{2\pi i\frac{a}{q}g(y_2,l_1,l_2,l_3)}\right|^2&\le p+2\sum_{l_4=1}^{p-l_1-l_2-l_3}\left|\sum_{y_3=1}^{p-l_1-l_2-l_3-l_4}e^{2\pi i\frac{a}{q}(120y_3l_1l_2l_3l_4)}\right|\\&\le p+2\sum_{l_4=1}^{p-l_1-l_2-l_3}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}l_1l_2l_3l_4\right)}\right)\end{aligned}$$

$$\leq p + 2\sum_{l=1}^{p} \min\left(p, \frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right). \tag{13}$$

由于在 $\sum^{(i)}$ 中的 z 满足

$$\frac{1}{2}(\ln p + 2)^{6+i/3} \leq \tau_3(z) < \frac{1}{2}(\ln p + 2)^{6+(i+1)/3},$$

故当 $i \geq 1$ 时有

$$|S_i|^2 \leq \frac{1}{2}p^3(\ln p + 2)^{6+1/3} \sum_{0<z\leq p^3}^{(i)} \left\{p + 2\sum_{l=1}^{p} \min\left(p, \frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\}. \tag{14}$$

由 (13) 式我们有

$$\begin{aligned}|S_0|^2 &\leq p^3 \sum_{0<z\leq p^3}^{(0)} \sum_{l_1 l_2 l_3 = z} \left|\sum_{y_2=1}^{p-l_1-l_2-l_3} e^{2\pi i \frac{a}{q} g(y_2,l_1,l_2,l_3)}\right|^2 \\ &\leq p^3 \sum_{0<z\leq p^3}^{(0)} \sum_{l_1 l_2 l_3 = z} \left\{p + 2\sum_{l=1}^{p} \min\left(p, \frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}p^3(\ln p + 2)^{6\frac{1}{3}} \sum_{0<z\leq p^3}^{(0)} \left\{p + 2\sum_{l=1}^{p} \min\left(p, \frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\},\end{aligned} \tag{15}$$

现在我们要对 $i \geq 51$ 时的和式 S_i 进行估值，由于 $i \geq 51$, $p \geq 10^{150}$ 及 [7] 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{0<z\leq p^3}^{(i)} \tau_3(z) &\leq \frac{4}{\{(\ln p + 2)^{6+i/3}\}^2} \sum_{0<z\leq p^3}^{(i)} \tau_3^3(z) \\ &\leq \frac{4}{\{(\ln p + 2)^{6+i/3}\}^2} \sum_{0<z\leq p^3} d_3^3(z) \\ &\leq \frac{3^{16}}{2^{13}} p^3 (\ln p + 9)^{26} \cdot 4 \frac{1}{(\ln p + 2)^{12+2i/3}} \\ &\leq p^3(\ln p + 2)^{-i/3-1}.\end{aligned} \tag{16}$$

由 (13) 及 (16) 式，当 $i \geq 51$ 时我们得到

$$|S_i|^2 \leq p^3(\ln p + 2)^{-i/3-1} \sum_{0<z\leq p^3}^{(i)} \sum_{l_1 l_2 l_3 = z} \left|\sum_{y_2=1}^{p-l_1-l_2-l_3} e^{2\pi i \frac{a}{q} g(y_2,l_1,l_2,l_3)}\right|^2$$

$$\le p^3(\ln p+2)^{-i/3-1}\sum_{0<z\le p^3}^{(i)}\sum_{l_1l_2l_3=z}\left\{p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\}$$

$$\le \frac{1}{2}p^3(\ln p+2)^{5+1/3}\sum_{0<z\le p^3}^{(i)}\left\{p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\},$$

故有

$$(\ln p)\sum_{i\ge 51}^{[\ln p]}|S_i|^2$$
$$\le \frac{1}{2}p^3(\ln p+2)^{6\frac{1}{3}}\sum_{0<z\le p^3}^{*}\left\{p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\}. \tag{17}$$

其中 $\sum\limits_{0<z\le p^3}^{*}$ 乃表示 z 经过所指定的区间 $0<z\le p^3$, 并且满足条件

$$\tau_3(z)\ge\frac{1}{2}(\ln p+2)^{23}.$$

由 (12), (14), (15) 和 (17) 式，我们有

$$|S|^2\le 26p^3(\ln p+2)^{6\frac{1}{3}}\sum_{0<z\le p^3}^{**}\left\{p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\}.$$

其中 $\sum\limits_{0<z\le p^3}^{**}$ 乃表示 z 经过所指定的区间 $0<z\le p^3$ 并且满足条件 $\tau_3(z)\ge 1$, 令 $z=l_1l_2l_3$. 其中 $1\le l_1\le p$, $1\le l_2\le p-l_1$, $1\le l_3\le p-l_1-l_2$, 故有 $z\le l_1l_2(p-l_1-l_2)$, 对于一个给定的 l_1 而使 $l_1l_2(p-l_1-l_2)$ 取最大值的 l_2 必须满足条件 $l_1(p-l_1-l_2)-l_1l_2=0$, 故有 $l_2=\frac{1}{2}(p-l_1)$, $z\le\frac{1}{4}l_1(p-l_1)^2$, 又使 $l_1(p-l_1)^2$ 取最大值的 l_1 必须满足条件 $(p-l_1)^2-2l_1(p-l_1)=0$. 故有 $l_1=\frac{p}{3}$ 而 $z\le\frac{1}{4}\left(\frac{p}{3}\right)\left(p-\frac{p}{3}\right)^2\le\frac{1}{3^3}p^3$, 故有

$$|S|^2\le 26p^3(\ln p+2)^{6\frac{1}{3}}\sum_{0<z\le p^3/3^3}\left\{p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}zl\right)}\right)\right\}. \tag{18}$$

我们使用记号 $h(i)$ 来代表将一个整数 i 表示成 $i=i_1i_2$ 的表法的个数，其中 $1\le i_1\le p$, $1\le i_2\le\frac{1}{3^3}p^3$. 现在我们要来估计和式 $\sum\limits_{1\le i\le p^4/3^3}(h(i))^5$. 由

于 (3), (4), (6) 和 (7) 我们有

$$\sum_{1\le i\le p^4/3^3}(h(i))^5=\sum_{1\le i\le p^4/3^3}\Bigg(\sum_{\substack{d|i\\1\le d\le p,\, i/d\le p^3/3^3}}1\Bigg)^5$$

$$\le\sum_{1\le i_1\le p}\sum_{1\le i_2\le p}\sum_{1\le i_3\le p}\sum_{1\le i_4\le p}\sum_{1\le i_5\le p}\frac{\frac{1}{3^3}p^3i_1}{K(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)}$$

$$\le\sum_{1\le i_1\le p}\sum_{d|i_1}\sum_{1\le i_2\le p/d}\sum_{d_1|i_1i_2}\sum_{1\le i_3\le p/d_1}$$

$$\cdot\sum_{d_2|i_1i_2i_3}\sum_{1\le i_4\le p/d_2}\sum_{d_3|i_1i_2i_3i_4}\sum_{1\le i_5\le p/d_3}\frac{\frac{1}{3^3}p^3}{i_2i_3i_4i_5}$$

$$\le\frac{1}{3^3}p^3(\ln p+1)\sum_{1\le i_1\le p}\sum_{d|i_1}\sum_{1\le i_2\le p/d}\sum_{d_1|i_1i_2}$$

$$\cdot\sum_{1\le i_3\le p/d_1}\sum_{d_2|i_1i_2i_3}\sum_{1\le i_4\le p/d}\frac{d(i_1)d(i_2)d(i_3)d(i_4)}{i_2i_3i_4}$$

$$\le\frac{1}{2(3^3)}p^3(\ln p+2)^3\sum_{1\le i_1\le p}\sum_{d|i_1}\sum_{1\le i_2\le p/d}$$

$$\cdot\sum_{d_1|i_1i_2}\sum_{1\le i_3\le p/d_1}\frac{(d(i_1))^2(d(i_2))^2(d(i_3))^2}{i_2i_3}$$

$$\le\frac{1}{(24)(3^3)}p^3(\ln p+3)^7\sum_{1\le i_1\le p}\sum_{d|i_1}\sum_{1\le i_2\le p/d}\frac{(d(i_1))^3(d(i_2))^3}{i_2}$$

$$\le\frac{1}{(24)(3^3)(192)}p^3(\ln p+4)^{15}\sum_{1\le i_1\le p}(d(i_1))^4$$

$$\le\frac{1}{(24)^2(192)^23^3}p^4(\ln p+4)^{30}.\tag{19}$$

我们使用记号 $\sum_{a<m\le b}'$ 来表示 m 经过 $(a,b]$ 中满足条件

$$h(m)\ge\frac{p^{1/5}(\ln p+4)^{29/5}}{3^22^3\sqrt{2}}$$

的所有整数，则有

$$|S|^2\le 52p^3(\ln/p+2)^{6\frac{1}{3}}\left\{\frac{1}{2(3^3)}p^4+\sum_{0<i\le p^4/3^3}h(i)\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}i\right)}\right)\right\}.$$

又有

$$\sum_{0<i\le p^4/3^3} h(i)\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}i\right)}\right)$$
$$\le \sum_{0<i\le p^4/3^3}{}'(h(i))p+\frac{p^{1/5}(\ln p+4)^{29/5}}{3^2 2^3\sqrt{2}}\sum_{0<i\le p^4/3^3}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}i\right)}\right). \tag{20}$$

又我们有

$$\sum_{0<i\le p^4/3^3}{}'h(i)\le 3^8 2^{14}p^{-4/5}(\ln p+4)^{-116/5}\sum_{0<i\le p^4/3^3}(h(i))^5$$
$$\le \frac{3}{16}p^{3\frac{1}{5}}(\ln p+4)^{34/5}. \tag{21}$$

而当 $\frac{1}{3^3}p^4\le q\le 10p^4$ 时, 设 $(120a,q)=\delta$, $\frac{q}{\delta}=q'$, 则由 [4] 中的 p.255 的引理 8a 有

$$\sum_{0<i\le p^4/3^3}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}i\right)}\right)\le(3p+q'\ln q')\left(\frac{1}{3^3}p^4q'^{-1}+1\right)$$
$$\le 10p^4\ln 10p^4+3p\le 40p^4(\ln p+4). \tag{22}$$

而当 $p^{1+1/25}\le q\le\frac{1}{3^3}p^4$ 时设 $(120a,q)=\delta$, $\frac{q}{\delta}=q'$, 则有

$$\sum_{0<i\le p^4/3^3}\min\left(p,\frac{1}{2\left(120\frac{a}{q}i\right)}\right)\le\left(\frac{1}{3^3}p^4q'^{-1}+1\right)(3p+q'\ln q')$$
$$\le 40p^4(\ln p+4). \tag{23}$$

由于 $p\ge 10^{150}$ 及 (20), (21), (22) 和 (23) 式我们有

$$|S|^2\le 33p^{7\frac{1}{5}}(\ln p+4)^{13\frac{2}{15}},$$

$$2\sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2}e^{2\pi i\frac{a}{q}h(y_1,l_1,l_2)}\right|\le\sqrt{2}\left(33\,\frac{1}{5}\right)^{1/4}p^{14/5}(\ln p+4)^{\frac{1}{4}(13\frac{2}{15})},$$

$$\left|\sum_{\substack{x=1\\x>y}}^{p}\sum_{y=1}^{p}e^{2\pi i\frac{a}{q}(x^5-y^5)}\right|\le(2)^{1/4}\left(33\,\frac{1}{3}\right)^{1/8}p^{19/10}(\ln p+4)^{\frac{1}{8}(13\frac{2}{15})},$$

$$\left|\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right|\le(2^5)^{1/8}(34)^{1/16}p^{19/20}(\ln p+4)^{\frac{1}{16}(13\frac{2}{15})},$$

$$\left|\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\alpha x^5}-\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5}\right|\le\sum_{x=1}^{p}|e^{2\pi izx^5}-1|\le 2p|\sin\pi zp^5|\le p^{1-1/25},$$

故本引理得证.

在下面我们将采用某些记号： N 是一个 $\ge 10^{785}$ 的整数， $p=[N^{1/5}]$; $\tau=10p^4$; N_0 与 N_1 是整数并且满足条件 $\frac{1}{2}N\le N_0\le N$, $N_0-p^{4\frac{1}{5}}\le N_1\le N_0$, 符号 $W(N_1)$ 是用来记将一个数 N_1 表成为

$$N_1=x_1^5+x_2^5+\cdots+x_{15}^5$$

的表法的种数，式中 $x_1,x_2,\ldots,x_{15}$ 是正整数，我们有

$$W(N_1)=\int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1}T_\alpha^{15}e^{-2\pi iN_1\alpha}d\alpha,\quad T_\alpha=\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\alpha x^5}.$$

包含所有满足条件

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\quad (a,q)=1;\quad -\frac{1}{q\tau}\le z\le\frac{1}{q\tau},\quad 0<q\le p^{\frac{1}{2}};\quad \tau=10p^4$$

之 α 的区间称为基本区间，从区间 $-\tau^{-1}\le a\le-\tau^{-1}+1$ 中除去基本区间之后所留下之 α 的区间称做余区间，积分 $W(N_1)$ 中对应于基本区间之部分我们用 $W_0(N_1)$ 来代表，积分 $W(N_1)$ 中对应于余区间部分，我们用 $W_1(N_1)$ 来表示，于是有

$$W(N_1)=W_0(N_1)+W_1(N_1).$$

又我们采用记号

$$R(N_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^p e^{2\pi izx^5}dx\right)^{15}e^{-2\pi izN_0}dz,$$

$$S_{a,q}=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi i\frac{a}{q}x^5},$$

$$A(q,N_1)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1},\quad \mathfrak{S}(N_1)=\sum_{q=1}^{\infty}A(q,N_1).$$

引理 10. 当 $N_0\ge 10^{780}$, $N_0-p^{4\frac{1}{5}}\le N_1\le N_0$ 时我们有

$$|W_0(N_1)-R(N_0)\mathfrak{S}(N_1)|\le 10^{23}p^{9\frac{3}{10}}+10^{30}p^{-1/2}R(N_0),$$

其中

$$R(N_0) \geq (3-0.0001)T_{15}N_0^2, \qquad T_{15} = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right)^{15}}{\Gamma(3)}, \quad \mathfrak{S}(N_1) \geq 0.1.$$

证. 假定 α 是属于 $\frac{a}{q}$ 的基本区间，用变换 $x = qt+s$ 变换和数 T_α，这里的 s 经过数目 $s = 0,1,2,\ldots,q-1$. 对于给定的 s,t 则跑过区间 $-sq^{-1} < t \leq (p-s)q^{-1}$ 中的整数，于是以 z 表 α 即得

$$T_\alpha = \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{-sq^{-1}<t\leq(p-s)q^{-1}} e^{2\pi i(\frac{a}{q}s^5+z(qt+s)^5)} = \sum_{s=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{a}{q}s^5} D_s(z),$$

$$D_s(z) = \sum_{-sq^{-1}<t\leq(p-s)q^{-1}} e^{2\pi iz(qt+s)^5},$$

但在区间 $-sq^{-1} < t \leq (p-s)q^{-1}$ 中我们有 $\frac{d}{dt}z(qt+s)^5 \leq \frac{1}{2}$, 故由 [4] 中 p. 261 的引理 13 可以得到

$$D_s = \int_{-sq^{-1}}^{(p-s)q^{-1}} e^{2\pi iz(qt+s)^5}dt + 4Q_1 = \frac{1}{q}\int_0^p e^{2\pi izx^5}dx + 4Q_1, \quad |Q_1| \leq 1.$$

由是

$$T_\alpha = \psi\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right) + 4Q_2q, \quad \psi = \int_0^p e^{2\pi izx^5}dx, \quad |Q_2| \leq 1. \tag{24}$$

但由引理 2 及 [4] 中的 p. 262 的引理 14, a 我们有

$$\left|\psi\frac{S_{a,q}}{q}\right| \leq 40q^{-\frac{1}{5}}Z, \tag{25}$$

$$Z = \begin{cases} p, & |z| \leq p^{-5}, \\ \sqrt{2}|z|^{-1/5}, & |z| > p^{-5}. \end{cases} \tag{26}$$

由于 $|z| \leq \frac{1}{10qp^4}$, $q \leq p^{1/2}$ 显而易见 $Zq^{-1/5} \geq q$ 因此由 (24), (25) 和 (26) 式我们得到

$$\left|T_\alpha^{15} - \left(\psi\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}\right| \leq 60q(44q^{-1/5}Z)^{14} \leq 10^{26}q^{-9/5}Z^{14}.$$

但当 $\omega > 0$ 时我们有

$$\begin{aligned}|e^{2\pi i\omega}-1| &= \sqrt{(\cos 2\pi\omega - 1)^2 + (\sin 2\pi\omega)^2} = |\sqrt{2(1-\cos 2\pi\omega)}| \\ &= |2\sin\pi\omega| \leq 2\pi\omega,\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}&\left|T_\alpha^{15}e^{-2\pi iN_1\alpha}-\psi^{15}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_0}\right|\\ &\le\left|T_\alpha^{15}e^{-2\pi iN_1\alpha}-\psi^{15}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_1}\right.\\ &\quad\left.+\psi^{15}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_1}-\psi^{15}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_0}\right|\\ &\le 10^{26}q^{-9/5}Z^{14}+10^{18}q^{-9/5}Z^{15}(2\pi z)p^{4\frac{1}{5}}.\end{aligned}$$

由是对于积分 $W(N_1)$ 中与包含分数 $\frac{a}{q}$ 的基本区间相应的部分 $H_{a,q}(N_1)$，我们有

$$H_{a,q}(N_1)=R_q(N_0)\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}+F,$$

$$R_q(N_0)=\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\psi^{15}e^{-2\pi izN_0}dz,$$

$$\begin{aligned}|F|&\le 2\int_0^{\frac{1}{q\tau}}(10^{26}q^{-9/5}Z^{14}+10^{18}q^{-9/5}Z^{15}(2\pi z)p^{4\frac{1}{5}})\,dz\\ &\le 2\int_0^{p^{-5}}(10^{26}q^{-9/5}p^{14}+10^{18}q^{-9/5}p^{19\frac{1}{5}}(2\pi z))\,dz\\ &\quad+2\int_{p^{-5}}^{\infty}(10^{26}\left(\sqrt{2}\right)^{14}q^{-9/5}z^{-14/5}+(2\pi)\left(\sqrt{2}\right)^{15}10^{18}q^{-9/5}z^{-2}p^{4\frac{1}{5}})\,dz\\ &\le 10^{23}q^{-9/5}p^{9\frac{1}{5}}\quad(\text{这里用到}\,p\ge 10^{100}).\end{aligned}$$

我们容易得到

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}\left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{q\tau}}\psi^{15}e^{-2\pi izN_0}dz+\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\infty}\psi^{15}e^{-2\pi izN_0}dz\right)\right|\\ &\le 2(40)^{15}q^{-3}\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{15}z^{-3}dz\le 10^{31}q^{-1}p^{8}.\end{aligned}$$

因而

$$\left|H_{a,q}(N_1)-R(N_0)\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}\right|\le 10^{23}q^{-9/5}p^{9\frac{1}{5}}+10^{31}q^{-1}p^{8}.$$

将此不等式就所有与给定之 q 相应之 a，然后再就所有之 $q=1,2,\ldots,[p^{1/2}]$ 求和，则得

$$\left|W_0(N_1)-R(N_0)\sum_{q\le p^{1/2}}\sum_{(a,q)=1}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}\right|$$
$$\le 10^{24}p^{9\frac{3}{10}}+10^{31}p^{8\frac{1}{2}}\le 2(10)^{24}p^{9\frac{3}{10}}.$$

又由

$$\left|\sum_{q\ge p^{1/2}}\sum_{(a,q)=1}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{15}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}\right|\le\sum_{q\ge p^{1/2}}(40)^{15}q^{-2}\le 10^{30}p^{-1/2}.$$

故有

$$|W_0(N_1)-R(N_0)\mathfrak{S}(N_1)|\le 10^{30}p^{-1/2}R(N_0)+2(10)^{24}p^{9\frac{3}{10}}.$$

现在我们要对 $R(N_0)$ 进行估值，令 $N_0-p^{5-1/5}<N'\le N_0$, 则我们有

$$W(N')=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}T_\alpha^{15}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha+\int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}T_\alpha^{15}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha.$$

当 $-\tau^{-1}\le\alpha\le\tau^{-1}$ 时，我们有

$$T_\alpha=\sum_{1\le x\le p}e^{2\pi i\alpha x^5}=\int_0^p e^{2\pi i\alpha x^5}dx+5Q_3,\quad |Q_3|\le 1.$$

故有

$$|T_\alpha^{15}-\psi^{15}|\le 75(|Z|+5)^{14},$$

$$|T_\alpha^{15}e^{-2\pi i\alpha N'}-\psi^{15}e^{-2\pi i\alpha N_0}|$$
$$=|T_\alpha^{15}e^{-2\pi i\alpha N'}-\psi^{15}e^{-2\pi i\alpha N'}+\psi^{15}e^{-2\pi i\alpha N'}-\psi^{15}e^{-2\pi i\alpha N_0}|$$
$$\le 75(|Z|+5)^{14}+Z^{15}(2\pi)\alpha p^{5-\frac{1}{5}}.$$

由上式我们有

$$\left|\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}T_\alpha^{15}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha-\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\psi^{15}e^{-2\pi i\alpha N_0}d\alpha\right|$$
$$\le 2\int_0^{p^{-5}}\{75(p+5)^{14}+p^{15}(2\pi)\alpha p^{5-1/5}\}d\alpha$$
$$+2\int_{p^{-5}}^{p^{-4}}\{75\left(\sqrt{2}\alpha^{-1/5}+5\right)^{14}+\left(\sqrt{2}\right)^{15}(2\pi)\alpha^{-2}p^{5-1/5}\}d\alpha$$
$$\le 10^4p^{10-1/5}\quad(\text{这里用到}\,p\ge 10^{100}).$$

又

$$\int_{-\infty}^{-\tau^{-1}} \psi^{15} e^{-2\pi i\alpha N_0} d\alpha + \int_{\tau^{-1}}^{\infty} \psi^{15} e^{-2\pi i\alpha N_0} d\alpha \leq 2\int_{\tau^{-1}}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{15} \alpha^{-3} d\alpha$$
$$\leq 10^4 p^{10-1/5},$$

故有

$$\left| \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} T_\alpha^{15} e^{-2\pi i\alpha N'} d\alpha - R(N_0) \right| \leq 2(10)^4 p^{10-1/5}.$$

$$W(N') = R(N_0) + \int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} T_\alpha^{15} e^{-2\pi i\alpha N'} d\alpha + Q_3 \cdot 2 \times 10^4 p^{10-1/5}, \quad |Q_3| \leq 1.$$

但若令 $M = \left[\frac{1}{2}p^{5-1/5}\right]$, 则有

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{N''=1}^{M} \sum_{N'''=1}^{M} W(N_0 - N'' - N''') - R(N_0)M^2 \right| \\
&\leq \int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} |T_\alpha|^{15} \left| \sum_{N''=1}^{M} \sum_{N'''=1}^{M} e^{2\pi i\alpha(N''+N''')} \right| d\alpha + 2(10)^4 p^{10-1/5} M^2 \\
&\leq \int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} p^{15} \frac{1}{(\alpha)^2} d\alpha + 2(10)^4 p^{10-1/5} M^2 \leq 3(10)^4 p^{10-1/5} M^2.
\end{aligned}$$

现在我们要对和式

$$\sum_{N''=1}^{M} \sum_{N'''=1}^{M} W(N_0 - N'' - N''')$$

进行估值，由 [4] 中 p.253 的引理 3 我们有 (又 K_{15} 定义见 [4] 中 p.253)

$$\begin{aligned}
&\sum_{N''=1}^{M} \sum_{N'''=1}^{M} W(N_0 - N'' - N''') \\
&= \sum_{N''=1}^{M} \{K_{15}(N_0 - N'' - 1) - K_{15}(N_0 - N'' - M - 1)\} \\
&= \sum_{N''=1}^{M} [T_{15}\{(N_0 - N'' - 1)^3 - (N_0 - N'' - M - 1)^3\} + 15Q_4 N_0^{3-1/5}] \\
&= 3N_0^2 M^2 T_{15} + 1000 Q_5 N_0^2 M^2 T_{15} p^{-1/5}. \quad |Q_4| \leq 1, \quad |Q_5| \leq 1.
\end{aligned}$$

由于 $p \geq 10^{100}$ 及上面的这个式子就得

$$R(N_0) \geq 3N_0^2 T_{15}\left(1 - \frac{1}{10000}\right).$$

我们由 [4] 中 p.274 的引理 11 得到 $\mathfrak{S}(N)=\prod_p \psi(p,N)$, 这里 $\psi(p,N)=\sum_{s=0}^{\infty} A(p^s,N)$ 而 $\prod_p$ 中的 p 经过所有的素数, 由本文的引理 3 及 [4] 中 pp.269 – 270 的引理 3, 引理 4 和引理 5 可以得到

$$\begin{aligned}|\psi(5,N)-1| &\le \sum_{s=1}^{\infty}|A(5^s,N)|=\sum_{s=2}^{\infty}|A(5^s,N)|\\ &\le 4\left(\frac{17.8}{25}\right)^{15}+16\left(\frac{15}{25}\right)^{15}+|A(5^3,N)|\\ &\quad +|A(5^4,N)|+|A(5^5,N)|+\sum_{s=6}^{\infty}|A(5^s,N)|\\ &\le \frac{1}{20}+\frac{1}{60}+3\left(\frac{1}{5}\right)^{15}5^5+\frac{1}{100}<\frac{1}{10},\end{aligned}$$

故有

$$|\psi(5,N)|\ge \frac{9}{10}. \tag{27}$$

$$\begin{aligned}|\psi(11,N)-1| &\le \sum_{s=1}^{\infty}|A(11^s,N)|\\ &= \frac{1}{11^{15}}|s_{1,11}|^{15}+\frac{1}{11^{15}}|s_{10,11}|^{15}+\frac{1}{11^{15}}|s_{5,11}|^{15}+\frac{1}{11^{15}}|s_{6,11}|^{15}\\ &\quad + \sum_{\substack{(a,11)=1\\ a\ne 1,a\ne 10,a\ne 5,a\ne 6}} \frac{1}{11^{15}}|s_{a,11}|^{15}+\sum_{s=2}^{\infty}|A(11^s,N)|\\ &< 2\left(\frac{9.48}{11}\right)^{15}+2\left(\frac{8.7}{11}\right)^{15}+6\left(\frac{5.6}{11}\right)^{15}+\sum_{s=2}^{\infty}|A(11^s,N)|\\ &\le \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+10^{-3}+\sum_{s=2}^{\infty}|A(11^s,N)|\\ &\le \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故有

$$|\psi(11,N)|\ge \frac{1}{2}. \tag{28}$$

又当 $p\ge 11$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}|\psi(p,N)-1| &\le \sum_{s=1}^{\infty}|A(p^s,N)|\le |A(p,N)|+\sum_{s=2}^{\infty}|A(p^s,N)|\\ &\le \frac{p\left(4\sqrt{p}\right)^{15}}{p^{15}}+2p^{-4}.\end{aligned}$$

所以有

$$
\begin{aligned}
&|\psi(31,N)\psi(41,N)\psi(61,N)\psi(71,N)\psi(101,N)| \\
&\geq \left(1-\frac{4^{15}}{(31)^{6.5}}-2\left(\frac{1}{31}\right)^4\right)\left(1-\frac{4^{15}}{(41)^{6.5}}-2\left(\frac{1}{41}\right)^4\right)\left(1-\frac{4^{15}}{(61)^{6.5}}-2\left(\frac{1}{61}\right)^4\right) \\
&\quad\cdot\left(1-\frac{4^{15}}{(71)^{6.5}}-2\left(\frac{1}{71}\right)^4\right)\left(1-\frac{4^{15}}{(101)^{6.5}}-2\left(\frac{1}{101}\right)^4\right) \\
&\geq \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{63}{64}\cdot\left(\frac{255}{256}\right)^2 \\
&\geq \frac{2}{3}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

又 $p \neq 41,61,71,101$ 并且 $p \geq 37$ 时有

$$
\begin{aligned}
|\psi(p,N)-1| &\leq \sum_{s=1}^{\infty}|A(p^s,N)| \leq \sum_{s=1}^{\infty}\frac{p^{(1-1/5)(15s)}p^s}{p^{15s}} = \sum_{s=1}^{\infty}p^{-2s} \\
&= \frac{p^{-2}}{1-p^{-2}} \leq \frac{37}{36}p^{-2},
\end{aligned}
$$

故有

$$
|\psi(p,N)| \geq 1-\frac{37}{36}p^{-2},
$$

$$
\prod_{\substack{p\geq 37\\ p\neq 41,61,71,101}}|\psi(p,N)| \geq \prod_{p\geq 37}\left(1-\frac{37}{36}p^{-2}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\ln\frac{1}{1-\frac{37}{36}p^{-2}}-\frac{37}{36}p^{-2} &= -\ln\left(1-\frac{37}{36}p^{-2}\right)-\frac{37}{36}p^{-2} \\
&\leq \sum_{s=2}^{\infty}\left(\frac{37}{36}p^{-2}\right)^s \leq 2\left(\frac{37}{36}\right)p^{-2},
\end{aligned}
$$

所以就有

$$
\ln\frac{1}{1-\frac{37}{36}p^{-2}} \leq 3\left(\frac{37}{36}\right)p^{-2},
$$

$$
\sum_{p\geq 37}\ln\frac{1}{1-\frac{37}{36}p^{-2}} \leq \sum_{p\geq 37}3\left(\frac{37}{36}\right)p^{-2} \leq \frac{1}{37},
$$

故有

$$
\prod_{\substack{p\geq 37\\ p\neq 41,61,71,101}}|\psi(p,N)| \geq e^{-\frac{1}{37}} \geq \frac{36}{37}. \tag{30}
$$

又当 $p = 2, 3, 7, 13, 17, 19, 23, 29$ 时我们使用 [4] 中 pp. 269 - 270 的引理 3, 引理 4 和引理 5, 并注意到 $\delta = 1$, 我们有

$$|\psi(p, N) - 1| \le \sum_{s=2}^{\infty} |A(p^s, N)| \le 5p^5 \left(\frac{1}{p}\right)^{15} + \sum_{s=6}^{\infty} p^s p^{-\frac{1}{5}(15s)} \le p^{-4},$$

故有

$$\prod_{\substack{p \le 37 \\ p \ne 5, 11, 31}} |\psi(p, N)| \ge \prod_{p \ge 37} \left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \ge \frac{1}{2}. \tag{31}$$

由 (27), (28), (29), (30) 和 (31) 式我们有

$$\mathfrak{S}(N) \ge \frac{1}{10}.$$

由此本引理得证.

引理 12. 设 $N \ge 10^{780}$, 则小于 $\frac{N}{4}$ 又能够表示成为 11 个正整数五次方和的整数的个数 $\ge \frac{1.7}{2^{17}} p^{5-5(4/5)^{11}}$, 这里 $p = [N^{1/5}]$.

证. 设

$$p_1 = \left[\frac{1}{2\sqrt[5]{4}} p\right], \ p_2 = [p_1^{1-1/5}], \ldots, p_{11} = [p_{10}^{1-1/5}].$$

令 x_i 跑过值 $[1.5p_i]$ 到 $2p_i - 1$ 中的整数而 x_{11} 经过 0 与 $1.7p_{11}$ 中的整数, 显见 $x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_{11}^5 \le \frac{N}{4}$, 又 $x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_{11}^5$ 都是不同的, 因为如果有 $x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_{11}^5 = {x'_1}^5 + {x'_2}^5 + \cdots + {x'_{11}}^5$ 不妨假定 $x_1 > x'_1$, 则由 $N \ge 10^{780}$ 有

$$x_1^5 - {x'_1}^5 \ge x_1^5 - (x_1 - 1)^5 \ge ([1.5p_1])^5 - ([1.5p_1] - 1)^5 \ge 25p_1^4 \ge 25p_2^5,$$
$$|x_2^5 + x_3^5 + \cdots + x_{11}^5 - {x'_2}^5 - {x'_3}^5 - \cdots - {x'_{11}}^5| \le (2p_2)^5 - ([1.5p_2])^5 < 25p_2^5,$$

故有 $x_1 = x'_1$. 同样可证 $x_i = x'_i \, (i = 2, 3, \ldots, 11)$. 而 $x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_{11}^5$ 的个数大于或等于

$$\left(\frac{1}{2}p_1\right)\left(\frac{1}{2}p_2\right) \cdots \left(\frac{1}{2}p_{10}\right)(1.7p_{11}) = \frac{1.7}{2^{10}} p_1 p_2 \cdots p_{11} \ge \frac{1.7}{2^{17}} p^{5-5(4/5)^{11}},$$

因此本引理得证.

定理. 凡是大于 10^{785} 的整数 N 都能够表示成为 37 个正整数的五次方的和.

证. 设 μ 经过所有的小于 $\frac{N}{4}$ 并能够表示成为 11 个正整数的五次方的和者，而 μ' 经过同样的整数集合，设 μ 的个数为 U, 考虑积分

$$I(N) = \int_0^1 T_\alpha^{15} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} e^{2\pi i(\mu+\mu')\alpha} e^{-2\pi i N\alpha} d\alpha,$$

则有

$$I(N) = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \{W_0(N-\mu-\mu') + W_1(N-\mu-\mu')\}. \tag{32}$$

由引理 10 及 $p \geq 10^{157}$ 及 $T_{15} \geq \frac{1}{100}$ 故有

$$\begin{aligned}\sum_{\mu} \sum_{\mu'} W_0(N-\mu-\mu') &\geq \sum_{\mu} \sum_{\mu'} R(N-\mu-\mu') \\ &\quad \cdot \{\mathfrak{S}(N-\mu-\mu') - 10^{30} p^{-1/2}\} - 10^{23} p^{9\frac{3}{10}} U^2 \\ &\geq (3-0.001)\left(\frac{N}{2}\right)^2 U^2 \left(\frac{1}{10^3}\right) \\ &\geq \frac{1}{2000} U^2 p^{10} \quad (\text{因为} p \geq 10^{157}). \end{aligned} \tag{33}$$

而由引理 7, 引理 9, 引理 12 和 $p \geq 10^{157}$ 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\mu} \sum_{\mu'} W_1(N-\mu-\mu')\right| &\leq \{(34)^{\frac{15}{16}} 2^{\frac{150}{16}} p^{15-\frac{15}{20}} (\ln p + 4)^{(\frac{15}{16})(13\frac{2}{15})} + p^{15-\frac{15}{25}}\} \\ &\quad \cdot \int_0^1 \sum_{\mu} \sum_{\mu'} e^{2\pi i(\mu-\mu')^\alpha} d\alpha \\ &\leq \{(34)^{\frac{15}{16}} 2^{\frac{150}{16}} p^{15-\frac{15}{20}} (\ln p + 4)^{(\frac{15}{16})(13\frac{2}{15})} + p^{15-\frac{15}{25}}\} \\ &\quad \cdot \left\{U^2 \Big/ \left(\frac{1.7}{2^{17}}\right)\right\} p^{-5+5(\frac{4}{5})^{11}} \\ &< \frac{1}{2000} U^2 p^{10}, \end{aligned} \tag{34}$$

由 (32), (33) 和 (34) 显见本定理成立.

由引理 1 及定理即得到我们的结果.

参考文献

[1] Dickson L E. Waring's theorem. *Bull. of Amer. Math. Soc.*, 1933, **39**: 701 ~ 727

[2] 陈景润. 华林问题 $g(5)$ 的估值. 科学纪录, 1959,**3**: 327 ~ 330

[3] 华罗庚. 堆垒素数论. 北京: 科学出版社, 1957

[4] Виноградов И М, Избранные. труды, Москва, 1952

[5] 华罗庚. 一个指数和. 科学纪录, 1957,**1**: 1 ~ 4

[6] Titchmarsh E C. *The theory of the Riemann-Zeta function*. Oxford, 1951

[7] Марджанишвили К К. Оценка одной арифметической суммы. *Доклады АН СССР*, 1939,**22**: 391 ~ 394

[8] Hardy G H, Wright E M. *An introduction of the theory of numbers*. Oxford, 1954

关于 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$*†

1. 绪　言

曾经从事于求上极限 Q 使得 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^Q)$ 成立的这个问题有 Van der Corput, Koksma[3], Walfisz[4], Titchmarsh[5], Phillips[6], Titchmarsh[7] 和闵嗣鹤 [1], 他们的结果是

$$Q \le \frac{1}{6}, \frac{163}{988}, \frac{27}{164}, \frac{229}{1392}, \frac{19}{116} \text{ 和 } \frac{15}{92}+\varepsilon.$$

本文的目的是要改善上述的结果而成为 $Q \le \frac{6}{37}$.

2.

我们来考虑和式

$$S_1=\sum_{n=a}^{b} n^{-it}=\sum_{n=a}^{b} e^{-it\log n}; \quad t^{\frac{587}{1295}}<a<b\le 2a \ll t^{\frac{1}{2}}.$$

由 [1] 的引理 2 我们有

$$|S_1| \le \frac{1}{\rho}\left\{4(b-a)^2\rho+2(b-a)\left|\sum_{r=1}^{\rho-1}(\rho-r)\sum_{m=a}^{b-r} e^{-it\log(m+r)/m}\right|\right\}^{1/2},$$

其中 $0<\rho=at^{-12/37}\le b-a$, 令

$$S_2=\sum_{r=1}^{\rho-1}(\rho-r)\sum_{m=a}^{b-r} e^{-it\log(m+r)/m}; \tag{1}$$

则由 [1] 的引理 1 我们有

$$\begin{aligned} S_2 = {} & e^{-\pi i/4}\sum_{r=1}^{\rho-1}(\rho-r)\sum_{\alpha\le\nu\le\beta}\frac{e^{2\pi i\phi(r,\nu)}}{|f''(m_\nu)|^{1/2}} \\ & +O(a^{3/2}t^{-1/2}\rho^{3/2})+O(\rho^2\log t)+O(a^{-2/5}t^{2/5}\rho^{12/5}). \end{aligned} \tag{2}$$

---

* 1963 年 1 月 29 日收到, 1964 年 4 月 22 日收到修改稿.

† 原载数学学报, **15**(1965), no. 2, pp. 159 – 173.

这里

$$f(y)=f(r,y)=-\frac{t}{2\pi}\log\frac{y+r}{y},\quad f'(m_\nu)=\nu,$$

$$\phi(r,\nu)=f(r,m_\nu)-\nu m_\nu,\quad \alpha=f'(b-r),\quad \beta=f'(a).$$

这里我们选取 b, 使它满足条件

$$b=O(t^{1/2}),$$

则我们有

$$\nu=f'(m_\nu)=\frac{tr}{2\pi m_\nu(m_\nu+r)}>\frac{Atr}{m_\nu^2}>Ar,$$

即有

$$\rho=O(\beta). \tag{3}$$

令

$$S_3=\sum_{x=R+1}^{R'}\sum_{y=N+1}^{N'}e^{2\pi i\phi(x,y)},$$

$$R<R'\le 2R<\rho,\quad N<N'\le 2N\le\beta.$$

又令 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 都是非负整数，满足条件 $1\le x_1\le\lambda'$, $0\le y_1\le\lambda''-1$, $1\le x_2\le\lambda_1'-1$, $0\le y_2\le\lambda_1''-1$, $1\le x_3\le\lambda_2'$, $0\le y_3\le\lambda_2''-1$. 这里我们又假定 λ' 和 λ'' 满足条件 $\lambda'\lambda''=\lambda$, $\lambda_1'\lambda_1''=\lambda^2$, $\lambda_2'\lambda_2''=\lambda^4$, $\lambda'=\lambda^{1/2}\left(\frac{R}{N}\right)^{1/2}$, $\lambda_1'=\lambda\left(\frac{R}{N}\right)^{1/2}$, $\lambda_2'=\lambda^2\left(\frac{R}{N}\right)^{1/2}$. 又令

$$\psi(x,y)$$
$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{\partial^3}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}\phi(x+x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3,y+y_1t_1+y_2t_2+y_3t_3)dt_1dt_2dt_3.$$

3.

在本节中我们将要简化 $\psi(x,y)$, 使它变成为一个比较容易处理的形式，我们知道

$$\frac{\partial^3}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}\phi(x+x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3,y+y_1t_1+y_2t_2+y_3t_3)$$
$$=x_1x_2x_3\frac{\partial^3}{\partial x^{*3}}\phi(x^*,y^*)+y_1y_2y_3\frac{\partial^3}{\partial y^{*3}}\phi(x^*,y^*)$$
$$+(x_1x_2y_3+x_2x_3y_1+x_1x_3y_2)\frac{\partial^3}{\partial x^{*2}\partial y^*}\phi(x^*,y^*)$$

$$+(x_1y_2y_3+x_2y_1y_3+x_3y_1y_2)\frac{\partial^3}{\partial x^*\partial y^{*2}}\phi(x^*,y^*).$$

这里

$$x^*=x+x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3,\quad y^*=y+y_1t_1+y_2t_2+y_3t_3.$$

又我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)&=f_x(x,m_y(x))+f_y(x,m_y(x))\frac{\partial}{\partial x}m_y(x)-y\frac{\partial}{\partial x}m_y(x)\\&=f_x(x,m_y(x)),\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)&=f_y(x,m_y(x))\frac{\partial m_y(x)}{\partial y}-m_y(x)-y\frac{\partial m_y(x)}{\partial y}\\&=-m_y(x).\end{aligned}\tag{5}$$

由 $$f_x(x,y)=-\frac{t}{2\pi}\left(\frac{1}{x+y}\right),\quad f_y(x,y)=-\frac{t}{2\pi}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y}\right),\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\nu&=f_y(x,m_\nu(x))=-\frac{t}{2\pi}\left(\frac{1}{x+m_\nu(x)}-\frac{1}{m_\nu(x)}\right)\\&=-\frac{t}{2\pi}\left(\frac{-x}{m_\nu(x)(x+m_\nu(x))}\right)=\frac{tx}{2\pi m_\nu(x)(x+m_\nu(x))},\end{aligned}$$

得到

$$m_\nu^2(x)+m_\nu(x)x-\frac{tx}{2\pi\nu}=0.$$

即为

$$m_\nu(x)=-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2+\frac{2tx}{\pi\nu}}}{2}=-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{2t}{\pi x\nu}}.\tag{7}$$

由 (4) 式，(6) 式和 (7) 式得到

$$\begin{aligned}\phi_x(x,y)&=-\frac{t}{2\pi}\frac{1}{x+m_y(x)}=-\frac{t}{2\pi}\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{2t}{\pi xy}}}\\&=-\frac{t}{2\pi}\frac{\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{2t}{\pi xy}}}{-\frac{tx}{\pi(2y)}}=\frac{y}{2}\left(1-\frac{(2t)^{1/2}}{(\pi xy)^{1/2}}\sqrt{1+\frac{\pi xy}{2t}}\right)\\&=\frac{y}{2}-\frac{(2t)^{1/2}y^{1/2}}{2\pi^{1/2}x^{1/2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\pi xy}{2t}-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi xy}{2t}\right)^2+\cdots\right).\end{aligned}$$

由 (5) 式和 (7) 式得到

$$\begin{aligned}\phi_y(x,y) &= \frac{x}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{2t}{\pi xy}}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\frac{(2t)^{1/2}}{(\pi xy)^{1/2}}\left(1+\frac{\pi xy}{2t}\right)^{1/2} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{(2t)^{1/2}x^{1/2}}{2(\pi y)^{1/2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\pi xy}{2t} - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi xy}{2t}\right)^2 + \cdots\right).\end{aligned}$$

微分后得到

$$\phi_{xyy} = \frac{1}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2} x^{-1/2}y^{-3/2}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\pi xy}{2t} + \frac{15}{8}\left(\frac{\pi xy}{2t}\right)^2 + \cdots\right], \tag{8}$$

$$\phi_{yyy} = -\frac{3}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2} x^{1/2}y^{-5/2}\left[1-\frac{1}{6}\frac{\pi xy}{2t} - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi xy}{2t}\right)^2 + \cdots\right], \tag{9}$$

$$\phi_{xxx} = -\frac{3(2t)^{1/2}y^{1/2}}{8\pi^{1/2}} x^{-5/2}\left[1-\frac{1}{6}\frac{\pi xy}{2t} - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi xy}{2t}\right)^2 + \cdots\right], \tag{10}$$

$$\phi_{xxy} = \frac{(2t)^{1/2}}{8\pi^{1/2}} y^{-1/2}x^{-3/2}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\pi xy}{2t} + \frac{15}{8}\left(\frac{\pi xy}{2t}\right)^2 + \cdots\right]. \tag{11}$$

利用 (8) 到 (11) 这四个式子就可以得到

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = {} & \frac{1}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}\iiint_0^1 x^{*-5/2}y^{*-5/2}\left[-\frac{3}{6}Xy^{*3} + \frac{Y}{2}x^*y^{*2} + \frac{Z}{2}x^{*2}y^*\right. \\ & \left.-\frac{1}{2}Wx^{*3}\right]dt_1dt_2dt_3 + \frac{1}{16}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}\iiint_0^1\left\{\frac{\pi x^*y^*}{2t}x^{*-5/2}y^{*-5/2}\right. \\ & \left.\times\left[\frac{X}{6}y^{*3} - \frac{3}{2}Yx^*y^{*2} - \frac{3}{2}Zx^{*2}y^* + \frac{W}{6}x^{*3}\right] + \cdots\right\}dt_1dt_2dt_3. \end{aligned}\tag{12}$$

这里

$$X = 6x_1x_2x_3,\quad Y = 2\sum x_1x_2y_3,\quad Z = 2\sum x_1y_2y_3,\quad W = 6y_1y_2y_3.$$

现在我们来考虑 $\psi(x,y)$ 的 Hessian, 即 $H(x,y) = \psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2$. 又用 $\psi^0(x,y)$ 代表 (12) 式右边的第一项，又记

$$\phi_1(x,y) = x^{-5/2}y^{-5/2}\left(-\frac{1}{2}Xy^3 + \frac{Y}{2}xy^2 + \frac{Z}{2}x^2y - \frac{W}{2}x^3\right),$$

则有

$$\begin{aligned}\phi_{1xx} &= \frac{3}{4}x^{-9/2}y^{-5/2}\left[-\frac{35}{6}Xy^3 + \frac{5}{2}Yxy^2 + \frac{Z}{2}x^2y + \frac{W}{6}x^3\right], \\ \phi_{1yy} &= \frac{3}{4}x^{-5/2}y^{-9/2}\left[\frac{X}{6}y^3 + \frac{Y}{2}xy^2 + \frac{5Z}{2}x^2y - \frac{35}{6}Wx^3\right], \\ \phi_{1xy} &= \frac{3}{4}x^{-7/2}y^{-7/2}\left[\frac{5}{6}Xy^3 + \frac{Y}{2}xy^2 + \frac{Z}{2}x^2y + \frac{5W}{6}x^3\right].\end{aligned}$$

由上面的这三个式子，我们得到当 $R+1 \le x \le 2R$, $N+1 \le y \le 2N$ 时则有

$$\phi_{1xx} = O(R^{-9/2}N^{-5/2}Q), \tag{13}$$

$$\phi_{1xy} = O(R^{-7/2}N^{-7/2}Q), \tag{14}$$

$$\phi_{1yy} = O(R^{-5/2}N^{-9/2}Q), \tag{15}$$

而这里

$$Q = (RN)^{3/2}\lambda^{7/2} \gg |X|N^3 + |Y|RN^2 + |Z|R^2N + |W|R^3.$$

又我们有

$$\phi_{1x^4} = O(R^{-13/2}N^{-5/2}Q), \tag{16}$$

$$\phi_{1x^3y} = O(R^{-11/2}N^{-7/2}Q), \tag{17}$$

$$\phi_{1x^2y^2} = O(R^{-9/2}N^{-9/2}Q), \tag{18}$$

利用表示式

$$\begin{aligned}\phi_1(x^*, y^*) &= \phi_1(x,y) + (x_1t_1 + x_2t_2 + x_3t_3)\phi_{1x}(x,y)\\ &+(y_1t_1 + y_2t_2 + y_3t_3)\phi_{1y}(x,y) + \frac{1}{2}[(x_1t_1 + x_2t_2 + x_3t_3)^2\phi_{1xx}(x,y)\\ &+2(x_1t_1 + x_2t_2 + x_3t_3)(y_1t_1 + y_2t_2 + y_3t_3)\phi_{1xy}(x,y)\\ &+(y_1t_1 + y_2t_2 + y_3t_3)^2\phi_{1yy}(x,y)] + \cdots,\end{aligned}$$

我们就可以得到

$$\begin{aligned}\psi^0(x,y) &= \frac{1}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}\left[\phi_1(x,y) + \frac{x_1+x_2+x_3}{2}\phi_{1x}(x,y)\right.\\ &+\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\phi_{1y}(x,y)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3} + \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{2}\right)\phi_{1xx}\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{3} + \frac{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}{2}\right)\phi_{1yy}\\ &+\left\{\frac{1}{3}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) + x_1\left(\frac{y_2+y_3}{4}\right) + x_2\left(\frac{y_1+y_3}{4}\right)\right.\\ &\left.\left.+x_3\left(\frac{y_1+y_2}{4}\right)\right\}\phi_{1xy}\right] + \cdots\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}\left[\phi_1(x',y') + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{12}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\phi_{1xx}\right.\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{12}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\phi_{1yy}+\frac{1}{6}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)\phi_{1xy}\Big\}+\cdots\Big],$$

而这里

$$x'=x+\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\quad y'=y+\frac{y_1+y_2+y_3}{2}.$$

因此我们得到

$$\psi_{xx}^0=\frac{1}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}[\phi_{1xx}(x',y')+O(\lambda^4R^{-11/2}N^{-7/2}Q)], \tag{19}$$

$$\psi_{xy}^0=\frac{1}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}[\phi_{1xy}(x',y')+O(\lambda^4R^{-9/2}N^{-9/2}Q)], \tag{20}$$

$$\psi_{yy}^0=\frac{1}{8}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}[\phi_{1yy}(x',y')+O(\lambda^4R^{-7/2}N^{-11/2}Q)], \tag{21}$$

然后再使用 [1] 中的 Remarks 及 R,N 的取法和 (12) 式易见，可将 (19), (20), (21) 中 ψ_{xx}^0, ψ_{xy}^0, ψ_{yy}^0 分别改为 ψ_{xx}, ψ_{xy}, ψ_{yy}, 于是，即可求得

$$\begin{aligned}H(x,y)&=\frac{1}{64}\left(\frac{2t}{\pi}\right)\{(\phi_{1xy}^2-\phi_{1xx}\phi_{1yy})(-1)\\&\quad+O(\lambda^4R^{-8}N^{-8}Q^2)+O(\lambda^8R^{-9}N^{-9}Q^2)\}\\&=-\frac{3}{4^5}x^{-7}y^{-7}\left(\frac{2t}{\pi}\right)[5X^2y^6+5W^2x^6-3Y^2x^2y^4\\&\quad-3Z^2x^4y^2+10ZWx^5y+10XYxy^5+46YWx^4y^2\\&\quad-18YZx^3y^3-98XWx^3y^3+46XZx^2y^4]\\&\quad+O(\lambda^4R^{-8}N^{-8}Q^2t)+O(\lambda^8R^{-9}N^{-9}Q^2t).\end{aligned} \tag{22}$$

4.

关于 ϕ_{1xx}, ϕ_{1xy} 及 ϕ_{1yy} 同时小的条件. 设下面三个式子

$$\begin{aligned}\phi_{1xx}&\ll R^{-9/2}N^{-5/2}N^3Xt^{-\delta},\\\phi_{1xy}&\ll R^{-7/2}N^{-7/2}N^3Xt^{-\delta},\\\phi_{1yy}&\ll R^{-5/2}N^{-9/2}N^3Xt^{-\delta}\end{aligned} \tag{23}$$

同时成立，这里 δ 是任意正数，我们假设

$$xY=(3+\alpha)yX,\quad x^2Z=-(3+\alpha_1)y^2X,\quad x^3W=-(1+\alpha_2)y^3X.$$

那末由 ϕ_{1xx}, ϕ_{1xy} 及 ϕ_{1yy} 的表示式而得

$$\begin{aligned}&-\frac{35}{6}+\frac{5}{2}(3+\alpha)-\frac{1}{2}(3+\alpha_1)-\frac{1}{6}(1+\alpha_2)\ll t^{-\delta},\\&\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(3+\alpha)-\frac{5}{2}(3+\alpha_1)+\frac{35}{6}(1+\alpha_2)\ll t^{-\delta},\\&\frac{5}{6}+\frac{1}{2}(3+\alpha)-\frac{1}{2}(3+\alpha_1)-\frac{5}{6}(1+\alpha_2)\ll t^{-\delta},\end{aligned}\tag{24}$$

即得

$$\alpha\ll t^{-\delta},\quad \alpha_1\ll t^{-\delta},\quad \alpha_2\ll t^{-\delta}.\tag{25}$$

5. 关于 $H(x,y)$ 的主项及联立方程式的解

我们用 $H_0(x,y)$ 来表示

$$\begin{aligned}H_0(x,y)=&5y^6X^2+5x^6W^2-3x^2y^4Y^2-3x^4y^2Z^2+10x^5yZW\\&+10xy^5XY+46x^4y^2YW-18x^3y^3YZ-98x^3y^3XW\\&+46x^2y^4XZ,\end{aligned}$$

则我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}H_0(x,y)=&30x^5W^2-6xy^4Y^2-12x^3y^2Z^2+50x^4yZW+10y^5XY\\&+184x^3y^2YW-54x^2y^3YZ-294x^2y^3XW+92xy^4XZ,\\\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0(x,y)=&150x^4W^2-6y^4Y^2-36x^2y^2Z^2+200x^3yZW\\&+552x^2y^2YW-108xy^3YZ-588xy^3XW+92y^4XZ.\end{aligned}$$

设

$$xY=(3+\alpha)yX,\quad x^2Z=-(3+\alpha_1)y^2X,\quad x^3W=-(1+\alpha_2)y^3X,$$

$$\begin{aligned}F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=&5\alpha_2^2-3\alpha^2-3\alpha_1^2+10\alpha_1\alpha_2-46\alpha\alpha_2+18\alpha\alpha_1,\\F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=&-168\alpha_2+150\alpha_2^2-264\alpha-6\alpha^2+216\alpha_1-36\alpha_1^2\\&+200\alpha_1\alpha_2-552\alpha\alpha_2+108\alpha\alpha_1,\\F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=&-48\alpha_2-48\alpha+48\alpha_1+30\alpha_2^2-6\alpha^2-12\alpha_1^2\\&+50\alpha_1\alpha_2-184\alpha\alpha_2+54\alpha\alpha_1,\end{aligned}$$

则我们有

$$H_0(x,y)=F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)y^6X^2,\quad x\frac{\partial}{\partial x}H_0(x,y)=F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)y^6X^2,$$
$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0(x,y)=F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)y^6X^2.$$

引理 1. 满足 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0, F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0, F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$ 的实数解 $(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)$ 的组数不超过 5 组，并且都可以经过有限步的加、减、乘、除、平方根及立方根而求得. 又如果 $(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)$ 满足 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-2\delta}$, $F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}$, $F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}$, 其中 $\delta>0$ 而 α,α_1,α_2 都是实数，则一定对应有一组 $(\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)$ 满足

$$F_1(\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)=0,\quad F_2(\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)=0,\quad F_3(\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)=0$$

及当 $\alpha_2\ll t^{-\delta/5}$ 不成立时有 $\alpha-\alpha^0\ll t^{-\delta},\alpha_1-\alpha_1^0\ll t^{-\delta},\alpha_2-\alpha_2^0\ll t^{-\delta}$; 而当 $\alpha_2\ll t^{-\delta/5}$ 时有 $\alpha_1\ll t^{-\delta/5}$ 和 $\alpha_3\ll t^{-\delta/5}$, 其中 $\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0$ 也都是实数并且 $\alpha_2^0\neq -1$.

证. 由 $\frac{1}{2}\{F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)-F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\}\ll t^{-\delta}$ 而得

$$-60\alpha_2-108\alpha+84\alpha_1+60\alpha_2^2-12\alpha_1^2+75\alpha_1\alpha_2-184\alpha\alpha_2+27\alpha\alpha_1\ll t^{-\delta}. \tag{26}$$

由 $\frac{1}{2}\{F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)-2F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\}\ll t^{-\delta}$ 而得

$$-84\alpha_2+70\alpha_2^2-132\alpha+108\alpha_1-15\alpha_1^2+90\alpha_1\alpha_2-230\alpha\alpha_2+36\alpha\alpha_1\ll t^{-\delta}. \tag{27}$$

由 4(27) − 5(26) 而得

$$(12+9\alpha_1)\alpha-(36\alpha_2+20\alpha_2^2-12\alpha_1+15\alpha_1\alpha_2)\ll t^{-\delta}. \tag{28}$$

由 $\frac{1}{2}(12+9\alpha_1)^2F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}$ 而得

$$-3(12+9\alpha_1)^2\alpha^2+(-24-92\alpha_2+27\alpha_1)(12+9\alpha_1)(12+9\alpha_1)\alpha$$
$$+(-24\alpha_2+24\alpha_1+15\alpha_2^2+25\alpha_1\alpha_2-6\alpha_1^2)(12+9\alpha_1)^2\ll t^{-\delta}. \tag{29}$$

将 (28) 式代入 (29) 中并略去公因子 2 以后就可以得到

$$-243\alpha_1^4+2835\alpha_1^3\alpha_2-3510\alpha_1^2\alpha_2^2-9180\alpha_1\alpha_2^3-600\alpha_2^4-1134\alpha_1^3$$
$$+12420\alpha_1^2\alpha_2-21384\alpha_1\alpha_2^2-13200\alpha_2^3+6912\alpha_1\alpha_2+1296\alpha_1^2$$
$$+3456\alpha_1-6912\alpha_2-23616\alpha_2^2\ll t^{-\delta}. \tag{30}$$

由 (27) - (26) 后并乘以 $12+9\alpha_1$ 而得

$$(-24+9\alpha_1-46\alpha_2)(12+9\alpha_1)\alpha$$
$$+(-24\alpha_2+10\alpha_2^2+24\alpha_1-3\alpha_1^2+15\alpha_1\alpha_2)(12+9\alpha_1)\ll t^{-\delta}. \qquad (31)$$

将 (28) 代入 (31) 中就可以得到

$$-27\alpha_1^3+72\alpha_1^2+576\alpha_1+270\alpha_1^2\alpha_2-420\alpha_1\alpha_2^2$$
$$+480\alpha_1\alpha_2-1152\alpha_2-2016\alpha_2^2-920\alpha_2^3\ll t^{-\delta}. \qquad (32)$$

将 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}$ 乘以 $(12+9\alpha_1)^2$ 而得

$$(5\alpha_2^2-3\alpha_1^2+10\alpha_1\alpha_2)(12+9\alpha_1)^2+(18\alpha_1-46\alpha_2)(12+9\alpha_1)(12+9\alpha_1)\alpha$$
$$-3(12+9\alpha_1)^2\alpha^2\ll t^{-\delta}. \qquad (33)$$

将 (28) 代入 (33) 中后并略去公因子 3 就可以得到

$$-81\alpha_1^4+1080\alpha_1^3\alpha_2-1080\alpha_1^2\alpha_2^2-3360\alpha_1\alpha_2^3-400\alpha_2^4-864\alpha_1^3$$
$$-1152\alpha_1^2+5760\alpha_1^2\alpha_2+6144\alpha_1\alpha_2-7680\alpha_2^2-5120\alpha_2^3$$
$$-6528\alpha_1\alpha_2^2\ll t^{-\delta} \qquad (34)$$

由 (34)$-\frac{1}{3}$ (30) 可以得到

$$135\alpha_1^3\alpha_2+90\alpha_1^2\alpha_2^2-300\alpha_1\alpha_2^3-200\alpha_2^4-486\alpha_1^3+1620\alpha_1^2\alpha_2$$
$$+600\alpha_1\alpha_2^2-720\alpha_2^3-1584\alpha_1^2+3840\alpha_1\alpha_2+192\alpha_2^2-1152\alpha_1$$
$$+2304\alpha_2\ll t^{-\delta}. \qquad (35)$$

将 (32) 代入 (35) 中的第一项以后并略去公因子 6 而得

$$240\alpha_1^2\alpha_2^2+330\alpha_1^2\alpha_2-81\alpha_1^3-264\alpha_1^2-192\alpha_1$$
$$+1120\alpha_1\alpha_2+500\alpha_1\alpha_2^2-400\alpha_1\alpha_2^3$$
$$+384\alpha_2-928\alpha_2^2-1800\alpha_2^3-800\alpha_2^4\ll t^{-\delta}. \qquad (36)$$

将 (32) 代入 (36) 中第 3 页以后并略去公因子 80 而得到

$$3\alpha_1^2\alpha_2^2-6\alpha_1^2\alpha_2-6\alpha_1^2-5\alpha_1\alpha_2^3+22\alpha_1\alpha_2^2-4\alpha_1\alpha_2-24\alpha_1$$
$$+48\alpha_2+64\alpha_2^2+12\alpha_2^3-10\alpha_2^4\ll t^{-\delta}. \qquad (37)$$

将 (32) 二边同时乘以 $\alpha_2^2-2\alpha_2-2$ 以后就可以得到

$$(\alpha_2^2-2\alpha_2-2)(-27\alpha_1^3)+(\alpha_2^2-2\alpha_2-2)(72\alpha_1^2+576\alpha_1+270\alpha_1^2\alpha_2 -420\alpha_1\alpha_2^2+480\alpha_1\alpha_2-1152\alpha_2-2016\alpha_2^2-920\alpha_2^3)\ll t^{-\delta}. \quad (38)$$

将 (37) 代入 (38) 中的第一项即 $-27\alpha_1^3(\alpha_2^2-2\alpha_2-2)$ 以后即得到

$$225\alpha_1^2\alpha_2^3-270\alpha_1^2\alpha_2^2-720\alpha_1^2\alpha_2-360\alpha_1^2-510\alpha_1\alpha_2^4+1428\alpha_1\alpha_2^3 +1032\alpha_1\alpha_2^2-1680\alpha_1\alpha_2-1152\alpha_1-920\alpha_2^5-176\alpha_2^4 +4720\alpha_2^3+6336\alpha_2^2+2304\alpha_2\ll t^{-\delta}. \quad (39)$$

由 $(60+75\alpha_2)$ (37) – (39) 而得到

$$-90\alpha_1^2\alpha_2+135\alpha_1\alpha_2^4-78\alpha_1\alpha_2^3-12\alpha_1\alpha_2^2-360\alpha_1\alpha_2-288\alpha_1 +170\alpha_2^5+476\alpha_2^4+800\alpha_2^3+1104\alpha_2^2+576\alpha_2\ll t^{-\delta}. \quad (40)$$

由 $30\alpha_2(37)+(\alpha_2^2-2\alpha_2-2)(40)$ 可以得到

$$30(-5\alpha_1\alpha_2^3+22\alpha_1\alpha_2^2-4\alpha_1\alpha_2-24\alpha_1+48\alpha_2+64\alpha_2^2+12\alpha_2^3-10\alpha_2^4)\alpha_2 +(\alpha_2^2-2\alpha_2-2)(135\alpha_1\alpha_2^4-78\alpha_1\alpha_2^3-12\alpha_1\alpha_2^2-360\alpha_1\alpha_2-288\alpha_1 +170\alpha_2^5+476\alpha_2^4+800\alpha_2^3+1104\alpha_2^2+576\alpha_2)\ll t^{-\delta}.$$

即为

$$(135\alpha_2^6-348\alpha_2^5-276\alpha_2^4+480\alpha_2^3+336\alpha_2^2+576\alpha_2+576)\alpha_1+170\alpha_2^7 +136\alpha_2^6-792\alpha_2^5-1088\alpha_2^4-1312\alpha_2^3-1920\alpha_2^2-1152\alpha_2\ll t^{-\delta}. \quad (41)$$

将 (40) 二边同时乘以 $(45\alpha_2^6-116\alpha_2^5-92\alpha_2^4+160\alpha_2^3+112\alpha_2^2+192\alpha_2+192)^2$ 后并将 (41) 代入而得

$$-10\alpha_2(170\alpha_2^7+136\alpha_2^6-792\alpha_2^5-1088\alpha_2^4-1312\alpha_2^3-1920\alpha_2^2-1152\alpha_2)^2 +(-45\alpha_2^4+26\alpha_2^3+4\alpha_2^2+120\alpha_2+96)(45\alpha_2^6-116\alpha_2^5-92\alpha_2^4+160\alpha_2^3 +112\alpha_2^2+192\alpha_2+192)(170\alpha_2^7+136\alpha_2^6-792\alpha_2^5-1088\alpha_2^4-1312\alpha_2^3 -1920\alpha_2^2-1152\alpha_2)+(170\alpha_2^5+476\alpha_2^4+800\alpha_2^3+1104\alpha_2^2+576\alpha_2) \cdot(45\alpha_2^6-116\alpha_2^5-92\alpha_2^4+160\alpha_2^3+112\alpha_2^2+192\alpha_2+192)^2 \ll t^{-\delta}.$$

即为

$$256\alpha_2^5(25\alpha_2^{10}+590\alpha_2^9-914\alpha_2^8-4096\alpha_2^7-2464\alpha_2^6+7488\alpha_2^5$$
$$+20416\alpha_2^4+24576\alpha_2^3+17664\alpha_2^2+7680\alpha_2+1536)\ll t^{-\delta}.$$

将上式分解因子而得

$$256\alpha_2^5(5\alpha_2^2+4\alpha_2+4)^2(\alpha_2^2-2\alpha_2-2)$$
$$\cdot(\alpha_2^4+24\alpha_2^3-24\alpha_2^2-96\alpha_2-48)\ll t^{-\delta}. \tag{42}$$

当 α_2 满足 $\alpha_2^2-2\alpha_2-2\ll\varepsilon$ 时, 其中 ε 是一个很小的数, 即得 $\alpha_2-1-\sqrt{3}\ll\varepsilon$ 或 $\alpha_2-1+\sqrt{3}\ll\varepsilon$, 当 t 充分大时代入 (37) 即得 $5\alpha_1+14\alpha_2+16\ll\varepsilon$. 将所求得的数值 (α_1,α_2) 代入 (32) 比较含有 $\sqrt{3}$ 的无理数部分, 就知道不是 (32) 的解, 故满足 $\alpha_2^2-2\alpha_2-2\ll\varepsilon$ 的 α_2 不是 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}, F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}, F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}$ 的解. 当 $\alpha_2\ll\varepsilon$ 时代入 (41) 即得 $\alpha_1\ll\varepsilon$, 将 (α_1,α_2) 代入 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ll t^{-\delta}$ 即得 $\alpha\ll\varepsilon$. 此时显见引理 1 是成立的. 现在我们来证明不存在 α_2 使得

$$\alpha_2^4+24\alpha_2^3-24\alpha_2^2-96\alpha_2-48=0,$$
$$135\alpha_2^6-348\alpha_2^5-276\alpha_2^4+480\alpha_2^3+336\alpha_2^2+576\alpha_2+576=0$$

同时成立. 如果上面二式都成立, 则由 (41) 及 $\alpha_2\neq 0$ 而得

$$170\alpha_2^6+136\alpha_2^5-792\alpha_2^4-1088\alpha_2^3-1312\alpha_2^2-1920\alpha_2-1152=0.$$

同时满足这三个式子的 α_2 稍经计算就知道是不存在的. 由上面的自 (26) 至 (42) 的计算过程我们知道同时满足 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$ 及 $F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$ 的非 0 实数的 α_2 必须满足方程式

$$f(\alpha_2)=\alpha_2^4+24\alpha_2^3-24\alpha_2^2-96\alpha_2-48=0,$$

而满足这个方程式的 α_2 只有 4 个, 对于每一个 α_2 代入 (41) 式中可求得唯一的 α_1. 由于当 $\alpha_1=-\frac{4}{3}$ 时代入 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$ 及 $F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$ 稍经计算就知道不存在 α_2 和 α 使其同时成立. 将每一个 (α_1,α_2) 代入 (28) 式可求得唯一的 α, 故最多存在 5 组 $(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)$, 其中 α,α_1,α_2 都是实数而使

$$F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0,\quad F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0 \text{ 及 } F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$$

同时成立，由于 $f(-26)>0$, $f(-10)<0$, $f(-1)>0$, $f(0)<0$, $f(3)>0$, 故知道 $f(\alpha_2)$ 的根都是不相同的，再由 (41), (28) 知道本引理是成立的.

引理 2. 如果 $xY=(3+\alpha+O(t^{-\delta}))yX$, $x^2Z=(-3-\alpha_1+O(t^{-\delta}))y^2X$, $x^3W=(-1-\alpha_2+O(t^{-\delta}))y^3X$ 而满足方程式

$$f_1(x)=x^3-3(3+\alpha)x^2-3(3+\alpha_1)x+(1+\alpha_2)=0$$

的三个根都是实根，则当 $1+\alpha_2\gg 1$ 时下面

$$\frac{y_1x}{x_1y}=r_i+O(t^{-\delta/3}) \quad 或 \quad \frac{y_1x}{x_1y}=r_j+O(t^{-\delta/3}) \quad 或 \quad \frac{y_1x}{x_1y}=r_k+O(t^{-\delta/3})$$

三式之中至少有一个式子成立，其中 r_i, r_j, r_k 就是 $f_1(x)$ 的那三个根且都不为 0.

证. 我们有

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{y_ix}{x_iy}\right)=3+\alpha+O(t^{-\delta}).$$

$$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{y_1x}{x_1y}\right)\left(\frac{y_2x}{x_2y}\right)+\left(\frac{y_1x}{x_1y}\right)\left(\frac{y_3x}{x_3y}\right)+\left(\frac{y_2x}{x_2y}\right)\left(\frac{y_3x}{x_3y}\right)\right\}=-3-\alpha_1+O(t^{-\delta}),$$

$$\left(\frac{y_1x}{x_1y}\right)\left(\frac{y_2x}{x_2y}\right)\left(\frac{y_3x}{x_3y}\right)=-1-\alpha_2+O(t^{-\delta}).$$

故 $\left(\frac{y_1x}{x_1y}\right), \left(\frac{y_2x}{x_2y}\right), \left(\frac{y_3x}{x_3y}\right)$ 是方程式

$$x^3-(9+3\alpha+O(t^{-\delta}))x^2-(9+3\alpha_1+O(t^{-\delta}))x+(1+\alpha_2+O(t^{-\delta}))=0$$

的那三个根，又由于 $1+\alpha_2\gg 1$ 故这三个根都不为 0, 本引理得证.

6. 关于 S_3 的处理

设使 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, 又使 $f_1(x)=0$ 有三个不同实根的那些实数组计有 $(\alpha^{(j)},\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)})$ 而 $1\le j\le 5$, 其对应于 $f_1(x)=0$ 的那三个实根分别为 $(r_1^{(j)},r_2^{(j)},r_3^{(j)})$ 而 $1\le j\le 5$, 由引理 1 我们知道 $\alpha_2^{(j)}\neq -1$, 故由引理 2 知道所有 $r_1^{(j)},r_2^{(j)},r_3^{(j)}$ 都不为 0, 对于 S_3 我们使用 [1] 中的引理 4 而得

$$S_3\ll\frac{RN}{\lambda^{1/2}}+\frac{R^{1/2}N^{1/2}}{\lambda^{1/2}}\sum_{i=1}^{2}\left\{\sum_{x_1=1}^{\lambda'-1}\sum_{y_1=0}^{\lambda''-1}|S_4^{(i)}|\right\}^{1/2}, \tag{43}$$

其中

$$S_4^{(1)}=\sum_{x=R+1}^{R'}\sum_{y=N+1}^{N'}e^{2\pi i(\phi(x+x_1,y+y_1)-\phi(x,y))},$$

而 $S_4^{(2)}$乃是一个相似的和式,只不过改变了y_1 的符号,我们令 $J=\left[\frac{\log t}{37\log 2}\right]$,我们用记号 D 表示区域 $(R+1\le x\le R',N+1\le y\le N')$. 子区域 $D_j(1\le j<J)$ 系由 D 中的满足条件 $2^{-j-1}\le\min\limits_{\substack{1\le i\le 3\\1\le k\le 5}}\left|\frac{y_1x}{x_1y}-r_i^{(k)}\right|\le 2^{-j}$ 的所有点组成, 子区域 D_J 系由 D 中的所有满足条件 $\min\limits_{\substack{1\le i\le 3\\1\le k\le 5}}\left|\frac{y_1x}{x_1y}-r_i^{(k)}\right|<2^{-J}$ 的点组成, 子区域 D_0 系由 D 中的满足条件 $\min\limits_{\substack{1\le i\le 3\\1\le k\le 5}}\left|\frac{y_1x}{x_1y}-r_i^{(k)}\right|\ge\frac{1}{2}$ 的所有点组成, 子区域 $D_{jl}(0\le j<J)$ 系由 D_j 中满足条件 $(1+2^{-j}l)R<x\le\{1+2^{-j}(l+1)R\}$ 的所有点 (x,y) 组成, 于是有

$$S_4^{(i)}=\sum_{(x,y)\in D}\sum e^{2\pi i(\phi(x+x_1,y+y_1)-\phi(x,y))}\ll\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{l=0}^{2^j}|S_{jl}^{(i)}|+RNt^{-1/37},\tag{44}$$

其中

$$S_{jl}^{(i)}=\sum_{(x,y)\in D_{jl}}\sum e^{2\pi i\{\phi(x+x_1,y+y_1)-\phi(x,y)\}}.$$

由于 $r_i^{(k)}\gg 1$, 当 $j\ge\varepsilon\log t$, 又当 $(x,y)\in D_{jl}$, 则 y 最多跑过一个区间其长度 $\ll 2^{-j}N$. 对于 $0\le j<J$ 使用 [1] 中的引理 4 而得

$$\begin{aligned}&\frac{R^{1/2}N^{1/2}}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{x_1=1}^{\lambda'-1}\sum_{y_1=0}^{\lambda''-1}\sum_{l=0}^{2^j}|S_{jl}^{(i)}|\right)^{\frac{1}{2}}\\&\ll\frac{RN}{\lambda^{1/2}}+\frac{(RN)^{7/8}2^{-3j/4}}{\lambda^{3/2}}\sum_{k=1}^{4}\left\{\sum_{x_1=1}^{\lambda'-1}\sum_{y_1=0}^{\lambda''-1}\sum_{l=0}^{2^j}\right.\\&\left.\cdot\left[\sum_{x_2=1}^{\lambda_1'-1}\sum_{y_2=0}^{\lambda_1''-1}\left(\sum_{x_3=1}^{\lambda_2'-1}\sum_{y_3=0}^{\lambda_2''-1}|S_{5jl}^{(j,k)}|\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}t^{\varepsilon},\end{aligned}\tag{45}$$

其中

$$S_{5jl}^{(1,1)}=\sum_{(x,y)\in D_{jl}}\sum e^{2\pi i\psi(x,y)},\tag{46}$$

其中 $\psi(x,y)$ 的定义见第 2 节, $\lambda=RN^2\alpha^{\frac{52}{15}}\rho^{-\frac{37}{15}}t^{-\frac{27}{15}}$, 而 $S_{5jl}^{(i,k)}$ 乃是一个相似的和式, 只不过改变 y_1,y_2,y_3 的符号而已.

7. $S_{5jl}^{(i,k)}$ 的处理

设 $xY=(3+\alpha^0)yX$, $x^2Z=-(3+\alpha_1^0)y^2X$, $x^3W=-(1+\alpha_2^0)y^3X$, 当 $(x,y)\in D_{jl}$ 时下面三个式子我们将证明

$$F_1(\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)\ll 2^{-6j}t^{-\varepsilon}, \tag{47}$$

$$F_2(\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)\ll 2^{-5j}t^{-\varepsilon}, \tag{48}$$

$$F_3(\alpha^0,\alpha_1^0,\alpha_2^0)\ll 2^{-5j}t^{-\varepsilon} \tag{49}$$

是不可能同时成立的，这里 ε 是任一给定的小正数，因为由引理 1 知道使 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$ 同时成立的实数组 $(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)$ 最多 5 组，反之如果 (47), (48), (49) 都成立，如果 $\alpha_2\ll 2^{-j}t^{-\varepsilon/5}$ 不成立时，则在引理 1 中取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3j\log 2}{\log t}$, 就知道有 $\alpha^0=\alpha+O(2^{-3j}t^{-\varepsilon/2})$, $\alpha_1^0=\alpha_1+O(2^{-3j}t^{-\varepsilon/2})$, $\alpha_2^0=\alpha_2+O(2^{-3j}t^{-\varepsilon/2})$, 其中 $(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)$ 使 $F_1(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, $F_3(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)=0$, 又在引理 2 中取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3j\log 2}{\log t}$ 而来考虑方程式

$$x^3-3(3+\alpha)x^2-3(3+\alpha_1)x+(1+\alpha_2)=0. \tag{50}$$

如果满足这个方程式有一个虚根，则表示 $\frac{y_ix}{x_iy}(1\le i\le 3)$ 至少有一个是虚数，且和所假定的 x_i,y_i,x 和 y 都是实数而发生矛盾，如果 (50) 中三个根都是实根，设为 R_1,R_2,R_3 则由引理 1 和引理 2 知道 R_1,R_2,R_3 分别相同于 $r_i^{(k)}$ 中的一个，这里 $1\le i\le 3$, $1\le k\le 5$ 及 $\left|\frac{y_1x}{x_1y}-R_1\right|\ll 2^{-j}t^{-\varepsilon/6}$, $\left|\frac{y_1x}{x_1y}-R_2\right|\ll 2^{-j}t^{-\varepsilon/6}$, $\left|\frac{y_1x}{x_1y}-R_3\right|\ll 2^{-j}t^{-\varepsilon/6}$, 这三个式子至少有一个成立而和 $2^{-j-1}\le\min\limits_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le k\le 5}}\left|\frac{y_1x}{x_1y}-r_i^{(k)}\right|\le 2^{-j}$ 发生矛盾，故 (47), (48), (49) 三个式子之中至少有一个不成立. 如果有 $\alpha_2\ll 2^{-j}t^{-\varepsilon/5}$, 则由引理 1 及 $f_1(x)=0$ 无重根，易见上述结论也成立. 现在我们来证明下面三个式子不可能

$$\phi_{1yy}\ll 2^{-3j}R^{-5/2}N^{-9/2}N^3Xt^{-\varepsilon}, \tag{51}$$

$$\phi_{1xy}\ll 2^{-3j}R^{-\frac{7}{2}}N^{-\frac{7}{2}}N^3Xt^{-\varepsilon}, \tag{52}$$

$$\phi_{1xx}\ll 2^{-3j}R^{-\frac{9}{2}}N^{-\frac{5}{2}}N^3Xt^{-\varepsilon} \tag{53}$$

同时成立，如果 (51), (52), (53) 都成立，则在 §4 中取 $\delta=\varepsilon+\dfrac{3j\log 2}{\log t}$，则有 $|\alpha^0|\ll 2^{-3j}t^{-\varepsilon}$, $|\alpha_1^0|\ll 2^{-3j}t^{-\varepsilon}$, $|\alpha_2^0|\ll 2^{-3j}t^{-\varepsilon}$, 由引理 2 知，与 D_j 发生矛盾，故说 (51), (52), (53) 之中至少有一个不成立，我们将区域 D_{jl} 分成为三个子区域，其中子区域 D_{jl_1} 使得 (51) 不成立，子区域 D_{jl_2} 使得 (52) 不成立，子区域 D_{jl_3} 使得 (53) 不成立，那末我们有

$$\begin{aligned} S_{5jl}^{(i,k)} &= \sum_{(x,y)\in D_{jl_1}} e^{2\pi i\psi(x,y)}+\sum_{(x,y)\in D_{jl_2}} e^{2\pi i\psi(x,y)}+\sum_{(x,y)\in D_{jl_3}} e^{2\pi i\psi(x,y)} \\ &= S_{5jl_1}^{(i,k)}+S_{5jl_2}^{(i,k)}+S_{5jl_3}^{(i,k)}. \end{aligned} \tag{54}$$

我们知道估计和式 $S_{5jl_1}^{(i,k)}, S_{5jl_2}^{(i,k)}, S_{5jl_3}^{(i,k)}$ 是相似的，我们将对 $S_{5jl_1}^{(i,k)}$ 进行估值，由于 $2^{-3j}\gg t^{-\frac{3}{37}}$, $\lambda=t^{-\frac{27}{15}}RN^2a^{\frac{52}{15}}\rho^{-\frac{37}{15}}$, $R\ll\rho=at^{-\frac{12}{37}}$, $N\ll\dfrac{t\rho}{a^2}$, $t^{\frac{587}{1295}}\ll a\ll t^{\frac{1}{2}}$ 及 (12), (21) 而得

$$2^{-3j}R^{-5/2}N^{-3/2}Xt^{1/2-\varepsilon}\ll\psi_{yy}\ll R^{-5/2}N^{-9/2}Qt^{1/2}, \tag{55}$$

$$|\psi_{yyy}|\ll R_3=R^{-5/2}N^{-11/2}Qt^{1/2}. \tag{56}$$

又将区域 D_{jl_1} 分成为不多于 $O((\log t)^2)$ 个子区域，使得在每一个子区域中恒有

$$\frac{1}{R^*}\ll|\psi_{yy}|\ll\frac{1}{R^*}, \tag{57}$$

这里有

$$t^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{5}{2}}N^{\frac{9}{2}}Q^{-1}\ll R^*\ll 2^{3j}R^{\frac{5}{2}}N^{\frac{3}{2}}X^{-1}t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{58}$$

设 D_{jl_1m} 为其中的任一个子区域，假设 $H_0(x,y)=0$ 对于 x 说的解有 $d_n(y)+ie_n(y)$, 即有

$$\frac{1}{5}|H_0(x,y)|=\prod_{n=1}^{6}|x-d_n(y)-ie_n(y)|W^2.$$

对于固定的一个 $n(1\le n\le 6)$ 将 D_{jl_1m} 中满足 $|x-d_n(y)-ie_n(y)|\ll N^{1-\alpha}$ 的所有点，令它属于 $D_{jl_1m_n}$, 其中 $N^\alpha=2^{-3j/2}R^{3/4}N^{11/4}t^{-1/4}Q^{-1/2}$ 将 D_{jl_1m} 中除去 $D_{jl_1m_1}$, $D_{jl_1m_2}$, $D_{jl_1m_3}$, $D_{jl_1m_4}$, $D_{jl_1m_5}$, $D_{jl_1m_6}$ 后所剩余的，令它为 $D_{jl_1m_7}$, 又用记号 $S_{5jl_1n}^{(i,k)}$ 表示和式 $S_{5jl_1}^{(i,k)}$ 中对应于子区域 $D_{jl_1m_n}$

的部分和，这里 $1 \le n \le 7$, 现在我们来证明当 $(x,y) \in D_{jl_1m_7}$ 时恒有

$$H_0(x,y) \gg \min(2^{-6j}N^6t^{-\varepsilon}X^2, 2^{-5j}N^{7-\alpha}t^{-\varepsilon}X^2R^{-1}, 2^{-5j}N^{8-2\alpha}t^{-\varepsilon}X^2R^{-2}) \quad (59)$$

成立，因为由 (47), (48), (49) 三式之中至少有一个式子不成立，故下面三式

$$H_0(x,y) \gg 2^{-6j}N^6t^{-\varepsilon}X^2, \quad (60)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}H_0(x,y) \gg 2^{-5j}N^6R^{-1}t^{-\varepsilon}X^2, \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0(x,y) \gg 2^{-5j}N^6R^{-2}t^{-\varepsilon}X^2 \quad (62)$$

至少有一个成立，由于

$$\frac{\partial}{\partial x}H_0(x,y) = 5\prod_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{6}\prod_{l=1}^{6}(x-d_l(y)-ie_l(y))W^2, \quad (63)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0(x,y) = 5\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{6}\sum_{m=1}^{6}\prod_{\substack{l=1\\n\neq l\neq m}}^{6}(x-d_l(y)-ie_l(y))W^2, \quad (64)$$

如果 (60) 成立，则显然 (59) 成立，如果 (61) 成立，由 (63) 知道至少存在一个 m, 使得 $W^2\prod_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{6}|x-d_l(y)-ie_l(y)| \gg 2^{-5j}t^{-\varepsilon}N^6X^2R^{-1}$, 由于当 $(x,y) \in D_{jl_1m_7}$ 时恒有 $|x-d_m(y)-ie_m(y)| \gg N^{1-\alpha}$, 故 (59) 成立，如果 (62) 成立，则由 (64) 知道至少存在一组 (m,n) 使得 $\prod_{\substack{l=1\\n\neq l\neq m}}^{6}|x-d_l(y)-ie_l(y)| \gg 2^{-5j}t^{-\varepsilon}N^6X^2(RW)^{-2}$, 由于当 $(x,y) \in D_{jl_1m_7}$ 时恒有 $|(x-d_n(y)-ie_n(y))(x-d_m(y)-ie_m(y))| \gg N^{2-2\alpha}$, 故得 (59) 成立，总之当 $(x,y) \in D_{jl_1m_7}$ 时 (59) 恒成立，关于和式 $S_{5jl_1n}^{(i,k)}$ 这里 $1 \le n \le 6$ 可以使用普通的方法进行估值，即设 $N^{2-\alpha}R^{-1}\psi_{yy} \gg 1$ 时，可以使用 [8] 中的引理 1 而得到

$$S_{5jl_1n}^{(i,k)} \ll N^{2-\alpha}\psi_{yy}^{\frac{1}{2}} \ll 2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-5/2}t^{1/2}Q, \quad (65)$$

而当 $N^{2-\alpha}R^{-1}\psi_{yy}\ll 1$ 时则有

$$S_{5jl_1n}^{(i,k)}\ll R\psi_{yy}^{-1/2}\ll 2^{3j/2}R^{9/4}N^{3/4}X^{-1/2}t^{-1/4+\varepsilon}. \tag{66}$$

现在我们对于 $S_{5jl_17}^{(i,k)}$ 进行估值，这里有

$$S_{5jl_17}^{(i,k)}=\sum_x\sum_{c_1(x)\le y\le c_2(x)}e^{2\pi i\psi(x,y)}, \tag{67}$$

这里的 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 都是 x 的代数函数，又在区间 $c_1(x)\le y\le c_2(x)$ 中的 y 都一定满足

$$H_0(x,y)\gg\min(2^{-6j}N^6t^{-\varepsilon}X^2,2^{-5j}N^{7-\alpha}t^{-\varepsilon}X^2R^{-1},2^{-5j}N^{8-2\alpha}t^{-\varepsilon}X^2R^{-2}).$$

使用 [8] 中的引理 2 我们得到

$$S_{5jl_17}^{(i,k)}=S_{5jl_17_1}^{(i,k)}+S_{5jl_17_2}^{(i,k)}+S_{5jl_17_3}^{(i,k)}, \tag{68}$$

这里

$$S_{5jl_17_1}^{(i,k)}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sum_x\sum_{\nu_1(x)<\nu\le\nu_2(x)}\frac{e^{2\pi i\eta(x)}}{\sqrt{\psi_{yy}(x,n_\nu(x))}}, \tag{69}$$

$$S_{5jl_17_2}^{(i,k)}\ll\sum_x\sqrt{R^*}\ll 2^{3j/2}R_i^{9/4}N^{3/4}X^{-1/2}t^{-1/4+\varepsilon}, \tag{70}$$

$$S_{5jl_17_3}^{(i,k)}\ll\sum_x\log t\ll R\log t. \tag{71}$$

又 (69) 中的 $\eta(x)=\psi(x,n_\nu(x))-\nu n_\nu(x)$. 当 $\psi_{yy}\le 0$ 时有 $\nu_1(x)=\psi_y(x,c_2(x))$, $\nu_2(x)=\psi_y(x,c_1(x))$, 又当 $\psi_{yy}>0$ 时有 $\nu_1(x)=\psi_y(x,c_1(x))$, $\nu_2(x)=\psi_y(x,c_2(x))$. 交换 x 和 ν 的次序，对于一个固定的 ν 而 x 只经过正整数，它使得 $\nu_1(x)\le\nu$ 同时又使得 $\nu_2(x)\ge\nu$, 由于 $\nu_1(x)=\nu$ 或 $\nu_2(x)=\nu$ 的 x 的解的数目不超过有限个，又由于 $\nu_1(x)$ 和 $\nu_2(x)$ 都是 x 的连续函数，所以说可假定同时满足条件 $\nu_1(x)\le\nu$ 及 $\nu_2(x)\ge\nu$ 的 x 的解只经过不多于有限段的连续正整数，而每段的长度当然不超过 $2^{-j}R$, 现在考虑其中的任一段，对于这些 x 我们考虑

$$\sum_x e^{2\pi i\eta(x)}\frac{1}{\sqrt{\psi_{yy}(x,n_\nu(x))}},$$

其中

$$\eta(x)=\psi(x,n_\nu(x))-\nu n_\nu(x),\quad \eta'(x)=\psi_x(x,n_\nu(x)),$$
$$\eta''(x)=(\psi_{xx}\psi_{yy}-\psi_{xy}^2)\psi_{yy}^{-1}=H(x,n_\nu(x))\psi_{yy}^{-1}(x,n_\nu(x)),$$

对于固定的 ν 而言，$n_\nu(x)$ 仍指满足方程式 $\psi_y(x,y)=\nu$ 的 y 的解，对于一个给定的 x，它必须满足 $\nu_1(x)\le\nu\le\nu_2(x)$，如果 $\psi_{yy}\le 0$，当 $\nu\le\nu_2(x)=\psi_y(x,c_1(x))$ 时，由于 $\psi_{yy}\le 0$，故有 $n_\nu(x)\ge c_1(x)$，同样的当 $\nu\ge\nu_1(x)$ 时则有 $n_\nu(x)\le c_2(x)$，故有

$$c_1(x)\le n_\nu(x)\le c_2(x).\tag{72}$$

而当 $\psi_{yy}\ge 0$ 时同样可以证明 (72) 是成立的，故有

$$\begin{aligned}&H_0(x,n_\nu(x))\\&\quad\ge\min(2^{-6j}N^6X^2t^{-\varepsilon},2^{-5j}N^{7-\alpha}R^{-1}X^2t^{-\varepsilon},2^{-5j}N^{8-2\alpha}R^{-2}X^2t^{-\varepsilon}).\end{aligned}$$

由上式，$2^{-j}\gg t^{-\frac{1}{37}}$，$\lambda=RN^2a^{\frac{52}{15}}\rho^{-\frac{37}{15}}t^{-\frac{27}{15}}$，$R\ll\rho=at^{-\frac{12}{37}}$，$N\ll\frac{t\rho}{a^2}$，$\frac{t\rho}{a^2}t^{\frac{587}{1295}}\ll a\ll t^{\frac12}$ 及 (22) 而得

$$\begin{aligned}&H(x,n_\nu(x))\\&\quad\ge\min(2^{-6j}N^{-1}R^{-7}X^2t^{1-\varepsilon},2^{-5j}N^{-\alpha}R^{-8}X^2t^{1-\varepsilon},2^{-5j}N^{1-2\alpha}R^{-9}X^2t^{1-\varepsilon}),\end{aligned}\tag{73}$$

显然我们有

$$H(x,n_\nu(x))\ll tR^{-7}N^{-7}Q^2,\tag{74}$$

于是由 [8] 中的引理 1 及 x 所经过的区间其长度 $\ll 2^{-j}R$ 可以得到

$$\sum_x\frac{e^{2\pi i\eta(x)}}{\sqrt{\psi_{yy}(x,n_\nu(x))}}\ll 2^{-j}R(HR^*)^{1/2}R^{*1/2}+(HR^*)^{-1/2}R^{*1/2},$$

由于 y 所经过的区间其长度 $\ll 2^{-j}N$，故 ν 的个数不会超过 $2^{-j}N\psi_{yy}+2^{-j}R\psi_{xy}$，故得

$$\begin{aligned}\sum_\nu\sum_x\frac{e^{2\pi i\eta(x)}}{\sqrt{\psi_{yy}(x,n_\nu(x))}}&\ll(2^{-j}NR^{*-1}+2^{-j}R\psi_{xy})(2^{-j}RH^{1/2}R^*+H^{-1/2})\\&\ll 2^{-j}R^{-5/2}N^{-7/2}Qt^{1/2}(2^{-j}t^{1/2}R^{-5/2}N^{-7/2}Q\cdot 2^{3j}R^{5/2}N^{3/2}X^{-1}t^{-1/2+\varepsilon}\\&\quad+2^{3j}N^{1/2}R^{7/2}X^{-1}t^{-1/2+\varepsilon}+2^{5j/2}N^{\alpha/2}R^4X^{-1}t^{-1/2+\varepsilon/2}\\&\quad+2^{5j/2}N^{-1/2+\alpha}R^{9/2}X^{-1}t^{-1/2+\varepsilon})\end{aligned}$$

$$\ll \Delta + 2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-11/2}Q^2t^{1/2}X^{-1}t^{\varepsilon}. \tag{75}$$

在上式中 $\Delta = 2^{2j}R^{5/2}N^{-1/2}\lambda^{1/2}X^{-1}$ 又我们使用了 $\lambda = RN^2a^{\frac{52}{15}}\rho^{-\frac{37}{15}}t^{-\frac{27}{15}}$, $R \ll \rho = at^{-\frac{12}{37}}, N \ll \frac{t\rho}{a^2}$, 由于

$$2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-5/2}t^{1/2}Q + R\log t \ll 2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-11/2}Q^2t^{1/2}X^{-1},$$

故由 (65) 到 (71) 这 7 个式子及 (75) 而得

$$S_{5jl_1}^{(i,k)} \ll 2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-11/2}Q^2t^{1/2}X^{-1} + 2^{3j/2}R^{9/4}X^{-1/2}t^{-1/4+\varepsilon} + \Delta, \tag{76}$$

对于和式 $S_{5jl_2}^{(i,k)}$ 的估值，可以使用 [2] 的变数的变换，然后再使用估值 $S_{5jl_1}^{(i,k)}$ 的相同方法而得到

$$S_{5jl_2}^{(i,k)} \ll 2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-11/2}Q^2t^{1/2}X^{-1} + 2^{3j/2}R^{9/4}N^{3/4}X^{-1/2}t^{-1/4+\varepsilon} + \Delta, \tag{77}$$

对于和式 $S_{5jl_3}^{(i,k)}$ 的估值可以相似于估值 $S_{5jl_1}^{(i,k)}$ 的方法，实际上当 (51), (52) 成立时，如果 (47) 不成立，则显然可以使用相同于估值 $S_{5jl_1}^{(i,k)}$ 的方法进行估值，如果 (47) 成立，则由于 (53) 不成立，容易推出 (48) 不成立，故可使用相同于估值 $S_{5jl_1}^{(i,k)}$ 的方法而得到

$$S_{5jl_3}^{(i,k)} \ll 2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-11/2}Q^2t^{1/2}X^{-1} + 2^{3j/2}R^{9/4}N^{3/4}X^{-1/2}t^{-1/4+\varepsilon} + \Delta, \tag{78}$$

由 (54), (76), (77), (78) 而得

$$S_{5jl}^{(i,k)} \ll 2^{3j/2}R^{-5/2}N^{-11/2}Q^2t^{1/2}X^{-1} + 2^{3j/2}R^{9/4}N^{3/4}X^{-1/2}t^{-1/4+\varepsilon} + \Delta, \tag{79}$$

由 (43), (44), (45) 及 (79) 而得当 $t^{\frac{587}{1295}} \ll a \ll t^{\frac{1}{2}}$ 时有

$$S_3 \ll t^{1/30}(t\rho^2a^{-2})^{13/15}(R\rho^{-1})^{1/2}.$$

8. 我们的结果的证明

当 $\alpha \leq t^{\frac{587}{1295}}$ 时使用 [1] 中的第 472 页而得

$$\sum_{n=a}^{2a}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}}=O(t^k a^{l-k-1/2}).$$

我们取 $k=\frac{97}{696}$, $l=\frac{480}{696}$, 就得到当 $\alpha\le t^{\frac{587}{1295}}$ 时有

$$\sum_{n=a}^{2a}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}}=O(t^{6/37}),$$

而当 $t^{\frac{587}{1295}}<a\le t^{\frac{1}{2}}$ 由 (2) 式及 $f''(m_\nu)\gg tra^{-3}$, $\beta=O(tra^{-2})$ 及 [1] 中的引理 3, 我们得到

$$\begin{aligned}S_2 &= O(\rho(t\rho a^{-3})^{-1/2}t^{1/30}(\rho t\rho a^{-2})^{13/15})+O(a^{3/2}t^{-1/2}\rho^{3/2})+O(\rho^2\log t)\\&\quad+O(a^{-2/5}t^{2/5}\rho^{12/5})\\&=O(t^{2/5}\rho^{67/30}a^{-7/30})+O(a^{3/2}t^{-1/2}\rho^{3/2})+O(\rho^2\log t)\\&\quad+O(a^{-2/5}t^{2/5}\rho^{12/5}),\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}|S_1| &= O(a\rho^{-1/2})+O(a^{23/60}t^{1/5}\rho^{7/60})+O(a^{5/4}t^{-1/4}\rho^{-1/4})\\&\quad+O(a^{1/2}\log t)+O(a^{3/10}t^{1/5}\rho^{1/5}),\end{aligned}$$

取 ρ 使得

$$a\rho^{-1/2}=t^{1/5}a^{23/60}\rho^{7/60},$$

则得

$$\rho^{37/60}=t^{-1/5}a^{37/60},\quad \rho=(t^{-1/5}a^{37/60})^{60/37}=at^{-12/37},$$

故显见当 $a=O(t^{1/2})$ 时有

$$S_1=O(t^{6/37}a^{1/2}),$$

再使用 [1] 中的引理 3 得到

$$\sum_{a<n\le 2a}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}}=O(t^{6/37}),$$

这里 $a\ll t^{1/2}$, 故得到 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^{6/37})$.

参考文献

[1] 闵嗣鹤. On the order of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$. *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 1949, **65**: 448 ~ 472

[2] 尹文霖. 狄氏除数问题. 北京大学学报, 1959, **5**: 103 ~ 126

[3] Corput, Koksma. Sur l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans le bande critique. *Annales de Toulouse* (3), 1930, **22**: 1 ~ 39

[4] Walfisz. Zur Abschatzung von $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$. *Gottingen Nachrichten,* 1924: 155 ~ 158

[5] Titchmarsh. On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (11). *Quart. J. Math.*, 1931, **2**

[6] Phillips. The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 1933, **4**:209 ~ 225

[7] Titchmarsh. On the order of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 1942, **13**: 11 ~ 17

[8] Виноградов И М. К вопросу о числе целых точек в заданной обляс-ти. *Извеcтия Ак. Наук СССР*, 1960, **24**: 777 ~ 786

关于算术级数中的最小素数 *†

令 $P_{\min}(D,l)$ 表示算术级数 $nD+l$, $1 \le l \le D-1$, $(l,D)=1$ 中的最小素数. 在 Riemann 假设下，易证：对充分大的 D,

$$P_{\min}(D,l) < D^{2+\epsilon}, \tag{1}$$

其中 ϵ 是任意正数. 1944 年，Ю. В. Линник[1] 在没有任何假设的情况下，证明了存在一绝对正常数 A, 使得

$$P_{\min}(D,l) < D^{A}. \tag{2}$$

但他的证明足有 60 多页. 1954 年，К. А. Родосский 给出了 (2) 的一简化证法. 1958 年，潘承洞 [2] 证明了 $A \le 5448$. 这篇注记中，我们将给出下面定理的一个证明梗概.

定理 对于充分大的 D, 我们有

$$P_{\min}(D,l) < D^{A_1}, \tag{3}$$

其中 $A_1 \le 777$.

这一定理的证明基于下面的辅助引理和两个基本引理.

辅助引理 (Page). 设 $s=G+it$. 则存在一常数 $C>0$. 使得在区域 $1-C\log^{-1}D(|t|+1) \le G \le 1$, $-\infty < t < \infty$ 中，除了仅可能有一个属于模 D 的例外实特征的函数 $L(s,\tilde{\chi})$ 有一个简单实零点之外，相应于模 D 的特征 χ 的任何 $L(s,\chi)$ 都无零点. 对于充分大的 D, 我们有 $C \ge \dfrac{1}{104\frac{1}{2}}$.

基本引理 1. 设 $L(s,\chi_0), L(s,\chi_1), \ldots, L(s,\chi_{\phi(D)-1})$ 是属于模 D 的所有 L- 函数，设 $Q(D,\psi)$ 表示在下述矩形 R 中至少有一个零点的 L- 函数的个数，

$$1-\psi\log^{-1}D \le G \le 1, \quad t_0 < t \le t_0 + \frac{1}{25\log D}, \tag{R}$$

---

* 1964 年 2 月 27 日收到.

† 原载 *Sci. Sin.*, **14**(1965), pp. 1868–1871.

其中 $\psi \in \left[\frac{1}{104\frac{1}{2}}, \frac{1}{6}\right]$, $|t_0| \le 1$. 则

$$Q(D,\psi) < e^{320D}, \quad 当\frac{1}{104\frac{1}{2}} \le \psi \le \frac{1}{6}时.$$

设 $Q_1(D,\psi)$ 表示在下述矩形 R_1 中至少有一个零点的 L- 函数的个数,

$$1 - \psi \log^{-1} D \le G \le 1, \quad |t| \le \frac{e^{U\psi}}{25 \log D}, \qquad (R_1)$$

其中 $\psi \in \left[\frac{1}{6}, U^{-1} \log\log D\right]$, $U \ge 10$. 则

$$Q_1(D,\psi) < \begin{cases} e^{(U+320)\psi} & 当 2 \le \psi \le U^{-1}\log\log D 时, \\ e^{(U+300)\psi} & 当 \frac{1}{6} \le \psi \le 2 时. \end{cases}$$

基本引理 2. 假设存在一个属于模 D 的例外零点 $\tilde{\beta}$, 设 $\rho_0 = \beta_0 + i\tau_0 \ne \tilde{\beta}$, $|\tau_0| \le 1$, $\beta_0 = 1 - \frac{\psi}{\log D}$ 是 $L(s,\chi)(\chi \ne \chi_0)$ 的任一零点. 我们有

$$\tilde{\delta} > \begin{cases} \frac{2}{3}(3,660,000\psi^2)^{-1} e^{-374\psi} \log^{-1} Dl & 当 \psi \ge 2 时, \\ \frac{2}{(2190)(1350)} e^{-c_1\psi} (\log Dl)^{-1} & 当 \frac{1}{12} \le \psi < 2 时, \\ \min\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11} - \psi\right)^2, \frac{2}{3}(1.001)^{-1}\left(\frac{(\frac{1}{11}-\psi)^2}{16}\right)\right. & \\ \left.\times e\left\{1.4 - \frac{2.02}{(\frac{1}{11}-\psi)e^8}\right\}\right) \log^{-1} Dl & 当 \frac{1}{26} \le \psi < \frac{1}{12} 时, \\ \min\left(\left(\frac{1}{20} - \psi\right)^2, \frac{2}{3}(1.001)^{-1}\left(\frac{(\frac{1}{20}-\psi)^2}{8}\right)\right. & \\ \left.\times e\left\{9.8 - \frac{2.02}{(\frac{1}{20}-\psi)e^4}\right\}\right) \log^{-1} Dl & 当 \frac{1}{104\frac{1}{2}} \le \psi < \frac{1}{26} 时, \end{cases}$$

其中

$$\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}, \quad c_1 = \begin{cases} 300 & 当 \frac{1}{2} \le \psi \le 2 时, \\ 270 & 当 \frac{1}{4} \le \psi < \frac{1}{2} 时, \\ 180 & 当 \frac{1}{12} \le \psi < \frac{1}{4} 时. \end{cases}$$

运用这三个基本引理来证明定理, 主要任务就是要估计下面的积分 [2]:

$$\left|\sum_{\rho}{}' \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+h} \cdots \int_{x_1}^{x_1+h} e^{-\{\delta(3-\delta)+\tau^2-i\tau(3-2\delta)\}x\log D} dx dx_1 \cdots dx_{B-1}\right|,$$

其中 $\rho=\beta+i\tau$ 通过 $L(s,\chi)$ 的所有零点 (模 D), $0\le\beta\le1$, (除去 $\rho=\tilde{\beta}$).

为了估计这个积分，我们把区域 $0\le G\le1$ 划分成下面的子区域：

$$G_1^{(n)}=\left\{n+\frac{1}{30}\le|t|\le n+\frac{31}{30};\ 0\le G\le1\right\},\quad (n=1,2,\dots);$$
$$G_2^{(i,m)}=\left\{\frac{1}{j_i\log D}\le1-G\le\frac{1}{j_{i+1}\log D},\ \frac{m}{25\log D}\le t\le\frac{m+1}{25\log D}\right\},$$

其中 $i=1,2,\dots,15$; $m=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm\log D$; $j_1=104\frac{1}{2}$, $j_2=\frac{1}{92}$, $j_3=\frac{1}{84}$, $j_4=\frac{1}{75}$, $j_5=\frac{1}{65}$, $j_6=\frac{1}{60}$, $j_7=\frac{1}{42}$, $j_8=\frac{1}{36}$, $j_9=\frac{1}{30}$, $j_{10}=\frac{1}{26}$, $j_{11}=\frac{1}{18}$, $j_{12}=\frac{1}{12}$, $j_{13}=\frac{1}{9}$, $j_{14}=\frac{2}{15}$, $j_{15}=\frac{4}{27}$, $j_{16}=\frac{1}{6}$;

$$G_3^{(n,l)}=\left\{\frac{n+\frac{1}{6}+\frac{l}{1000}}{\log D}\le1-G\le\frac{n+\frac{1}{6}+\frac{l+1}{1000}}{\log D},\ |t|\le\frac{e^{10(n+\frac{1}{6}+\frac{l+1}{1000})}}{25\log D}\right\}.$$

$$G_3^{(n,l,m)}=\left\{\frac{n+\frac{1}{6}+\frac{l}{1000}}{\log D}\le1-G\le\frac{n+\frac{1}{6}+\frac{l+1}{1000}}{\log D};\right.$$
$$\left.\frac{e^{(10+m)(n+\frac{1}{6}+\frac{l+1}{1000})}}{25\log D}\le|t|\le\frac{e^{(11+m)(n+\frac{1}{6}+\frac{l+1}{1000})}}{25\log D}\right\},$$

其中 $n=0,1,2,\dots,n_1$, $l=0,1,2,\dots,999$, $m=0,1,2,\dots,m_1$. n_1 是使得 $n_1+1\le U^{-1}\log\log D$ 的最大自然数，m_1 是使得 $(10+m_1)(n+\frac{1}{6}+\frac{l+1}{1000})\le\log\log D$ 的最大自然数；

$$G_4^{(n)}=\left\{\frac{n}{\log D}\le1-G\le\frac{n+1}{\log D};\quad |t|\le1\right\},$$
$$(n=n_1,n_1+1,\dots,n_2\le\log D).$$

由此，我们可得

$$\sum_{\substack{p\le D^{A_1}\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,D)}}\log p\cdot\sqrt{p}e^{-\frac{\log^2p}{4N^2}}>0.$$

此即所需证明的结果.

参考文献

[1] Линник Ю В. О Наименьщем простом числе в арифметической прогрессии. *Матем. сб.*, 1944, **15** (57): 139 ~ 178

[2] 潘承洞. On the least prime in an arithmetical progression. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 1958, **4**: 1 ~ 34

[3] 潘承洞. On the least prime in an arithmetical progression. *Science Record*, New Ser., 1957, **1**: 35 ~ 37

[4] Burgess D A. On character sums and L-series, II. *Proc. London Math. Soc.*, 1963, **13**: 524 ~ 536

[5] Чудаков. Введение в теорию L-функций Дирихле, М. - Л.. 1947

[6] Родосский К А. О нулях L-функций Дирихле. *Изв. АН. СССР*, 1949, **13**: 315 ~ 328

[7] Titchmarsh E C. The Theory of Functions. Oxford University Press, 1944

表大偶数为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和 †

§1 引 言

把命题"当一个充分大的偶数都能够表示为一个素数及一个不超过 a 个素数的乘积之和"简记为 $(1,a)$.

不少数学工作者改进了 Selberg 方法及 Dirichlet L- 函数的某些结果并用之改善 $(1,a)$. 现在我们将 $(1,a)$ 发展历史简述如下:

(1,5) (潘承洞 [1] 、 Барбан [2])

(1,4) (王元 [3] 、潘承洞 [4] 、 Барбан [5])

(1,3) (Бухштаб [6] 、 Виноградов [7])

本简报的目的是要给出 $(1,2)$ 的证明的提要. 详细的证明将另文发表.

§2 若 干 引 理

命 x 是一个大偶数. 命 $P_x(x,x^{1/10})$ 为适合下列条件的素数 p 的个数:

$$p \le x, \quad p \not\equiv x \,(\bmod\, p_i), \quad (1 \le i \le j).$$

此处 $3 = p_1 < p_2 < \cdots < p_j \le x^{1/10}$ 为不超过 $x^{1/10}$ 的全部奇素数.

给定一个素数 p'. 命 $P_x(x,p',x^{1/10})$ 为适合下列条件的素数 p 的个数:

$$p \le x, \quad p \equiv x \,(\bmod\, p'), \quad p \not\equiv x \,(\bmod\, p_i) \quad (1 \le i \le j).$$

此处 $p_1,p_2,\cdots,p_j$ 的意义同上.

命 $Q(x,x^{1/10},x^{1/3})$ 为适合下列条件的素数 p 的个数:

$$x - p = p_1p_2p_3, \quad p \le x, \quad x^{1/10} < p_1 \le x^{1/3} < p_2 < p_3,$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

---

† 原载科学通报, **17**(1966), pp. 385 – 386.

命 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的素数 p 的个数：

$$x-p=p_1 \quad 或 \quad x-p=p_2p_3,$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

我们已经证明下面三个引理恒成立：

引理 1. 我们有

$$P_x(x,x^{1/10}) \geq \frac{9.976xC_x}{\log^2 x},$$

此处

$$C_x=2e^{-\gamma}\prod_{\substack{p|x\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

其中 γ 为 Euler 常数.

引理 2. 我们有

$$\sum_{x^{1/10}<p'\leq x^{1/3}} P_x(x,p',x^{1/10}) \leq \frac{15.355xC_x}{\log^2 x}.$$

引理 3. 我们有

$$Q(x,x^{1/10},x^{1/3}) \leq \frac{4.4xC_x}{\log^2 x}.$$

§3 定理的证明

定理. 每一个充分大的偶数 x 都能够表示为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和.

证. 显然有

$$P_x(1,2) \geq P_x(x,x^{1/10})-\frac{1}{2}\sum_{x^{1/10}<p'\leq x^{1/3}} P_x(x,p',x^{1/10}) -\frac{1}{2}Q(x,x^{1/10},x^{1/3})-x^{0.91}. \tag{1}$$

由 (1) 式及引理 1,2,3 即得到

$$P_x(1,2) \geq \frac{0.098xC_x}{\log^2 x},$$

故定理得证.

参考文献

[1] 潘承洞. 中国科学, 1963, **12**: 873 ~ 888

[2] Барбан М Б. *Доклады Академии Уз СССР*, **8**: 9 ~ 11

[3] 王元. 中国科学, 1962, **11**: 1033 ~ 1054

[4] 潘承洞. 中国科学, 1963, **12**: 455 ~ 474

[5] Барбан М Б. *Математический сборник*, 1963: 419 ~ 425

[6] Бухштаб А А. *Доклады АН СССР*, 1965: 739 ~ 742

[7] Виноградов А И. *Изв. Акад. Наук*, 1965, **29**: 903 ~ 934

大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和 *†

摘　要

本文的目的在于用筛法证明了：每一充分大的偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和.

关于孪生素数问题亦得到类似的结果.

一. 引　言

把命题“每一个充分大的偶数都能表示为一个素数及一个不超过 a 个素数的乘积之和”简记为 $(1,a)$.

不少数学工作者改进了筛法及素数分布的某些结果，并用以改善 $(1,a)$. 现在我们将 $(1,a)$ 发展历史简述如下：

$(1,c)$ – Renyi[1],

$(1,5)$ – 潘承洞 [2] 、 Барбан [3],

$(1,4)$ – 王元 [4] 、潘承洞 [5] 、 Барбан[6],

$(1,3)$ – Бухштаб [7] 、 Виноградов [8] 、 Bombieri[9],

在文献 [10] 中我们给出了 $(1,2)$ 的证明提要.

命 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的素数 p 的个数：

$$x-p=p_1 \quad 或 \quad x-p=p_2p_3,$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

用 x 表一充分大的偶数. 命 $C_x=\prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$.

对于任意给定的偶数 h 及充分大的 x, 用 $x_h(1,2)$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数：

$$p\le x, \quad p+h=p_1 \quad 或 \quad p+h=p_2p_3,$$

* 1973 年 3 月 13 日收到.

† 原载中国科学， **16**(1973), no. 2, pp. 111 – 128.

其中 p_1, p_2, p_3 都是素数.

本文目的在于证明并改进作者在文献 [10] 内所提及的全部结果，现在详述如下.

定理 1. (1,2) 及 $P_x(1,2) \geq \frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$.

定理 2. 对于任意偶数 h, 都存在无限多个素数 p, 使得 $p+h$ 的素因子的个数不超过 2 个及 $x_h(1,2) \geq \frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$.

在证明定理 1 时，主要用到了本文中的引理 8 和引理 9. 在证明引理 8 时，我们使用较为简单的数字计算方法；而证明引理 9 时，我们使用了 Bombieri 定理 [9] 及 Richert[11] 中的一个结果.

二. 几个引理

引理 1. 假设 $y \geq 0$, 而 $[\log x]$ 表示 $\log x$ 的整数部分， $x > 1$,

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^\omega d\omega}{\omega(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}})^{[\log x]+1}}.$$

显见，当 $0 \leq y \leq 1$ 时，有 $\Phi(y)=0$. 对于所有 $y \geq 0$, 则 $\Phi(y)$ 是一个非减函数. 当 $\log x \geq 10^4$ 及 $y \geq e^{2(\log x)^{-0.1}}$ 时，则有

$$1 - x^{-0.1} \leq \Phi(y) \leq 1.$$

证. 我们先来证明

$$\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right) = \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left\{(\log y)^r + \sum_{i=1}^{r}\frac{(-1)^i r\cdots(r-i+1)(\log y)^{r-i}}{\omega^i}\right\} \quad (1)$$

成立. 显见， (1) 式当 $r=1$ 和 $r=2$ 时都成立. 现假定 (1) 式对于 $r=2,\ldots,S$ 时都成立，而证明对于 $S+1$ 也成立. 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{S+1}}{\partial\omega^{S+1}}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right) &= \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{y^\omega\left(\frac{(\log y)^S}{\omega} + \sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^i S\cdots(S-i+1)(\log y)^{S-i}}{\omega^{i+1}}\right)\right\}\\ &= y^\omega\left\{\frac{(\log y)^{S+1}}{\omega} + \sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^i S\cdots(S-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{\omega^{i+1}}\right.\\ &\quad\left. - \frac{(\log y)^S}{\omega^2} + \sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^{i+1}S\cdots(S-i+1)(i+1)(\log y)^{S-i}}{\omega^{i+2}}\right\}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{S+1} - \frac{(S+1)(\log y)^{S}}{\omega} + \frac{(-1)^{S+1}(S+1)!}{\omega^{S+1}}\right.$$

$$+ \sum_{i=2}^{S}\left(\frac{(-1)^{i}S\cdots(S-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{\omega^{i}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(-1)^{i}S\cdots(S+2-i)i(\log y)^{S+1-i}}{\omega^{i}}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)\left\{(\log y)^{S+1}\right.$$

$$\left.+ \sum_{i=1}^{S+1}\frac{(-1)^{i}(S+1)\cdots(S+1-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{\omega^{i}}\right\}.$$

故 (1) 式得证.

又当 $y \geq 1$ 时，我们有

$$\Phi(y) = 1 + \left\{\frac{(\log x)^{1.1+1.1[\log x]}}{[\log x]!}\right\}\left\{\frac{\partial^{[\log x]}}{\partial \omega^{[\log x]}}\left(\frac{y^{\omega}}{\omega}\right)\right\}_{\omega=-(\log x)^{1.1}}$$

$$= 1 - e^{-(\log x)^{1.1}(\log y)}\sum_{\nu=0}^{[\log x]}\frac{\{(\log x)^{1.1}(\log y)\}^{\nu}}{\nu!}$$

$$= \left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_{0}^{(\log x)^{1.1}(\log y)} e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}d\lambda.$$

因为 $0 \leq y \leq 1$ 时， $\Phi(y) = 0$. 故由上式得到：当 $y \geq 0$ 时，则 $\Phi(y)$ 是一个非减函数. 又当 $y \geq e^{2(\log x)^{-1.0}}$ 时，有

$$0 < 1 - \Phi(y) = \left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_{(\log x)^{1.1}(\log y)}^{\infty} e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}d\lambda$$

$$\leq \left\{\frac{1}{[\log x]!}\right\}\int_{2[\log x]}^{\infty} e^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}d\lambda$$

$$= \left\{\frac{([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\right\}\int_{2}^{\infty} e^{-\lambda[\log x]}\lambda^{[\log x]}d\lambda$$

$$= \left\{\frac{e^{-[\log x]}([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\right\}\int_{1}^{\infty} e^{-\lambda[\log x]}(1+\lambda)^{[\log x]}d\lambda$$

$$\leq x^{-0.1}.$$

其中用到 $\log x \geq 10^4$ 及当 $\lambda \geq 1$ 时，有 $e^{\log(1+\lambda)} \leq e^{\lambda \log 2}$.

引理 2. 令 $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$, $S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha)$, $Z = \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$, 其中 a_n 是任意的实数. 我们用令 $\sum_{\chi_q}{}^{*}$ 来表示和式之中经过且只经过模 q 的所有原特征，则有

$$\sum_{q\leq X} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n\chi_q(n)\right|^2 \leq (X^2+\pi N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2; \tag{2}$$

$$\sum_{D<q\leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n\chi_q(n)\right|^2 \ll \left(Q+\frac{N}{D}\right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2. \tag{3}$$

证. 令 F 是一个周期为 1 的复数值可微函数，则有

$$\left|F\left(\frac{a}{q}\right)\right| = \left|F(\alpha) - \int_{\frac{a}{q}}^{\alpha} dF(\beta)\right| \leq |F(\alpha)| + \int_{\frac{a}{q}}^{\alpha} |F'(\beta)||d\beta|,$$

我们用 $I(a,q)$ 来表示以 $\frac{a}{q}$ 为中心，而长度 $\frac{1}{Q^2}$ 的区间，显见，当 $1 \leq a < q$, $(a,q)=1$, $q \leq Q$ 时，所有的区间 $I(a,q)$ 都没有共同部分，故得

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}} \left|F\left(\frac{a}{q}\right)\right| &\leq \sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}} \left\{Q^2 \int_{I(a,q)} |F(\alpha)|d\alpha + \frac{1}{2}\int_{I(a,q)} |F'(\beta)|d\beta\right\}\\ &\leq Q^2 \int_0^1 |F(\alpha)|d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 |F'(\beta)|d\beta.\end{aligned}$$

我们取 $F(\alpha) = \{S(\alpha)\}^2$, 则得

$$\int_0^1 |F(\alpha)|d\alpha = Z$$

及

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 |F'(\beta)|d\beta &= \int_0^1 |S(\alpha)||S'(\alpha)|d\alpha\\ &\leq \left\{\left(\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha\right)\left(\int_0^1 |S'(\alpha)|^2 d\alpha\right)\right\}^{1/2}\\ &= Z^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |S'(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 = \sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leq a<q}} \left\{\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|\left|e\left(-\frac{a\left(M+\left[\frac{N}{2}\right]\right)}{q}\right)\right|\right\}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{q \le Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \le a < q}} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\left\{ n - \left(M + \left[\frac{N}{2} \right] \right) \right\} \frac{a}{q} \right) \right|^2 \\
&= \sum_{q \le Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \le a < q}} \left| \sum_{-[\frac{N}{2}]+1 \le n \le N-[\frac{N}{2}]} a_{n+M+[\frac{N}{2}]} e\left(\frac{na}{q} \right) \right|^2 \\
&\le ZQ^2 + Z^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]} \left((2\pi n) a_{n+M+[\frac{N}{2}]} \right)^2 \right\}^{1/2} \\
&\le ZQ^2 + \pi N Z^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]} \left| a_{n+M+[\frac{N}{2}]} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (Q^2 + \pi N) Z. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

令 χ^* 表示原特征,

$$
\tau(\chi_q^*) = \sum_{1 \le a < q} \chi_q^*(a) e\left(\frac{a}{q} \right), \quad \tau\left(\overline{\chi_q^*} \right) \chi_q^*(n) = \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi_q^*}(a) e\left(\frac{na}{q} \right).
$$

由于 $|\tau(\overline{\chi_q^*})|^2 = q$, 故得到

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\varphi(q)} \right) \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 &\le \left(\frac{1}{q\varphi(q)} \right) \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \tau(\overline{\chi}_q) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \\
&= \left(\frac{1}{q\varphi(q)} \right) \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}_q(a) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q} \right) \right|^2 \\
&\le \left(\frac{1}{q\varphi(q)} \right) \sum_{\chi_q} \left| \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}_q(a) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q} \right) \right|^2 \\
&\le \frac{1}{q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q} \right) \right|^2.
\end{aligned}
$$

由上式及 (4) 式, 即得到 (2) 式. 我们定义 h 是一个正整数, 它使得 $2^h D < Q \le 2^{h+1} D$, 则我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{D < q \le Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \\
&\quad \le \sum_{i=0}^{h} \left(\sum_{2^i D < q \le 2^{i+1} D} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi_q(n) \right|^2 \right)
\end{aligned}
$$

$$\leq \sum_{i=0}^{h}\left(\frac{1}{2^i D}\right)\left(\sum_{2^i D<q\leq 2^{i+1}D}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2\right)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{h}\left(2^{i+2}D+\frac{\pi N}{2^i D}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

$$\ll \left(Q+\frac{N}{D}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2.$$

故引理 2 得证.

引理 3. 当 $S=\sigma+it$ 和 $\sigma\geq\frac{1}{2}$ 时，则有

$$\sum_{q\leq Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}|L(S,\chi_q)|^4\ll Q^2|S|^2(\log Q)^4.$$

证. 我们有

$$L(S,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^S}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^S}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{i\leq n}\chi(i)-\sum\limits_{i\leq n-1}\chi(i)}{n^S}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^S}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{i\leq n}\chi(i)\right)\left(\frac{1}{n^S}-\frac{1}{(n+1)^S}\right)-\frac{\sum\limits_{i\leq N}\chi(i)}{(N+1)^S}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^S}+O\left(\frac{|S|q^{1/2}\log q}{N^{\sigma}}\right).$$

故由引理 2 及 $\sigma\geq\frac{1}{2}$，我们有

$$\sum_{q\leq Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}|L(S,\chi_q)|^4\ll\sum_{q\leq Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left(\left|\sum_{n=1}^{[Q|S|]}\frac{\chi_q(n)}{n^S}\right|^4+Q^{-2}|S|^2q^2(\log q)^4\right)$$

$$\ll|S|^2Q^2(\log Q)^4+(Q^2+Q^2|S|^2)\sum_{n=1}^{[Q|S|]^2}\frac{d^2(n)}{n}$$

$$\ll Q^2|S|^2(\log Q)^4.$$

故本引理得证.

引理 4. 当 k 是无平方因子的奇数，而 $m\neq 1$ 时，则我们有

$$\left|\sum_{\chi_k}{}^{*}\chi_k(m)\right|\leq|(m-1,k)|.$$

证. 令 $k=p_1\cdots p_l$，而 $p_1<\cdots<p_l$. 令 g_j 是 $\bmod p_j$ 的原根，则有

$m \equiv g_j^{\xi_j} (\bmod p_j)$, $0 \le \xi_j \le p_j - 2$, $j = 1, \ldots, l$, 则关于模 k 的所有原特征可表示为

$$\chi_k^*(m) = e^{2\pi i(\frac{\nu_1 \xi_1}{p_1 - 1} + \cdots + \frac{\nu_l \xi_l}{p_l - 1})},$$

其中 $1 \le \nu_j \le p_j - 2$, 而 $j = 1, \ldots, l$.

令 $Z(m,k) = \left| \sum_{\chi_k}^{*} \chi_k(m) \right|$, 则有

$$Z(m,k) = \prod_{j=1}^{l} Z(m, p_j) = \prod_{j=1}^{l} \left| \sum_{\nu_j = 1}^{p_j - 2} e^{2\pi i \frac{\nu_j \xi_j}{p_j - 1}} \right| = \prod_{\substack{j=1 \\ \xi_j = 0}}^{l} (p_j - 2)$$

$$< \prod_{p_j | (m-1)} p_j = |(m-1, k)|.$$

故本引理得证.

设 x 是偶数, 令 $\lambda_1 = 1$; 当 $d > x^{1/4 - \varepsilon/2}$ 时, 令 $\lambda_d = 0$; 而当 $1 < d \le x^{1/4 - \varepsilon/2}$ 时, 令

$$\lambda_d = \frac{\mu(d)}{f(d)g(d)} \left\{ \sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/d \\ (k, xd) = 1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \right\} \left\{ \sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \right\}^{-1}.$$

其中 $g(k) = \frac{1}{\varphi(k)}$, $f(k) = \varphi(k) \prod_{p|k} \frac{p-2}{p-1}$. 又当 d 为奇数, $\mu(d) \neq 0$ 时, 有

$$\sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \sum_{t|d} \sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1, (k,d)=t}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)}$$

$$= \sum_{t|d} \left\{ \frac{1}{\prod_{p|t} (p-2)} \right\} \sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/t \\ (k,xd)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)}$$

$$\ge \left\{ \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) \right\} \left\{ \sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/d \\ (k,xd)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \right\}.$$

故对于所有正整数 d, 都有 $|\lambda_d| \le 1$. 设 x 是偶数, $\log x > 10^4$, 又令

$$Q = \prod_{2 \le p \le x^{1/4}} p, \quad \Omega = \sum_{\substack{x^{1/10} < p_1 \le x^{1/3} < p_2 \le (x/p_1)^{1/2} \\ p_3 \le x/(p_1 p_2) \\ (x - p_1 p_2 p_3, Q) = 1}} 1,$$

$$M = \sum_{x^{1/10} < p_1 \le x^{1/3} < p_2 \le (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right) \left(\sum_{\substack{n \le x/(p_1 p_2) \\ (x - p_1 p_2 n, Q) = 1}} \Lambda(n) \right),$$

则有 $\Omega \leq \frac{M}{1-\varepsilon} + N$, 其中

$$N \ll \sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{1-\varepsilon}$$

$$\ll x^{1-\varepsilon}\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S^{1-\varepsilon}}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{(\frac{x}{S})^{\frac{1}{2}}}\frac{dt}{t^{1-\varepsilon}} \ll x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \ll x^{1-\frac{\varepsilon}{3}}.$$

由引理 1, 我们有

$$M \leq \sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right) \sum_{\substack{n\leq x/(p_1p_2)\\ (x-p_1p_2n,Q)=1}} \Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)$$

$$+O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right)$$

$$\leq \sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right) \sum_{n\leq x/(p_1p_2)} \Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{\substack{d|(x-p_1p_2n,Q)\\ (d,x)=1}} \lambda_d\right)^2 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right)$$

$$= \sum_{\substack{(d_1,x)=1\\ d_1|Q}}\sum_{\substack{(d_2,x)=1\\ d_2|Q}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}N_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right). \tag{5}$$

其中

$$N_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}$$

$$= \sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)$$

$$\cdot \sum_{\substack{n\leq x/(p_1p_2)\\ x-p_1p_2n\equiv 0(\bmod \frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)})}} \Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)$$

$$= \left\{\frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right\}\left\{\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}\\ n\leq x/(p_1p_2)\\ (p_1p_2n,d_1d_2)=1}} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\right.$$

$$\cdot\Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right) + \sum_{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\neq\chi_0} \overline{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}}(x)$$

$$\cdot \sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\ n\le x/(p_1p_2)}} \left(\frac{\Lambda(n)}{\log \frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1p_2n)\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right\}\left\{\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\ n\le x/(p_1p_2)\\ (p_1p_2n,d_1d_2)=1}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1p_2}}\right)\Lambda(n)\right.$$

$$\left.\cdot\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)\right\} - \left\{\frac{1}{2\pi i\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right\}\left\{\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\right.$$

$$\cdot\left(\frac{x^\omega}{\omega}\right)\sum_{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\ne\chi_0} \overline{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}}(x)\frac{L'}{L}\left(\omega,\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)$$

$$\left.\cdot\sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}} \chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1p_2)\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\left(\frac{d\omega}{(p_1p_2)^\omega}\right)\right\}. \tag{6}$$

令

$$M_1 = \sum_{(d_1,x)=1}\sum_{(d_2,x)=1}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\ n\le x/(p_1p_2)}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)$$

$$\cdot\Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right),$$

$$M_2 = \sum_{\substack{d\le x^{1/2-\varepsilon}\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\left|\sum_{\chi_d\ne\chi_0}\overline{\chi^*_{d^*}}(x)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^\omega}{\omega}\right)\right.$$

$$\cdot\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\frac{L'}{L}(\omega,\chi^*_{d^*})$$

$$\left.\cdot\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\ (p_1p_2,d)=1}}\chi^*_{d^*}(p_1p_2)\left((p_1p_2)^\omega\log\frac{x}{p_1p_2}\right)^{-1}d\omega\right|.$$

其中 d^* 是 χ_d 的 conductor, 而 $\chi^*_{d^*}$ 是等价于 χ_d 的 $\bmod d^*$ 的原特征. $\nu(d)$ 是 d 的素数因子的个数.

引理 5. 设 x 是偶数, 则有

$$\Omega \le \frac{M_1+M_2}{1-\varepsilon} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right).$$

证. 由 (5) 式和 (6) 式, 我们有

$$M \le M_1 + |M_3| + M_4 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right), \tag{7}$$

其中

$$M_3 = \sum_{(d_1,x)=1}\sum_{(d_2,x)=1}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\ n\le x/p_1p_2\\ (d_1d_2,p_1p_2n)>1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)$$
$$\cdot\Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right).$$

$$M_4 = \sum_{(d_1,x)=1}\sum_{(d_2,x)=1}\left(-\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{2\pi i\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^\omega}{\omega}\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\sum_{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\ne\chi_0}\overline{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}}(x)\frac{L'}{L}\left(\omega,\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)$$
$$\cdot\sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}}\frac{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1p_2)}{(p_1p_2)^\omega\log\frac{x}{p_1p_2}}d\omega.$$

首先估计 M_3,

$$M_3 \ll x^\varepsilon\sum_{d\le x^{1/2-\varepsilon}}\frac{1}{d}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\ n\le x/(p_1p_2)\\ (d,p_1p_2n)>1}}\Lambda(n)$$
$$\ll \sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}}\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{p_1p_2}\right)\left(\sum_{\substack{d\le x^{1/2-\varepsilon}\\ p_1|d}}\frac{1}{d}+\sum_{\substack{d\le x^{1/2-\varepsilon}\\ p_2|d}}\frac{1}{d}\right)$$
$$+\sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}}\sum_{p\le\frac{x}{p_1p_2}}(\log p)\sum_{\substack{d\le x^{1/2-\varepsilon}\\ p|d}}\frac{x^\varepsilon}{d}+x^{1-\varepsilon}$$
$$\ll x^{1-\varepsilon}. \tag{8}$$

再估计 M_4, 设 $\mu(d)\ne 0$, $d=p_1\cdots p_k$, 则正整数 d_1 和 d_2 满足 $\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}=d$ 的充分和必要的条件是 $d_1=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $d_2=p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}$, 其中 $0\le\alpha_i\le 1$, $0\le\beta_i\le 1$, $\alpha_i+\beta_i\ge 1(1\le i\le k)$. 故当 $d>0$, $\mu(d)\ne 0$ 时, 则满足 $\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}=d$ 的正整数 d_1, d_2 的组数为 $3^{\nu(d)}$. 由于 $|\lambda_d|\le 1$, 故有

$$M_4 \le \sum_{\substack{d\le x^{1/2-\varepsilon}\\ (d,x)=1}}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{\varphi(d)}\left|\sum_{\chi_d\ne\chi_0}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\right.$$

$$\cdot\overline{\chi}_d(x)\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}}\left(\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}}\right)\left(\frac{d\omega}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Bigg|.$$

由于 $\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)=\frac{L'}{L}(\omega,\chi^*_{d^*})+\sum_{p|\frac{d}{d^*}}\frac{\chi^*_{d^*}(p)\log p}{p^{\omega}-\chi^*_{d^*}(p)}$, 故有

$$M_4\le M_2+M_5, \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}M_5=&\sum_{\substack{d\le x^{1/2-\epsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\Bigg|\sum_{\chi_d\ne\chi_0}\overline{\chi}^*_{d^*}(x)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^{\omega}}{\omega}\right)\\&\cdot\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\left(\sum_{p|\frac{d}{d^*}}\frac{\chi^*_{d^*}(p)\log p}{p^{\omega}-\chi^*_{d^*}(p)}\right)\\&\cdot\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}}\frac{\chi^*_{d^*}(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}d\omega\Bigg|.\end{aligned}$$

又当 $\mathrm{Re}\,\omega=2$ 时, 有 $\frac{\chi^*_{d^*}(p)}{p^{\omega}-\chi^*_{d^*}(p)}=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{\chi^*_{d^*}(p)}{p^{\omega}}\right)^{\lambda}$. 又当 $\lambda\ge1$, $\mu(d^*)\ne0$, $(d^*,xp_1\,p_2p^{\lambda})=1$ 时, 则使用引理 4, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\chi_{d^*}}{}^{*}\overline{\chi_{d^*}}(x)\chi_{d^*}(p_1p_2p^{\lambda})\right|&=\left|\sum_{\chi_{d^*}}{}^{*}\chi_{d^*}(p_1p_2p^{\lambda}y)\right|\\&\le|(p_1p_2p^{\lambda}y-1,d^*)|\\&=|(x-p_1p_2p^{\lambda},d^*)|,\end{aligned}\tag{10}$$

其中 y 是满足 $xy\equiv1\,(\mathrm{mod}\,d^*)$ 的解. 又由 (10) 式及引理 1 得到

$$\begin{aligned}M_5\ll&\sum_{\substack{d\le x^{1/2-\epsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\Bigg|\sum_{\substack{d^*|d\\d^*>1}}\sum_{p|\frac{d}{d^*}}(\log p)\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}}\\&\cdot\sum_{\chi_{d^*}}{}^{*}\overline{\chi_{d^*}}(x)\chi_{d^*}(p_1p_2p^{\lambda})\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2p^{\lambda}}\right)\Bigg|\\\ll&\sum_{\substack{d\le x^{1/2-\epsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\sum_{\substack{d^*|d\\d^*>1}}\sum_{p|\frac{d}{d^*}}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}}\end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{1\le\lambda\le(\log\frac{x}{p_1p_2})(\log p)^{-1}} \left(\frac{\log p}{\log\dfrac{x}{p_1p_2}}\right)(x-p_1p_2p^\lambda, d^*)$$

$$\ll \sum_{\substack{k_1k_2\le x^{1/2-\varepsilon}\\(k_1k_2,x)=1}} \frac{|\mu(k_1)||\mu(k_2)|x^{\frac{\varepsilon}{4}}}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)} \sum_{p|k_2} \sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}}$$

$$\cdot \sum_{1\le\lambda\le(\log\frac{x}{p_1p_2})(\log p)^{-1}} (x-p_1p_2p^\lambda, k_1)$$

$$\ll x^{\varepsilon/3} \sum_{\substack{k_1\le x^{1/2-\varepsilon}\\(k_1,x)=1}} \frac{1}{k_1} \sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\p^\lambda\le x/(p_1p_2)}} (x-p_1p_2p^\lambda, k_1)$$

$$\cdot \sum_{\substack{k_2\le x^{1/2-\varepsilon}\\k_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}} \frac{1}{k_2}$$

$$\ll x^{\varepsilon/2} \sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\p^\lambda\le x/(p_1p_2)}} \frac{1}{p} \sum_{d|(x-p_1p_2p^\lambda)} d \sum_{\substack{k_1\le x^{1/2-\varepsilon}\\d|k_1}} \frac{1}{k_1}$$

$$\ll x^{1-\varepsilon}. \tag{11}$$

由 (7) 式，(8) 式，(9) 式及 (11) 式，本引理得证.

引理 6. 我们有

$$M_2 \ll \frac{x}{(\log x)^{2.01}}.$$

证. 令

$$\Phi(y,\chi) = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1} \frac{L'}{L}(\omega,\chi)d\omega$$

$$= \int_{1+\frac{1}{\log x}-i\infty}^{1+\frac{1}{\log x}+i\infty} \left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1} \frac{L'}{L}(\omega,\chi)d\omega.$$

则有

$$M_2 \le \sum_{\substack{1<l\le x^{1/2-\varepsilon}\\(l,x)=1}} \left\{\sum_{\substack{1<d\le x^{1/2-\varepsilon}\\l|d,(d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\right\}\cdot\left|\sum_{\chi_l}{}^{*}\overline{\chi}_l(x)\right.$$

$$\left.\cdot \sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}} \left(\frac{1}{\log\dfrac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\right|$$

$$\leq \sum_{\substack{1<d\leq x^{1/2-\varepsilon}\\(d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\Bigg\{\sum_{\substack{1<l\leq x^{1/2-\varepsilon}\\(l,xd)=1}} \frac{|\mu(l)|3^{\nu(l)}}{\varphi(l)}\cdot\Bigg|\sum_{\chi_l}{}^{*}\overline{\chi}_l(x)$$

$$\cdot\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq(x/p_1)^{1/2}\\(p_1,p_2,d)=1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\Bigg|\Bigg\}.$$

令 $\tau(l)=\sum_{d|l}1$, 则有

$$\sum_{1<d\leq x^{1/2-\varepsilon}}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{\varphi(d)}\ll(\log x)\sum_{d\leq x^{1/2-\varepsilon}}\frac{(\tau(d))^2}{d}\ll(\log x)^5.$$

故有

$$M_2\ll(\log x)^6\max_{1<m\leq x^{1/2}}N_m. \tag{12}$$

其中

$$N_m=\sum_{\substack{1<l\leq x^{1/2-\varepsilon}\\(l,x)=1}}\frac{|\mu(l)|3^{\nu(l)}}{l}\Bigg|\sum_{\chi_l}{}^{*}\overline{\chi}_l(x)$$

$$\cdot\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq(x/p_1)^{1/2}\\(p_1,p_2,m)=1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\Bigg|.$$

我们用 $\sum_{(k,m)}$ 来表示一个和式，其中的 p_1 和 p_2 经过且只经过 $x^{1/10}<p_2\leq x^{1/3}<p_2\leq\left(\frac{x}{p_1}\right)^{1/2}$, $x^{\frac{13}{30}}2^k<p_1p_2\leq x^{\frac{13}{30}}2^{k+1}$, $(p_1p_2,m)=1$. 令 I_1 是一个正整数，满足 $2^{I_1-1}(\log x)^{100}<x^{1/2-\varepsilon}<2^{I_1}(\log x)^{100}$, $I_2=\left[\frac{7\log x}{30\log 2}\right]$, 则有

$$N_m\leq\sum_{l=0}^{I_1}\sum_{k=0}^{I_2}N_m^{(l,k)}. \tag{13}$$

其中

$$N_m^{(0,k)}=\sum_{\substack{1<d\leq(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$

$$\cdot\Bigg|\sum_{\chi_d}{}^{*}\overline{\chi_d}(x)\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\Bigg|.$$

而当 $l\geq1$ 时,

$$N_m^{(l,k)} = \sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d} \cdot \left| \sum_{\chi_d}{}^{*} \overline{\chi_d}(x) \sum_{(k,m)} \left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|.$$

令 $S(H,\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{H}\frac{\mu(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}$, 其中 $H \ll x$. 我们知道当 $\mathrm{Re}\,\omega \ge 1$ 时，有

$$S(H,\omega,\chi_d) \ll \log x;\quad L(\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{H}\frac{\chi_d(n)}{n^{\omega}}+O\left(\frac{|\omega|d^{\frac12}\log d}{H}\right).$$

故得到当 $\mathrm{Re}\,\omega \ge 1$ 时，有

$$1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}+O\left(\frac{|\omega|d^{\frac12}(\log x)^2}{H}\right),$$

其中 $C_H(1)=0$, 当 $n>H^2$ 时， $C_H(n)=0$; 而当 $n>1$ 时， $C_H(n)=-\sum_{d}\mu(d)$, 其中 d 经过 n 的因子，它使得 $1\le d\le H$ 及 $\frac{n}{d}\le H$; 当 $1\le n\le H$ 时，有 $C_H(n)=0$; 而当 $n>H$ 时， $C_H(n)\le\tau(n)$. 故 $H\ll x$ 时，由 Schwarz 不等式得到

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2 \ll (\log x)\sum_{l=0}^{3I_1}\left|\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2.$$

令 $\alpha=1+\frac{1}{\log x}$, 由上式、 $\sum_{n\le x}\tau^2(n)\ll x(\log x)^3$ 及 (3) 式我们得到：当 $Q\ll x$ 时，有

$$\sum_{D<d\le Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2 \ll \left(Q+\frac{2^lH}{D}\right)\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{(\tau(n))^2}{n^2}$$
$$\ll\left(\frac{Q}{2^lH}+\frac{1}{D}\right)(\log x)^3,$$

及

$$\sum_{D<d\le Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}|1-L(\alpha+i\nu,\chi_d)S(H,\alpha+i\nu,\chi_d)|^2$$
$$\ll \sum_{D<d\le Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2(\log x)^4}{H^2}$$

$$\ll \left(\frac{Q}{H}+\frac{1}{D}+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2}{H^2}\right)(\log x)^5. \tag{14}$$

令 $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}$, 由于 $\{S(H,\beta+i\nu,\chi_d)\}^2=\sum_{n=1}^{H^2}\frac{j(n)\chi_d(n)}{n^{\beta+i\nu}}$, 其中 $|j(n)|\le\tau(n)$, 故由 (3) 式可知，当 $l\ge 1$, $H\ll x$ 时，有

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^4$$
$$\ll\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{H^2}{2^l(\log x)^{100}}\right)\sum_{n=1}^{H^2}\frac{(\tau(n))^2}{n}$$
$$\ll 2^l(\log x)^{104}+\frac{H^2}{2^l(\log x)^{96}}. \tag{15}$$

由于 $L'(\omega,\chi_d)=\frac{1}{2\pi i}\int_r\frac{L(\xi,\chi_d)}{(\xi-\omega)^2}d\xi$, 其中 r 是以 ω 为中心，$(\log x)^{-1}$ 为半径的圆，故有

$$|L'(\omega,\chi_d)|\ll(\log x)^2\int_r|L(\xi,\chi_d)|d\xi.$$

利用 Hölder 不等式，得到

$$|L'(\omega,\chi_d)|^4\ll(\log x)^5\int_r|L(\xi,\chi_d)|^4|d\xi|.$$

又由引理 3, 我们有

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}}\left(\frac{1}{\varphi(d)}\right)\sum_{\chi_d}{}^{*}|L'(\beta+i\nu,\chi_d)|^4$$
$$\ll 2^l(\log x)^{109}(|\beta+i\nu|)^2.$$

当 $\mathrm{Re}\,\omega\ge\alpha=1+\frac{1}{\log x}$ 时，我们得到

$$\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)=\left\{\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\right\}\{1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)\}$$
$$+L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d). \tag{16}$$

令

$$A(l,k,\omega,m,H)=\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$
$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right||1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|.$$

$$B(l,k,\omega,m,H)=\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}$$
$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right||L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|.$$

若 $l\ge 1$ 时，由 (16) 式我们有

$$N_m^{(l,k)}\ll x(\log x)^2\int_0^{\infty}\frac{A(l,k,\alpha+i\nu,m,H)}{|\alpha+i\nu|\left(1+\frac{|\alpha+i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{[\log x]+1}}d\nu$$
$$+x^{\frac12}\int_0^{\infty}\frac{B(l,k,\beta+i\nu,m,H)}{|\beta+i\nu|\left(1+\frac{|\beta+i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{[\log x]+1}}d\nu. \tag{17}$$

显见，当 $|\mu(d)|\ne 0$ 及 d 很大时，有

$$3^{\nu(d)}\le e^{\frac{3\log d}{\log\log d}}. \tag{18}$$

现在我们首先对 $l\ge 1$ 时， $2^kx^{\frac{13}{30}}>x^{\frac12-\varepsilon}$ 及 $x^{\frac12-\varepsilon}\ge 2^kx^{\frac{13}{30}}>2^l(\log x)^{100}$ 这二种情形的 $N_m^{(l,k)}$ 进行估计，此时我们取 $H=2^l(\log x)^{200}I_{l,x}$，其中 $I_{l,x}=\exp\left\{\frac{6\log\{2^l(\log x)^{100}\}}{\log\log\{2^l(\log x)^{100}\}}\right\}$. 则根据 (14) - (18) 式，我们有

$$N_m^{(l,k)}\ll x(\log x)^4\int_0^{\infty}\Bigg[\Bigg\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}$$
$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\alpha+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|^2\Bigg\}\Bigg\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}$$
$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^{*}|1-L(\alpha+i\nu,\chi_d)S(H,\alpha+i\nu,\chi_d)|^2\Bigg\}I_{l,x}\Bigg]^{\frac12}\left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2.1}}\right)$$
$$+x^{\frac12}(\log x)^4\int_0^{\infty}\Bigg\{(I_{l,x})\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}$$
$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\beta+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|^2\Bigg\}^{\frac12}$$
$$\cdot\Bigg\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}{}^{*}|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^4\Bigg\}^{\frac14}$$

$$\cdot\left(\frac{d\nu}{1+\nu^4}\right)\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}{}^*|L'(\beta+i\nu,\chi_d)|^4\right\}^{\frac14}$$

$$\ll x(\log x)^8\int_0^\infty\left\{\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)\left(\sum_{2^k x^{\frac{13}{30}}<n\le 2^{k+1}x^{\frac{13}{30}}}\frac{1}{n^2}\right)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{2^l(\log x)^{100}}{H}+\frac{1}{2^l(\log x)^{100}}+\frac{(1+\nu^2)2^{2l}(\log x)^{200}}{H^2}\right)(I_{l,x})\Big\}^{\frac12}$$

$$\cdot\left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2.1}}\right)+x^{\frac12}(\log x)^8\int_0^\infty\left\{\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)\right.$$

$$\cdot(I_{l,x})\Big\}^{\frac12}\left\{2^{2l}(\log x)^{213}+H^2(\log x)^{13}\right\}^{\frac14}(1+\nu^2)^{\frac14}\left(\frac{d\nu}{1+\nu^4}\right).$$

$$\ll\frac{x}{(\log x)^{20}}. \tag{19}$$

现在我们再对 $2^k x^{\frac{13}{30}}\le 2^l(\log x)^{100}\le 2x^{\frac12-\varepsilon}$ 时的 $N_m^{(l,k)}$ 进行估计，此时我们取

$$H=\max(2^{2l-k}x^{-\frac{13}{30}}(\log x)^{400}I_{l,x},x^{\frac12-\varepsilon}),$$

则有

$$N_m^{(l,k)}\ll x(\log x)^8\int_0^\infty\left\{\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)\left(\sum_{2^k x^{\frac{13}{30}}<n\le 2^{k+1}x^{\frac{13}{30}}}\frac{1}{n^2}\right)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{2^l(\log x)^{100}}{H}+\frac{1}{2^l(\log x)^{100}}+\frac{(1+\nu^2)2^{2l}(\log x)^{200}}{H^2}\right)(I_{l,x})\Big\}^{\frac12}$$

$$\cdot\left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2.1}}\right)+x^{\frac12}(\log x)^4\int_0^\infty\left\{\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|}{d}\right.$$

$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^*|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^2\Big\}^{\frac12}(I_{l,x})^{\frac12}$$

$$\cdot\left\{\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}{}^*|L'(\beta+i\nu,\chi_d)|^4\right\}^{\frac14}$$

$$\cdot\left\{\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\le 2^l(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|}{d}\right.$$

$$\cdot\sum_{\chi_d}{}^*\left|\left(\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\beta+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)^2\right|^2\Bigg\}^{\frac14}\left(\frac{d\nu}{1+\nu^4}\right)$$

$$\ll \frac{x}{(\log x)^{20}} + x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{20}\left\{2^l(\log x)^{100} + \frac{H}{2^l(\log x)^{100}}\right\}^{\frac{1}{2}}(I_{l,x})^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot(2^l(\log x)^{109})^{\frac{1}{4}}\left(2^l(\log x)^{100} + \frac{2^{2k}x^{\frac{13}{15}}}{2^l(\log x)^{100}}\right)^{\frac{1}{4}}\int_0^{\infty}\frac{(1+\nu^2)^{\frac{1}{4}}}{1+\nu^4}d\nu$$

$$\ll \frac{x}{(\log x)^{20}}. \tag{20}$$

现在来估计 $N_m^{(0,k)}$, 其中 $0 \le k \le I_2$. 当 χ_d 是原特征及 $\mathrm{Re}S \ge 1 - \frac{c}{d^{\frac{1}{300}}}$ 时， $L(S,\chi_d) \neq 0$. 其中 c 是一个常数，故有

$$N_m^{(0,k)} \ll \sum_{1<d\le(\log x)^{100}} \frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{d} \sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\int_{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}-i\infty}^{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}+i\infty} \sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\dfrac{x}{p_1p_2}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\chi_d(p_1p_2)\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{\omega}\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\frac{d\omega}{\omega}\right|$$

$$\ll (\log x)^{200}\sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}}\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}}$$

$$\ll \frac{x}{(\log x)^{20}}. \tag{21}$$

由 (12), (13) 式及 (19) - (21) 式，本引理得证.

引理 7. 对于大偶数 x, 我们有

$$M_1 \le \left\{\frac{(8+24\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{1/10}<p_1\le x^{1/3}<p_2\le(x/p_1)^{1/2}}\frac{1}{p_1p_2\log\dfrac{x}{p_1p_2}}\right\},$$

其中 $C_x = \prod_{\substack{p|x\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$.

证. 令 $S = \sum_{\substack{1\le k\le(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\(k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}$, 则有

$$\lambda_d g(d) = \left(\frac{1}{S}\right)\sum_{\substack{1\le k\le(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/d\\(k,xd)-1}}\frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}.$$

当 $(m,x)=1$ 时，我们有

$$\sum_{\substack{d\le(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\(d,x)=1,m|d}}\lambda_d g(d) = \left(\frac{1}{S}\right)\left(\sum_{\substack{d\le(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\(d,x)=1,\,m|d}}\sum_{\substack{1\le k\le(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/d\\(k,xd)=1}}\frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{S}\right) \sum_{\substack{1 \le r \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (r,x)=1}} \frac{\mu(r)}{f(r)} \sum_{m|d|r} \mu\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{\mu(m)}{Sf(m)}.$$

由于 $\dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)} = g(d_1)g(d_2) \sum_{d|(d_1,d_2)} f(d)$. 故有

$$\sum_{\substack{d_1 \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (d_1 d_2,x)=1}} \sum_{d_2 \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\dfrac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)}\right)}$$

$$= \sum_{\substack{d_1 \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (d_1 d_2,x)=1}} \sum_{d_2 \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} g(d_1)g(d_2) \sum_{k|(d_1,d_2)} f(k)$$

$$= \sum_{\substack{k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} f(k) \Bigg(\sum_{\substack{d \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ k|d,(d,x)=1}} \lambda_d g(d) \Bigg)^2 = \frac{1}{S}. \tag{22}$$

令 $V_k(x) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \le n \le x \\ (n,k)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$, 则有

$$\log x \le \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} \le \sum_{1 \le n \le x} \frac{\mu^2(n)}{n} \prod_{p|n} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p^l}\right) = \sum_{1 \le n \le x} \frac{\mu^2(n)}{n} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$= V_1(x) = \sum_{d|k} \sum_{\substack{1 \le n \le x \\ (n,k)=d}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \sum_{d|k} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1 \le m \le x/d \\ (m,k)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)}$$

$$\le \sum_{d|k} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} V_k(x) = \frac{kV_k(x)}{\varphi(k)},$$

故有 $V_k(x) \ge \dfrac{\varphi(k)\log x}{k}$. 令 $\psi(1) = 1$, 而当 $q > 2$ 时, 令 $\psi(q) = \prod_{p|q}(p-2)$,

则有

$$S = \sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right)$$

$$= \sum_{\substack{1 \le k \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \sum_{q|k} \frac{1}{\psi(q)}$$

$$= \sum_{\substack{q \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2} \\ (q,x)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)} \sum_{\substack{r \le (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/q \\ (r,qx)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}$$

$$\geq \sum_{\substack{q\leq (x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\(q,x)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)}\left\{\frac{\varphi(qx)}{qx}\log\frac{x^{1/4-\varepsilon/2}}{q}\right\}$$

$$=\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)(\log x^{1/4-\varepsilon/2})\prod_{p\nmid x}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)+O(1)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{8}-\frac{\varepsilon}{4}\right)(\log x)}{C_x}+O(1).$$

由 (22) 式及上式，当 x 很大时，有

$$M_1\leq (8+24\varepsilon)C_x(\log x)^{-1}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}\\ n\leq x/(p_1p_2)}}\left(\frac{\Lambda(n)}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right).$$

由引理 1, 本引理得证.

引理 8. 设 x 是大偶数，则有

$$\Omega\leq\frac{3.9404xC_x}{(\log x)^2}.$$

证. 当 x 很大时，由引理 5 到引理 7, 我们有

$$\Omega\leq\left\{\frac{8(1+5\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\}, \tag{23}$$

又有

$$\sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}<p_2\leq (x/p_1)^{1/2}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}$$

$$\leq (1+\varepsilon)\sum_{x^{1/10}<p_1\leq x^{1/3}}\int_{x^{\frac13}}^{\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac12}}\frac{dt}{p_1t(\log t)\log\frac{x}{p_1t}}$$

$$\leq (1+2\varepsilon)\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac13}}\frac{dS}{S\log S}\int_{x^{\frac13}}^{\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac12}}\frac{dt}{t(\log t)\left(\log\frac{x}{St}\right)}$$

$$=(1+2\varepsilon)\int_{\frac{1}{10}}^{\frac13}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac13}^{\frac{1-\alpha}{2}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)\log x},$$

及

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{1-\alpha-\beta}\right)d\beta$$

$$=\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\log\frac{1-\alpha}{2}-\log\frac{1}{3}-\log\frac{1-\alpha}{2}+\log\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)}{\alpha(1-\alpha)}d\alpha$$

$$=\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\log(2-3\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}d\alpha$$

$$=\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{\log\left(1.6-\frac{i}{10}\right)}{\alpha(1-\alpha)}d\alpha+\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{\log\frac{2-3\alpha}{1.6-0.1i}}{\alpha(1-\alpha)}d\alpha$$

$$\leq\sum_{i=0}^{6}\left\{\log\left(1.6-\frac{i}{10}\right)\right\}\left\{\log\frac{\frac{9}{10}-\frac{i}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}-\log\frac{\frac{9}{10}-\frac{1}{30}-\frac{i}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\right\}$$

$$+\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{(0.4+0.1i-3\alpha)}{(1.6-0.1i)\alpha(1-\alpha)}d\alpha$$

$$\leq\sum_{i=0}^{6}\left\{\log(1.6-0.1i)+\frac{4+i}{16-i}\right\}\left\{\log\frac{27-i}{3+i}-\log\frac{26-i}{4+i}\right\}$$

$$-3\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{d\alpha}{(1.6-0.1i)(1-\alpha)}$$

$$=\sum_{i=0}^{6}\left\{\log(1.6-0.1i)+\frac{4+i}{16-i}\right\}\left\{\log\frac{108+23i-i^2}{78+23i-i^2}\right\}$$

$$-3\sum_{i=0}^{6}\left(\frac{1}{1.6-0.1i}\right)\left(\log\frac{27-i}{26-i}\right)$$

$$\leq(0.47+0.25)(0.32542)+(0.40547+0.33334)(0.26236)$$

$$+(0.33647+0.42858)(0.22315)+(0.26236+0.53847)(0.19671)$$

$$+(0.18232+0.66667)(0.17799)+(0.09531+0.81819)(0.16431)$$

$$+0.15415-3\Big(\frac{0.03774}{1.6}+\frac{0.03922}{1.5}+\frac{0.04082}{1.4}+\frac{0.04256}{1.3}+\frac{0.04445}{1.2}$$

$$+\frac{0.04652}{1.1}+0.04879\Big)$$

$$\leq 0.234303+0.193837+0.17073+0.15754+0.151115+0.1501$$

$$+0.15415-3(0.023587+0.026146+0.029157+0.032738$$

$$+0.037041+0.04229+0.04879)$$

$$\leq 1.21178 - 0.71924 = 0.49254. \tag{24}$$

由 (23) 和 (24) 式，引理 8 得证.

设 x 是一大偶数，令 $P_x(x, x^{1/10})$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数：$p \leq x$, $p \not\equiv x \pmod{p_i}$ $(1 \leq i \leq j)$, 其中 $3 = p_1 < p_2 < \cdots < p_j \leq x^{1/10}$. 对于一个素数 p', 则令 $P_x(x, p', x^{1/10})$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数：$p \leq x$, $p \equiv x \pmod{p'}$, $p \not\equiv x \pmod{p_i}$ $(1 \leq i \leq j)$. 其中 $3 = p_1 < p_2 < \cdots < p_j \leq x^{1/10}$.

引理 9. 设 x 是大偶数，则有

$$P_x(x, x^{1/10}) - \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{x^{1/10} < p \leq x^{1/3}} P_x(x, p, x^{1/10}) \geq \frac{2.6408 x C_x}{(\log x)^2},$$

其中 $C_x = \prod_{\substack{p|x \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$.

证. 在文献 [11] 中取 $r(p) = \frac{p}{p-1}$, $K = x$, $Z = x^{1/10}$, 则显见文献 [11] 中的条件 (A_1) 和 (A_2) 都满足，由文献 [11] 中的 (2.11) 式，我们有

$$\begin{aligned}
\Gamma_x(x^{1/10}) &= \frac{x}{\varphi(x)} \prod_{p \nmid x} \frac{1 - \frac{1}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} \frac{e^{-\gamma}}{\log x^{1/10}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\} \\
&= \frac{x}{\varphi(x)} \prod_{\substack{p|x \\ p>2}} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{e^{-\gamma}}{\log x^{1/10}} \\
&\quad \cdot \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\} \\
&= \frac{20 e^{-\gamma} C_x}{\log x} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{25}$$

其中 γ 是 Euler 常数. 又当 $0 < u \leq 2$ 时，令 $F(u) = \frac{2e^\gamma}{u}$, $f(u) = 0$. 而当 $u \geq 2$ 时，令 $(uF(u))' = f(u-1)$, $(uf(u))' = F(u-1)$, 当 $2 < u \leq 3$ 时，有 $uF(u) = 2F(2)$, $F(u) = \frac{2e^\gamma}{u}$. 又当 $2 < u \leq 4$ 时，则有

$$uf(u) = \int_2^u F(t-1)dt = 2e^\gamma \log(u-1), \quad f(u) = \frac{2e^\gamma \log(u-1)}{u}.$$

当 $3 \leq u \leq 4$ 时，我们有

$$uF(u) = 2e^\gamma + \int_3^u f(t-1)dt = 2e^\gamma \left(1 + \int_2^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t} dt\right),$$

又有

$$5f(5) = 2e^{\gamma}\log 3 + \int_4^5 F(u-1)du$$
$$= 2e^{\gamma}\left(\log 4 + \int_3^4 \frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right).$$

在文献 [11] 的定理 A 中，取 $\xi^2 = x^{1/2-\varepsilon}$, $q=1$, $z=x^{1/10}$, 则由 (25) 式及文献 [11] 中的 (2.19), (4.18) 及 (3.24) 式，我们知道当 x 很大时，有

$$P_x(x, x^{\frac{1}{10}}) \geq \frac{2(1-\sqrt{\varepsilon})e^{-\gamma}xC_x f(5)}{(\log x)(\log x^{1/10})}$$
$$\geq \left\{\frac{8(1-\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\log 4 + \int_3^4 \frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right\}. \quad (26)$$

又在文献 [11] 的定理 A 中取 $\xi^2 = \frac{x^{1/2-\varepsilon}}{p}$, $q=p$, $z=x^{1/10}$, 则由 (25) 式及文献 [11] 中的 (2.18), (3.24) 及 (4.18), 我们有

$$\sum_{x^{1/10}<p\leq x^{1/3}} P_x(x,p,x^{1/10}) \leq \left\{\frac{20(1+\sqrt{\varepsilon})e^{-\gamma}xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p\leq x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2e^{\gamma}}{p}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(1+\int_2^{4-\frac{10\log p}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right)\left(\frac{\log x^{\frac{1}{10}}}{\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{p}}\right) + \sum_{x^{1/5}<p\leq x^{1/3}}\frac{2e^{\gamma}\log x^{\frac{1}{10}}}{p\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{p}}\right\}$$
$$\leq \left\{\frac{(4+5\sqrt{\varepsilon})xC_x}{\log x}\right\}\left\{\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{5}}}\frac{dS}{S(\log S)\left(\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{S}\right)}\int_2^{4-\frac{10\log S}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right.$$
$$\left.+\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S(\log S)\left(\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{S}\right)}\right\}$$
$$= \left\{\frac{(4+5\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\right\}$$
$$= \left\{\frac{(8+10\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\log 8 + \int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{2\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right\}.$$

令 $4-10\alpha = u-1$, $\alpha = \frac{5-u}{10}$, $\frac{d\alpha}{\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)} = -\frac{10du}{u(5-u)}$, 又当 $\alpha = \frac{1}{10}$ 时，有

$u=4$, 而当 $\alpha=\frac{1}{5}$ 时, $u=3$, 故有

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_{2}^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt=\int_{3}^{4}\frac{10du}{u(5-u)}\int_{2}^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt.$$

显见，当 $1\le x\le 2$ 时，有 $\log x\le\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{1+x}$, 故有

$$\begin{aligned}
&\int_{3}^{4}\frac{du}{u}\int_{2}^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\left(\frac{1}{4}\right)\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_{2}^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt\\
&=\int_{3}^{4}\left(\frac{1}{u}-\frac{2.5}{u(5-u)}\right)du\int_{2}^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\\
&\ge\int_{3}^{4}\left\{\frac{2.5-u}{u(5-u)}\right\}du\int_{2}^{u-1}\left(\frac{t-2}{2}+\frac{t-2}{t}\right)\left(\frac{dt}{t}\right)\\
&=\int_{3}^{4}\left\{\frac{2.5-u}{2u(5-u)}\right\}\left(u-3+\frac{4}{u-1}-2\right)du\\
&=\int_{3}^{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{2.25}{u}-\frac{1}{4(5-u)}+\frac{0.75}{u-1}\right)du\\
&=\frac{1}{2}-2.25\log\frac{4}{3}-\frac{\log 2}{4}+0.75\log\frac{3}{2}\\
&=\frac{1}{2}+0.75\log\frac{9}{8}-1.5\log\frac{4}{3}-\frac{\log 2}{4}\\
&\ge 0.588335-0.6048075=-0.0164725.
\end{aligned}\tag{27}$$

由 (26) 和 (27) 式，我们有

$$\begin{aligned}
&P_x(x,x^{\frac{1}{10}})-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p\le x^{\frac{1}{3}}}P_x(x,p,x^{\frac{1}{10}})\\
&\ge\left(\frac{(8-50\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right)\left(\log 4-\frac{\log 8}{2}-0.0164725\right)\\
&\ge\frac{(8xC_x)(0.3301)}{(\log x)^2}.
\end{aligned}$$

故引理 9 得证.

三. 结 果

显见，我们有

$$P_x(1,2)\ge P_x(x,x^{1/10})-\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{x^{1/10}<p\le x^{1/3}}P_x(x,p,x^{1/10})-\frac{\Omega}{2}-x^{0.91}.\tag{28}$$

由 (28) 式、引理 8 和引理 9, 即得到定理 1

$$(1,2) \quad \text{及} \quad P_x(1,2) \geq \frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$$

的证明.

完全类似的方法可得到定理 2 的证明.

致谢: 作者对闵嗣鹤同志和王元同志给予的帮助, 表示衷心的感谢.

参考文献

[1] Renyi A. *Изв. АН СССР, серия матем.*, 1948, **2**: 57 ~ 78
[2] 潘承洞. 数学学报, 1962, **12**: 95 ~ 106
[3] Барбан М Б. *Доклады Академии Наук Уз СССР*, 1961, **8**: 9 ~ 11
[4] 王元. 中国科学, 1962, **11**: 1033 ~ 1054
[5] 潘承洞. 中国科学, 1963, **12**: 455 ~ 473
[6] Барбан М Б. *Матем. сб.*, 1963, **61**: 418 ~ 425
[7] Бухштаб А А. *Доклады АН СССР*, 1965, **162**: 739 ~ 742
[8] Виноградов А И. *Изв. АН СССР, серия матем.*, 1965, **29**: 903 ~ 934
[9] Bombieri E. *Mathematika*, 1965, **12**: 201 ~ 225
[10] 陈景润. 科学通报, 1966, **17**: 385 ~ 386
[11] Richert H E. *Mathematika*, 1969, **16**: 1 ~ 22

华林问题 $g(4)$ 的估值 *†

华林问题是数论中的一个有名问题，命 k 表示固定的正整数，以 $g(k)$ 表示一个最小的正整数 $S=S(k)$, 使得对于任意一个 $n>0$ 不定方程

$$n = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_S^k$$

常有正整数解答者. Dickson 确定了当 $k \geq 6$ 时的 $g(k)$ 的数值. 在 [1] 中我们确定了 $g(5)$ 的数值，即 $g(5)=37$. 现在华林问题 $g(k)$ 中只有 $g(4)$ 的数值还没有确定. 对于 $g(4)$, 一些数学工作者得到如下结果： $g(4) \leq 53, 48, 47, 45, 41, 39, 38, 37, 35$. 本文又改善了 Dickson 的结果并得到 $19 \leq g(4) \leq 27$[1).

为了证明这个结果，需要下面的这几个引理：

引理 1. 不大于 10^{237} 的正整数都能够表示成为 27 个正整数四次方的和.

证. 在 [3] 中的第 714 页说到所有正整数 $< 10^{26}$ 都能够表示成为 19 个非负整数四次方和. 使用 [3] 中的定理 12, 令 $n=4, t=8, l=1$ 及 $L_0 = 10^{26}$ 容易得到

$$\begin{aligned}\log L_8 &= \left(\frac{4}{3}\right)^8 \left(\log \frac{10^{26}}{256}\right) + \log 256 \\ &\geq (9.98)(\log 10^{26}) - (8.98)\log 256 \\ &\geq \left\{(9.98)(26) - \frac{(8.98)(0.941)}{2.3}\right\} \log 10 - 18 \log 10 \\ &\geq 237 \log 10.\end{aligned}$$

即有 $L_8 \geq 10^{237}$, 故本引理得证.

引理 2. 令 $S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^4}{q}}$, 则有

---

* 1965 年 5 月 8 日收到. 1973 年 10 月 10 日修改.

† 原载数学学报, **17**(1974), no. 2, pp. 131 - 142.

1) 在美国数学评论 1972 年 12 月份第 1207 页上有： Dress, Francois 已得到 $g(4)=30$; 该结果的证明将发表于 Acta Arithmetica, 可是到现在, 在 Acta Arithmetica 中我们都没有看到该结果的证明.

$$|S_{a,5}| \le \begin{cases} \sqrt{19.5}, & \text{当 } a=1 \text{ 或 } a=4 \text{ 时}. \\ \sqrt{10.6}, & \text{当 } a=2 \text{ 或 } a=3 \text{ 时}. \end{cases}$$

$$|S_{a,17}| \le \begin{cases} 9.4, & \text{当 } a=1,4,13,16 \text{ 时}. \\ 8, & \text{当 } a=2,3,5,8,9,12,14,15 \text{ 时}. \\ 11, & \text{当 } a=6,7,10,11 \text{ 时}. \end{cases}$$

$$|S_{a,13}| \le \begin{cases} \sqrt{30}, & \text{当 } a=1,3,4,9,10,12 \text{ 时}. \\ \sqrt{70}, & \text{当 } a=2,5,6,7,8,11 \text{ 时}. \end{cases}$$

证. 我们有

$$\begin{aligned} |S_{a,5}| &= |1+4e^{2\pi i\frac{a}{5}}| = \left\{\left(1+4\cos\frac{2\pi a}{5}\right)^2 + 16\sin^2\frac{2\pi a}{5}\right\}^{1/2} \\ &= \left(17+8\cos\frac{2\pi a}{5}\right)^{1/2} \le \begin{cases} \sqrt{19.5}, & \text{当 } a=1 \text{ 或 } a=4 \text{ 时}. \\ \sqrt{10.6}, & \text{当 } a=2 \text{ 或 } a=3 \text{ 时}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{a,17}| &= |1+4(e^{2\pi ia/17}+e^{-2\pi ia/17}+e^{8\pi ia/17}+e^{-8\pi ia/17})| \\ &= \left|1+8\left(\cos\frac{2\pi a}{17}+\cos\frac{8\pi a}{17}\right)\right| \\ &\le \begin{cases} 9.4, & \text{当 } a=1,4,13,16 \text{ 时}. \\ 8, & \text{当 } a=2,3,5,8,9,12,14,15 \text{ 时}. \\ 11, & \text{当 } a=6,7,10,11 \text{ 时}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{a,13}| &= |1+4(e^{2\pi ia/13}+e^{6\pi ia/13}+e^{18\pi ia/13})| \\ &= \begin{cases} |4(e^{2\pi i/13}+e^{6\pi i/13}+e^{18\pi i/13})+1|, & \text{当 } a=1,3,4,9,10,12 \text{ 时}. \\ |4(e^{4\pi i/13}+e^{12\pi i/13}+e^{10\pi i/13})+1|, & \text{当 } a=2,5,6,7,8,11 \text{ 时}. \end{cases} \\ &\le \begin{cases} \left(49-24\cos\frac{\pi}{13}\right)^{1/2} \le \sqrt{30}, & \text{当 } a=1,3,4,9,10,12 \text{ 时}. \\ \left(49+32\cos\frac{2\pi}{13}-8\cos\frac{\pi}{13}\right)^{1/2} \le \sqrt{70}, & \text{当 } a=2,5,6,7,8,11 \text{ 时}. \end{cases} \end{aligned}$$

故本引理得证.

引理 3. 当 $(a,q)=1, q>0$ 时，我们有

$$|S_{a,q}| \le 12q^{1-1/4}.$$

证. 命 $q=p_1^{a_1}\cdots p_S^{a_S}$, 此处 $p_1,\dots,p_S$ 是 q 的所有不同素因子. 由 [4] 的引理 1.3 我们有 $S_{a,q}=\prod_{i=1}^{S} S_{a_i,p_i^{a_i}}$; 由 [5] 中的第 269 到第 271 页中的引

理 3 到引理 5 我们有

$$|S_{a_i,p_i^{a_i}}| \le \begin{cases} 3p_i^{-\frac{1}{4}}p_i^{a_i(1-\frac{1}{4})}, & \text{当 } (p_i-1,4)=4 \text{ 并且 } p_i \le 81 \text{ 时}. \\ 2p_i^{a_i(1-\frac{1}{4})}, & \text{当 } p_i = 2 \text{ 时}. \\ p_i^{a_i(1-\frac{1}{4})}, & \text{当 } p_i \ne 2, (p_i-1,4) \ne 4 \text{ 或 } p_i \ge 81 \text{ 时}. \end{cases}$$

又满足 $p \le 81$, $(p-1,4)=4$ 的素数 p 只有 $5,13,17,29,37,41,53,61,73$, 故由上式及引理 2 我们有

$$|S_{a,q}| \le \frac{(2)(19.5\times 70)^{1/2}(11)(3^6)q^{1-1/4}}{(5\times 13\times 17)^{3/4}(29\times 37\times 41\times 53\times 61\times 73)^{1/4}} \le 12q^{1-1/4}.$$

故本引理得证.

引理 4. 我们用 $d(q)$ 来代表 q 的因子的个数，则有

$$d(q) \le 150q^{\frac{1}{6}}.$$

证. 令 $q = p_1^{a_1}\cdots p_S^{a_S}$, 则有 $\frac{d(q)}{q^{1/6}} = \prod_{i=1}^{S}\frac{\alpha_i+1}{p_i^{a_i/6}}$; 又有 $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha+1}{p^{a/6}}\right) = \frac{1}{p^{\alpha/6}} - \frac{(\alpha+1)\log p}{6p^{\alpha/6}}$. 故当 $p \ge e^3$, $\alpha \ge 1$ 时，有 $\frac{\alpha+1}{p^{\alpha/6}} \le \frac{2}{p^{1/6}}$. 当 $13 \le p \le e^3$ 时，有 $\frac{2}{p^{1/6}} - \frac{3}{p^{1/3}} = \frac{2}{p^{1/6}}\left(1-\frac{1.5}{p^{1/6}}\right) \ge 0$. 当 $p \ge e^2$, $\alpha \ge 2$ 时，有 $\frac{\alpha+1}{p^{\alpha/6}} \le \frac{3}{p^{1/3}}$. 故当 $13 \le p \le e^3$, $\alpha \ge 1$ 时有 $\frac{\alpha+1}{p^{\alpha/6}} \le \frac{2}{p^{1/6}}$. 使用 $\left(\frac{3}{2}\right)^6 > 11 > 7 > \left(\frac{4}{3}\right)^6 > 5 > \left(\frac{5}{4}\right)^6 > 3 > \left(\frac{6}{5}\right)^6 > \left(\frac{9}{8}\right)^6 > 2 > \left(\frac{10}{9}\right)^6$ 即得 $\max\limits_{\alpha\ge 1}\frac{\alpha+1}{11^{\alpha/6}} \le \frac{3}{11^{1/3}}$, $\max\limits_{\alpha\ge 1}\frac{\alpha+1}{7^{\alpha/6}} \le \frac{3}{7^{1/3}}$, $\max\limits_{\alpha\ge 1}\frac{\alpha+1}{5^{\alpha/6}} \le \frac{4}{5^{1/2}}$, $\max\limits_{\alpha\ge 1}\frac{\alpha+1}{3^{\alpha/6}} \le \frac{5}{3^{2/3}}$, $\max\limits_{\alpha\ge 1}\frac{\alpha+1}{2^{\alpha/6}} \le \frac{9}{2^{4/3}}$. 故得

$$d(q) \le \frac{2^{13}\times 3^2\times 4\times 5\times 9}{N_1N_2}q^{1/6},$$

其中

$$N_1 = (13\times 17\times 19\times 23\times 29\times 31\times 37\times 41\times 43\times 47\times 53\times 59\times 61)^{1/6} \ge 1900,$$

$$N_2 = 11^{1/3}\times 7^{1/3}\times 5^{1/2}\times 3^{2/3}\times 2^{4/3} \ge 48.$$

故有

$$d(q) \le \frac{(16)(1024)(810)q^{1/6}}{(1900)(48)} = \frac{(1024)(27)q^{1/6}}{190} \le 150q^{1/5}.$$

故本引理得证.

引理 5. 假定 $\alpha = \frac{a}{q} + z$, $(a, q) = 1$, p 是一个 $\geq 10^{50}$ 的整数, $p^{2/3} \leq q \leq p^{9/10}$, $|z| \leq \frac{1}{8qp^3}$, 则我们有

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\alpha x^4}\right| \leq p^{1-1/15}.$$

证. 由 [5] 中第 261 页的引理 13 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq x\leq p} e^{2\pi i\alpha x^4} &= \sum_{1\leq S\leq q} e^{2\pi i\frac{aS^4}{q}} \sum_{-Sq^{-1}<t\leq(p-S)q^{-1}} e^{2\pi iz(qt+S)^4} \\ &= \left(\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{1\leq S\leq q} e^{2\pi i\frac{aS^4}{q}}\right)\int_0^p e^{2\pi izx^4}dx + 3.1Q_1q, \quad |Q_1| \leq 1.\end{aligned}$$

故由引理 3 及 $p \geq 10^{50}$ 显见本引理能够成立.

引理 6. 假设 f 和 q' 都是正整数, $f + q' \leq \frac{p^3}{4}$, $u \geq 10^5$, $\phi(y) = \left(\frac{a}{q} + \frac{3Q}{qp^3}\right)y$, $(a, q) = 1$, $1 \leq q' \leq q$, $|Q| \leq 1$, Q 是一个实数, 令

$$\Omega = \sum_{y} \min\left(u^{4/3}, \left(\frac{1}{2(\phi(y))}\right)^{4/3}\right).$$

又 $\sum\limits_{y}$ 系表示一个和式, 其中 y 经过数值 $f, \ldots, f + q' - 1$. 当 x 是实数时, 则令 $[x]$ 表示 x 的整数部分, $\{x\} = x - [x]$ 及 $(x) = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$. 我们有

$$\Omega \leq 4u^{4/3} + 2^{2/3}3^{3/4}qu^{1/3}.$$

证. 设 $y = f + z$, 则有 $(\phi(y)) = \left(\frac{az + B + F(z)}{q}\right)$, 其中 $B = \left[af + \frac{3Qf}{p^3}\right]$, $F(z) = \left\{af + \frac{3Qf}{p^3}\right\} + \frac{3Qz}{p^3}$, 显见 $|F(z)| \leq \frac{7}{4}$. 由于 $(a, q) = 1$, 故当 $0 \leq z < q$ 时, 则 $az + B$ 关于模 q 互不同余, 故有

$$\Omega \leq \sum_{0\leq l<q} \min\left(u^{4/3}, \left[\frac{1}{2\left(\frac{1+\sigma(l)}{q}\right)}\right]^{4/3}\right),$$

其中 $|\sigma(l)| \leq \frac{7}{4}$. 即得

$$\Omega \le 3u^{4/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \sum_{1\le l<q} \min\left(u^{4/3}, \frac{q^{4/3}}{l^{4/3}}\right)$$
$$\le 4u^{4/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \left\{u^{4/3}(3^{3/4}qu^{-1}) + q^{4/3}\int_{3^{3/4}qu^{-1}}^{\infty} \frac{dt}{t^{4/3}}\right\}$$
$$\le 4u^{4/3} + 2^{2/3}3^{3/4}qu^{1/3}.$$

故本引理得证.

引理 7. 假设 $\alpha = \frac{a}{q} + z$, $(a,q)=1$, p 是一个 $\ge 10^{50}$ 的整数, $p^{9/10} \le q \le 8p^3$, $|z| \le \frac{1}{8qp^3}$. 则有

$$\left|\sum_{1\le x\le p} e^{2\pi i\alpha x^4}\right| \le 2p^{29/32}(\log p + 3)^{11/16}.$$

证. 我们有

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\alpha x^4}\right|^2 \le p + 2\left|\sum_{\substack{x=1\\x>y}}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i\alpha(x^4-y^4)}\right|.$$

令

$$l_1 = x-y,\ f(x,y) = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3,\ h(x,y,z) = 12xyz(x+y+z),$$

则有

$$\left(\left|\sum_{\substack{x=1\\x>y}}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i\alpha(x^4-y^4)}\right|\right)^2 = \left(\left|\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{l_1=1}^{p-y} e^{2\pi i\alpha\{(y+l_1)^4-y^4\}}\right|\right)^2$$
$$\le \left(\sum_{l_1=1}^{p}\left|\sum_{y=1}^{p-l_1} e^{2\pi i\alpha f(y,l_1)}\right|\right)^2 \le p\sum_{l_1=1}^{p}\left|\sum_{y=1}^{p-l_1} e^{2\pi i\alpha f(y,l_1)}\right|^2$$
$$\le p^3 + 2p\sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2} e^{2\pi i\alpha\{f(y_1+l_2,l_1)-f(y_1,l_1)\}}\right|$$
$$\le p^3 + 2pS, \tag{1}$$

其中

$$S = \sum_{l_1=1}^{p}\sum_{l_2=1}^{p-l_1}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2} e^{2\pi i\alpha h(y_1,l_1,l_2)}\right|$$
$$\le \sum_{1\le n\le p^2} \tau(n) \max_{l_1l_2=n}\left|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2} e^{2\pi i\alpha h(y_1,l_1,l_2)}\right|;$$

我们定义 $\tau(z)$ 是方程式 $z=l_1l_2$ 的解 (l_1,l_2) 的组数，其中 $1\le l_1\le p, 1\le l_2\le p-l_1$. 我们用 $L(i_1,i_2)$ 来表示 i_1 和 i_2 的最小公倍数， $d(i)$ 表示 i 的因子的个数，则有

$$\begin{aligned}
\sum_{0<z\le p^2}\tau^2(z) &\le \sum_{0<z\le p^2}\Bigg(\sum_{\substack{d|z\\ 1\le d\le p,\ \frac{z}{d}\le p}} 1\Bigg)^2\\
&\le \sum_{1\le d_1\le p}\sum_{1\le d_2\le p}\frac{d_1p}{L(d_1,d_2)}\\
&\le \sum_{1\le d_1\le p}\sum_{m|d_1}\sum_{1\le d_2=md_3\le p}\frac{d_1p}{L(d_1,d_2)}\\
&\le \sum_{1\le m\le p}\sum_{1\le d_1=mn\le p}\sum_{1\le d_2=ml\le p}\frac{mnp}{mnl}\\
&\le \sum_{1\le m\le p}\frac{p^2\left(\log\frac{p}{m}+1\right)}{m}\\
&\le p^2(\log p+1)^2-p^2\sum_{1\le m\le p}\frac{\log m}{m}\\
&\le \frac{p^2(\log p+2)^2}{2}.
\end{aligned}\tag{2}$$

我们使用 [5] 中第 254 页的引理 6 而得到

$$\begin{aligned}
\Bigg|\sum_{\substack{y_1=1\\ l_1l_2=z}}^{p-l_1-l_2} e^{2\pi i\alpha h(y_1,l_1,l_2)}\Bigg|^2 &\le p+2\sum_{l_3=1}^{p-l_1-l_2}\Bigg|\sum_{\substack{y_2=1\\ l_1l_2=z}}^{p-l_1-l_2-l_3} e^{2\pi i\alpha(24l_1l_2l_3y_2)}\Bigg|\\
&\le p+2\sum_{\substack{l_3=1\\ l_1l_2=z}}^{p-l_4-l_2}\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha l_1l_2l_3)}\right)\\
&\le p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha zl)}\right).
\end{aligned}\tag{3}$$

由 (1) 到 (3) 式，我们有

$$\begin{aligned}
|S|^2 &\le \Bigg(\sum_{1\le n\le p^2}\tau^2(n)\Bigg)\Bigg(\sum_{1\le n\le p^2}\max_{l_1l_2=n}\Bigg|\sum_{y_1=1}^{p-l_1-l_2} e^{2\pi i\alpha h(y_1,l_1,l_2)}\Bigg|^2\Bigg)\\
&\le \left(\frac{p^2}{2}\right)(\log p+2)^2\sum_{0<z\le p^2}^{**}\left\{p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha zl)}\right)\right\}.
\end{aligned}\tag{4}$$

其中和式 $\sum\limits_{0<z\le p^2}^{**}$ 乃表示 z 经过所指定的区间 $0<z\le p^2$，并且满足条件

$\tau(z)\ge 1$. 令 $z=l_1l_2$, 其中 $1\le l_1\le p$, $1\le l_2\le p-l_1$ 故有 $z\le l_1(p-l_1)$ 对于一个给定的 p 而使 $l_1(p-l_1)$ 取最大值的 l_1 必须满足 $p-2l_1=0$, 故有 $l_1=p/2$, $z\le p^2/4$ 及

$$|S|^2\le\left(\frac{p^2}{2}\right)(\log p+2)^2\sum_{0<z\le p^2/4}\left\{p+2\sum_{l=1}^{p}\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha zl)}\right)\right\}.\qquad(5)$$

用记号 $h(i)$ 来代表将一个整数 i 表示成 $i=i_1i_2$ 的表法的个数，其中 $1\le i_1\le p$, $1\le i_2\le p^2/4$. 现在我们要来估计和式 $\sum\limits_{1\le i\le p^3/4}(h(i))^4=\sum\limits_{1\le i\le p^3/4}\Bigg(\sum\limits_{\substack{d|i\\1\le d\le p,\, i/d\le p^2/4}}1\Bigg)^4$. 由 [1] 中的 (12) 到 (14) 式，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le p^3/4}(h(i))^4&\le\sum_{1\le i_1\le p}\ \sum_{1\le i_2\le p}\ \sum_{1\le i_3\le p}\ \sum_{1\le i_4\le p}\frac{p^2 i_1}{4L(i_1,i_2,i_3,i_4)}\\
&\le\sum_{1\le i_1\le p}\ \sum_{d|i_1}\ \sum_{1\le i_2\le p/d}\ \sum_{d_1|i_1i_2}\ \sum_{1\le i_3\le p/d_1}\ \sum_{d_2|i_1i_2i_3}\ \sum_{1\le i_4\le p/d_2}\frac{p^2}{4i_2i_3i_4}\\
&\le\left(\frac{p^2}{4}\right)(\log p+1)\sum_{1\le i_1\le p}\ \sum_{d|i_1}\ \sum_{1\le i_2\le p/d}\ \sum_{d_1|i_1i_2}\ \sum_{1\le i_3\le p/d_1}\frac{(d(i_1))(d(i_2))(d(i_3))}{i_2i_3}\\
&\le\left(\frac{p^2}{8}\right)(\log p+2)^3\sum_{1\le i_1\le p}\ \sum_{d|i_1}\ \sum_{1\le i_2\le p/d}\frac{(d(i_1))^2(d(i_2))^2}{i_2}\\
&\le\left(\frac{p^2}{96}\right)(\log p+3)^7\sum_{1\le i_1\le p}(d(i_1))^3\le\frac{p^3(\log p+3)^{14}}{(96)(24)}.\end{aligned}$$

由 $h(i)$ 的定义及 (5) 式，我们有

$$|S|^2\le p^2(\log p+2)^2\left\{\frac{p^3}{4}+\sum_{1\le i\le p^3/4}h(i)\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\right\}.\qquad(6)$$

现在先考虑 $p\le q\le 8p^3$ 时的情况，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i\le p^{3/4}}h(i)\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\\
&\le\Bigg(\sum_{1\le i\le p^3/4}(h(i))^4\Bigg)^{1/4}\Bigg\{\sum_{1\le i\le p^3/4}\left(\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\right)^{4/3}\Bigg\}^{3/4}.\qquad(7)\end{aligned}$$

又有

$$\left(\sum_{1\le i\le p^3/4}(h(i))^4\right)^{1/4}\le\left(\frac{p^3(\log p+3)^{14}}{(96)(24)}\right)^{1/4}\le\frac{p^{3/4}(\log p+3)^{7/2}}{2^2 3^{1/2}}. \quad (8)$$

而当 $p\le q\le 8p^3$ 时，设 $(24,q)=\delta,\frac{q}{\delta}=q'$, 则由引理 6 及 $p\ge 10^{50}$ 我们有

$$\sum_{1\le i\le p^3/4}\left(\min\left(p^{4/3},\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\right)^{4/3}\le\left(\frac{p^3}{4q'}+1\right)(4p^{4/3}+4q'p^{1/3})$$
$$\le 35p^{3\frac{1}{3}}. \quad (9)$$

由于 $p\ge 10^{50}$ 及 (6) 到 (9) 式，我们得到当 $p\le q\le 8p^3$ 时，有

$$|S|^2\le 2.1p^{5\frac{1}{4}}(\log p+3)^{5\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

现在，我们来考虑 $p^{9/10}\le q\le p$ 时的情况．设 $(24,q)=\delta,\frac{q}{\delta}\doteq q'$, 由于 $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{8qp^3},1\le i\le\frac{p^3}{4},(a,q)=1$, 故当 q' 不能整除 i 时有 $\min\left(p,\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\le 2q'$. 由于 $h(i)\le d(i)$ 及 (6) 式而得到

$$\begin{aligned}|S|^2&\le p^2(\log p+2)^2\left\{\frac{p^3}{4}+p\sum_{1\le mq'\le p^3/4}d(mq')\right.\\&\quad\left.+\sum_{1\le i\le p^3/4}h(i)\min\left(2q',\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\right\}\\&\le p^2(\log p+2)^2\left\{\frac{p^3}{4}+pd(q')\sum_{1\le m\le p^3/4q'}d(m)\right.\\&\quad\left.+\sum_{1\le i\le p^3/4}h(i)\min\left(2q',\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\right\}. \quad (11)\end{aligned}$$

又由引理 4 及 [1] 中的 (10) 式． $p\ge q\ge p^{9/10},p\ge 10^{50}$ 而得到

$$pd(q')\sum_{1\le m\le p^3/4q'}d(m)\le 150pq'^{1/6}\left(\frac{p^3}{4q'}\right)\left(\log\frac{p^3}{4q'}+1\right)$$
$$\le p^{5\frac{1}{4}}(\log p)^3. \quad (12)$$

由于 $p\ge 10^{50}$ 及 (8) 式和引理 6, 我们有

$$\sum_{1\le i\le p^3/4}h(i)\min\left(2q',\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)\le\left\{\sum_{1\le i\le p^3/4}(h(i))^4\right\}^{1/4}$$

$$\cdot\left\{\sum_{1\le i\le p^3/4}\min\left((2q')^{4/3},\left(\frac{1}{2(24\alpha i)}\right)^{4/3}\right)\right\}^{3/4}$$
$$\le\left\{\frac{p^{3/4}(\log p+3)^{7/2}}{2^2 3^{1/2}}\right\}\left\{\left(\frac{p^3}{4q'}+1\right)(20q'^{4/3})\right\}^{3/4}$$
$$\le p^{3\frac{1}{4}}(\log p+3)^{3\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

故当 $p^{9/10}\le q\le p$ 时，由 (11) 到 (13) 式而得到

$$|S|^2\le 2p^{5\frac{1}{4}}(\log p+3)^{5\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

由于 $p\ge 10^{50}$, (1), (10) 及 (14) 本引理得证.

下面将采用某些记号： N 是一个 $\ge 10^{230}$ 的整数， $p=[N^{1/4}],\tau=8p^3$; N_0 与 N_1 是整数并且满足条件 $\frac{N}{2}\le N_0\le N, N_0-p^{3\frac{1}{4}}\le N_1\le N_0$, 符号 $W(N_1)$ 是用来记将一个数 N_1 表成为

$$N_1=x_1^4+\cdots+x_{12}^4$$

的表法的种数，式中 $x_1,\ldots,x_{12}$ 是正整数. 我们有

$$W(N_1)=\int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1}p_\alpha^{12}e^{-2\pi iN_1\alpha}d\alpha,\quad p_\alpha=\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i\alpha x^4}.$$

包含所有满足条件

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,(a,q)=1;-\frac{1}{q\tau}\le z\le\frac{1}{q\tau},0<q\le p^{2/3}$$

之 α 的区间称为基本区间，从区间 $-\tau^{-1}\le\alpha\le-\tau^{-1}+1$ 中除去基本区间之后所留下之 α 的区间称做余区间，积分 $W(N_1)$ 中对应于基本区间部分我们用 $W_0(N_1)$ 来表示，积分 $W(N_1)$ 中对应于余区间部分我们用 $W_1(N_1)$ 来表示，于是有

$$W(N_1)=W_0(N_1)+W_1(N_1).$$

又采用记号

$$R(N_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^p e^{2\pi izx^4}dx\right)^{12}e^{-2\pi izN_0}dz,\quad T_{12}=\frac{\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right)^{12}}{\Gamma(4)},$$

$$A(q,N_1)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-\frac{2\pi iaN_1}{q}},\quad \Xi(N_1)=\sum_{q=1}^{\infty}A(q,N_1).$$

当 $N>1$ 时令 $K_{12}(N)$ 表示 $x_1^4+\cdots+x_{12}^4\le N$ 中的正整数 $x_1,\ldots,x_{12}$ 的解答的组数. 又令 $M(q,N)$ 表示 $x_1^4+\cdots+x_{12}^4\equiv N(\operatorname{mod} q)$ 的解的数目, 其中 $x_1,\ldots,x_{12}$ 互相无关地经过模 q 的完全剩余系.

引理 8. 当 $N_0\ge 10^{230}, N_0-p^{3\frac14}\le N_1\le N_0$ 时我们有

$$|W_0(N_1)-R(N_0)\Xi(N_1)|\le 10^{14}p^{-2/3}R(N_0)+10^{17}p^{6\frac23}+4\times 10^{11}p^{7\frac{5}{12}}.$$

其中 $R(N_0)\ge 0.15N_0^2$. 又当 $N_1\not\equiv i(\operatorname{mod}16)$ 而 $i=0,13,14,15$ 时则有 $\Xi(N_1)\ge 2^{-13}$.

证. 假定 α 是属于 $\frac{a}{q}$ 的基本区间, 用变换 $x=qt+S$ 变换和数 p_α. 这里的 α 经过数目 $S=0,1,\ldots,q-1$, 对于给定的 S,t 则跑过区间 $-Sq^{-1}<t\le(p-S)q^{-1}$ 中的整数, 于是以 z 表 α 则得

$$p_\alpha=\sum_{S=0}^{q-1}\sum_{-Sq^{-1}<t\le(p-S)q^{-1}}e^{2\pi i\{\frac{aS^4}{q}+z(qt+S)^4\}}=\sum_{S=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{aS^4}{q}}D_S(z),$$

其中

$$D_S(z)=\sum_{-Sq^{-1}<t\le(p-S)q^{-1}}e^{2\pi iz(qt+S)^4}.$$

但在区间 $-Sq^{-1}<t\le(p-S)q^{-1}$ 中我们有 $\frac{d}{dt}z(qt+S)^4\le\frac{4q(qt+S)^3}{q\tau}\le\frac12$, 故由 [5] 中第 261 页的引理 13 可以得到

$$D_S(z)=\int_{-Sq^{-1}}^{(p-S)q^{-1}}e^{2\pi iz(qt+S)^4}dt+4Q_1=\frac1q\int_0^p e^{2\pi izx^4}dx+4Q_1,\quad |Q_1|\le 1$$

由是

$$p_\alpha=\psi\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)+4Q_2q, |Q_2|\le 1. \tag{15}$$

其中 $\psi=\int_0^p e^{2\pi izx^4}dx$. 但由引理 3 及 [5] 中第 262 页的引理 14, a 我们有

$$\left|\psi\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)\right|\le 12q^{-1/4}Z, \tag{16}$$

$$Z=\begin{cases}p, & 若\ |z|\le p^{-4},\\ \sqrt2|z|^{-1/4}, & 若\ |z|>p^{-4}.\end{cases} \tag{17}$$

又当 $|z|\le \frac{1}{9qp^3}$, $q\le p^{2/3}$ 时有 $Zq^{-1/4}>8q$. 因此由 (15) 到 (17) 式我们有

$$\left|p_\alpha^{12}-\left(\psi\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}\right|\le 48q(12.5q^{-1/4}Z)^{11}\le 10^{14}q^{-7/4}Z^{11}.$$

但当 $\omega>0$ 时我们有 $|e^{2\pi i\omega}-1|=\sqrt{2(1-\cos 2\pi\omega)}=|2\sin\pi\omega|\le 2\pi\omega$ 故得

$$\begin{aligned}
&\left|p_\alpha^{12}e^{-2\pi iN_1\alpha}-\psi^{12}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_0}\right|\\
&\le\left|p_\alpha^{12}e^{-2\pi iN_1\alpha}-\psi^{12}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_1}\right|\\
&\quad+\left|\psi^{12}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_1}-\psi^{12}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_0}\right|\\
&\le 10^{14}q^{-7/4}Z^{11}+\left|\frac{S_{a,q}}{q}\right|^7 Z^{12}(2\pi z)p^{3\frac14}\\
&\le 10^{14}q^{-7/4}Z^{11}+10^8q^{-7/4}(2\pi z)p^{3\frac14}Z^{12}.
\end{aligned}$$

由是，对于积分 $W(N_1)$ 中与包含分数 $\frac{a}{q}$ 的基本区间相应的部分 $H_{a,q}(N_1)$ 我们有

$$H_{a,q}(N_1)=R_q(N_0)\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}+F,\quad R_q(N_0)=\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\psi^{12}e^{-2\pi izN_0}dz.$$

$$\begin{aligned}
|F|&\le 2\int_0^{\frac{1}{q\tau}}(10^{14}q^{-7/4}Z^{11}+10^8q^{-7/4}(2\pi z)p^{3\frac14}Z^{12})dz\\
&\le 2\int_0^{p^{-1}}(10^{14}q^{-7/4}p^{11}+10^8q^{-7/4}(2\pi z)p^{15\frac14})dz\\
&\quad+2\int_{p^{-4}}^{\infty}(2^{5\frac12}\times 10^{14}q^{-7/4}z^{-11/4}+2^6\times 10^8(2\pi)q^{-7/4}z^{-2}p^{3\frac14})dz\\
&\le 2\times 10^{14}q^{-7/4}p^7+10^9q^{-7/4}p^{7\frac14}+10^{16}q^{-7/4}p^7+9\times 10^{10}q^{-7/4}p^{7\frac14}\\
&\le 10^{11}q^{-7/4}p^{7\frac14}.\qquad (\text{这里用到 } p\ge 10^{50})
\end{aligned}$$

我们容易得到

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}\left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{q\tau}}\psi^{12}e^{-2\pi izN_0}dz+\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\infty}\psi^{12}e^{-2\pi izN_0}dz\right)\right|\\
&\quad\le 2(12)^{12}q^{-3}\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\infty}(\sqrt{2})^{12}z^{-3}dz=(12)^{12}(8)^4q^{-1}p^6\le 10^{17}q^{-1}p^6.
\end{aligned}$$

因而

$$\left|H_{a,q}(N_1)-R(N_0)\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}\right|\le 10^{11}q^{-7/4}p^{7\frac{1}{4}}+10^{17}q^{-1}p^{6}.$$

将此不等式就所有与给定之 q 相应之 a, 然后再就所有之 $q=1,2,\ldots,p^{2/3}$ 求和，则得

$$\left|W_0(N_1)-R(N_0)\sum_{q\le p^{2/3}}\sum_{(a,q)=1}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}\right|$$
$$\le 4\times 10^{11}p^{7\frac{5}{12}}+10^{17}p^{6\frac{2}{3}}.$$

又有

$$\left|\sum_{q>p^{2/3}}\sum_{(a,q)=1}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{12}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}\right|\le (12)^{12}\sum_{q\ge p^{2/3}}q^{-2}\le 10^{14}p^{-2/3}.$$

故有

$$|W_0(N_1)-R(N_0)\Xi(N_1)|\le 10^{14}p^{-2/3}R(N_0)+10^{17}p^{6\frac{2}{3}}+4\times 10^{11}p^{7\frac{5}{12}}.$$

现在我们要对 $R(N_0)$ 进行估值，令 $N_0-p^{3\frac{3}{4}}\le N'\le N_0$, 则有

$$W(N')=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}p_\alpha^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha+\int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}p_\alpha^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha.$$

当 $-\tau^{-1}\le\alpha\le\tau^{-1}$ 时，有

$$p_\alpha=\sum_{1\le x\le p}e^{2\pi i\alpha x^4}=\int_0^p e^{2\pi i\alpha x^4}dx+5Q_3,\quad |Q_3|\le 1$$

故有

$$|p_\alpha^{12}-\psi^{12}|\le 60(|Z|+5)^{11}.$$

$$\begin{aligned}|p_\alpha^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}-\psi^{12}e^{-2\pi i\alpha N_0}|&\le|p_\alpha^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}-\psi^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}|\\&\quad+|\psi^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}-\psi^{12}e^{-2\pi i\alpha N_0}|\\&\le 60(|Z|+5)^{11}+|Z|^{12}(2\pi\alpha)p^{3\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

由上式我们有

$$\left|\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}p_\alpha^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha-\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\psi^{12}e^{-2\pi i\alpha N_0}d\alpha\right|$$

$$\leq 2\int_0^{p^{-4}}\{60(P+5)^{11}+2\pi\alpha p^{15\frac{3}{4}}\}d\alpha+2\int_{p^{-4}}^{\infty}\{60(\sqrt{2}\alpha^{-1/4}+5)^{11}$$
$$+2\pi p^{3\frac{3}{4}}(\sqrt{2}\alpha^{-1/4})^{12}\alpha\}d\alpha$$
$$\leq 999p^{7\frac{3}{4}} \qquad (\text{这里用到}\, p\geq 10^{50}).$$

又

$$\left|\int_{-\infty}^{-\tau^{-1}}\psi^{12}e^{-2\pi i\alpha N_0}d\alpha+\int_{\tau^{-1}}^{\infty}\psi^{12}e^{-2\pi i\alpha N_0}d\alpha\right|$$
$$\leq 2\int_{\tau^{-1}}^{\infty}(\sqrt{2})^{12}\alpha^{-3}d\alpha\leq p^{7\frac{3}{4}} \qquad (\text{这里用到}\, p\geq 10^{50}).$$

故有

$$\left|\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}p_\alpha^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha-R(N_0)\right|\leq 10^3p^{7\frac{3}{4}}.$$

$$W(N')=R(N_0)+\int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}p_\alpha^{12}e^{-2\pi i\alpha N'}d\alpha+10^3Q_4p^{7\frac{3}{4}},\quad |Q_4|\leq 1.$$

但若令 $M=\left[\frac{p^{3\frac{3}{4}}}{2}\right]$, 则有

$$\left|\sum_{N''=1}^{M}\sum_{N'''=1}^{M}W(N_0-N''-N''')-R(N_0)M^2\right|$$
$$\leq\int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}|p_\alpha|^{12}\left|\sum_{N''=1}^{M}\sum_{N'''=1}^{M}e^{2\pi i\alpha(N''+N''')}\right|d\alpha+10^3p^{7\frac{3}{4}}M^2. \quad (18)$$

现在我们要对和式

$$\sum_{N''=1}^{M}\sum_{N'''=1}^{M}W(N_0-N''-N''')$$

进行估值. 由 [5] 中第 253 页的引理 3 我们有

$$\sum_{N''=1}^{M}\sum_{N'''=1}^{M}W(N_0-N''-N''')$$
$$=\sum_{N''=1}^{M}\{K_{12}(N_0-N''-1)-K_{12}(N_0-N''-M-1)\}$$
$$=\sum_{N''=1}^{M}\{T_{12}[(N_0-N''-1)^3-(N_0-N''-M-1)^3]+24Q_5N_0^{2\frac{3}{4}}\}$$
$$=3N_0^2M^2T_{12}+10^4Q_6N_0^{1\frac{15}{16}}M^2T_{12},\quad |Q_5|\leq 1,\quad |Q_6|\leq 1. \quad (19)$$

又由 [5] 中第 254 页的引理 6 我们有

$$\int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} |p_\alpha|^{12}\left|\sum_{N''=1}^{M}\sum_{N'''=1}^{M} e^{2\pi i\alpha(N''+N''')}\right|d\alpha \le \left(\frac{p^{12}}{4}\right)\int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}\frac{d\alpha}{(\alpha)^2}$$
$$\le p^{12}\int_{\tau^{-1}}^{\frac{1}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha^2} \le 8p^{15}$$
$$\le p^{7\frac{3}{4}}M^2. \tag{20}$$

又由 $\Gamma(1.25) > 0.9063, 0.052 \ge T_{12} = \dfrac{\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right)^{12}}{\Gamma(4)} \ge 0.051$，由 (18) 到 (20) 式我们有 $0.157N_0^2 \ge R(N_0) \ge 3N_0^2\left(1-\frac{1}{1000}\right)T_{12} \ge 0.15N_0^2$. 令 $\psi(p,N) = \sum_{S=0}^{\infty} A(p^S, N)$ 由引理 2 及 [5] 中第 269 到 270 页的引理 1 到引理 4 我们有

$$\begin{aligned}|\psi(5,N_1)-1| &\le \sum_{S=1}^{\infty}|A(5^S,N_1)|\\ &\le 2\left(\frac{\sqrt{19.5}}{5}\right)^{12} + 2\left(\frac{\sqrt{10.6}}{5}\right)^{12} + \sum_{S=2}^{\infty}|A(5^S,N_1)|\\ &\le 2(0.78)^6 + 2(0.424)^6 + \frac{1}{625}\\ &< 0.5\end{aligned}$$

故有

$$\psi(5,N_1) \ge \frac{1}{2} \tag{21}$$

又

$$|\psi(13,N_1)-1)| \le \sum_{S=1}^{\infty}|A(13^S,N_1)| \le 6\left(\frac{\sqrt{70}}{13}\right)^{12} + 6\left(\frac{\sqrt{30}}{13}\right)^{12} + 0.001$$
$$\le 6(0.42)^6 + 6(0.18)^6 + 0.001 \le 6\{(0.18)^3 + (0.033)^3\} + 0.001 \le 0.04$$

故有

$$\psi(13,N_1) \ge 0.96 \tag{22}$$

又

$$|\psi(17,N_1)-1| \le \sum_{S=1}^{\infty}|A(17^S,N_1)|$$

$$\leq 4\left(\frac{11}{17}\right)^{12} + 4\left(\frac{9.4}{17}\right)^{12} + 8\left(\frac{8}{17}\right)^{12} + 0.001$$
$$\leq 4(0.42)^6 + 4(0.31)^6 + 8(0.23)^6 + 0.001$$
$$\leq 4(0.18)^3 + 0.01$$
$$\leq 0.04$$

故有

$$\psi(17, N_1) \geq 0.96 \tag{23}$$

又当 $p \geq 29$ 时我们有

$$\begin{aligned}|\psi(p, N_1) - 1| &\leq \sum_{S=1}^{\infty} |A(p^S, N_1)| \leq |A(p, N_1)| + \sum_{S=2}^{\infty} |A(p^S, N_1)| \\ &\leq \frac{p(3\sqrt{p})^{12}}{p^{12}} + \frac{1}{p^5} = \frac{3^{12}+1}{p^5}\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}&|\psi(29, N_1)||\psi(37, N_1)||\psi(41, N_1)||\psi(53, N_1)||\psi(61, N_1)||\psi(73, N_1)| \\ &\geq \left(1 - \frac{3^{12}+1}{29^5}\right)\left(1 - \frac{3^{12}+1}{37^5}\right)\left(1 - \frac{3^{12}+1}{41^5}\right)\left(1 - \frac{3^{12}+1}{53^5}\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{3^{12}+1}{61^5}\right)\left(1 - \frac{3^{12}+1}{73^5}\right) \\ &\geq 1 - (3^{12}+1)\left(\frac{1}{29^5} + \frac{1}{37^5} + \frac{1}{41^5} + \frac{1}{53^5} + \frac{1}{61^5} + \frac{1}{73^5}\right) \\ &\geq 1 - 3^{12}\left\{\frac{1}{(27)^4(29)} + \frac{2}{(36)^5} + \frac{3}{(45)^5}\right\} - 0.0001 \\ &= 1 - \frac{1}{29} - \frac{9}{512} - \frac{(27)(2^5)}{10^5} - 0.0001 \\ &\geq 1 - 0.0345 - 0.0176 - 0.01 - 0.0001 \geq 0.93.\end{aligned} \tag{24}$$

又当 $p \geq 31$ 并且 $p \neq 37, 41, 53, 61, 73$ 时我们有

$$\begin{aligned}|\psi(p, N_1) - 1| &\leq \sum_{S=1}^{\infty} |A(p^S, N_1)| \leq \sum_{S=1}^{\infty} \frac{p^{(1-1/4)(12S)}p^S}{p^{12S}} \\ &= \sum_{S=1}^{\infty} p^{-2S} = \frac{p^{-2}}{1-p^{-2}}.\end{aligned}$$

故此时有

$$|\psi(p,N_1)| \geq 1-\left(\frac{100}{99}\right)p^{-2}.$$

$$\prod_{\substack{p>29\\ p\neq 37,41,53,61,73}} |\psi(p,N_1)| \geq \prod_{p>29}\left(1-\frac{100}{99p^2}\right) \geq 1-\sum_{p>29}\frac{100}{99p^2}$$
$$\geq 1-\int_{31}^{\infty}\frac{100dt}{99t^2} \geq \frac{29}{30}.$$

又当 $p=3,7,11,19,23$ 时使用 [5] 中第 269 到 270 页的引理 1 到引理 4 我们有

$$|\psi(p,N_1)-1| \leq \sum_{S=1}^{\infty}|A(p^S,N_1)| \leq \frac{p(\sqrt{p})^{12}}{p^{12}}+4p^4\left(\frac{1}{p}\right)^{12}+\sum_{S=5}^{\infty}p^Sp^{-3S}$$
$$\leq \frac{1}{p^5}+\frac{5}{p^8}.$$

故此时有

$$|\psi(p,N_1)| \geq 1-\frac{1}{p^5}-\frac{5}{p^8}$$

$$|\psi(3,N_1)||\psi(7,N_1)||\psi(11,N_1)||\psi(19,N_1)||\psi(23,N_1)|$$
$$\geq 1-\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{7^4}\right) \geq \frac{79}{80}. \tag{25}$$

又当 N_1 同时满足 $N_1 \not\equiv i \,(\mathrm{mod}\,16)$ 其中 $i=13,14,15,16$ 时则显见同余式关于模 16

$$N_1 \equiv 1+x_2^4+\cdots+x_{12}^4 \,(\mathrm{mod}\,16).$$

不同的 $(x_2,\ldots,x_{12})$ 解答的组数不少于 8^{11}. 故由 [5] 中第 273 页的引理 8 知道，当 $S>4$ 时，则同余式 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{12}^4 \equiv N_1(\mathrm{mod}\,2^S)$ 不同的 $(x_1,\ldots,x_{12})$ 解答的组数不少于 $2^{11(S-1)}$ 个，故由 [5] 中第 273 页的引理 10 知道，当 $S>4$ 时，则有 $\sum_{i=0}^{S}A(2^i,N_1) \geq 2^{-11S}2^{11(S-1)}=2^{-11}$ 故得

$$|\psi(2,N_1)| \geq 2^{-11}. \tag{26}$$

由 (21) 到 (26) 式及 [5] 中的第 273 页到 274 页中的引理 10, 引理 11 我们有

$$\Xi(N_1) \geq 2^{-13}.$$

故本引理得证.

引理 9. 设 $N\geq 10^{230}$, $p=[N^{1/4}]$, $p_1=\left[\frac{p}{2^{1+1/2}}\right]$, $p_2=[p_1^{3/4}],\ldots,p_7=[p_6^{3/4}]$, 而令 U 系由 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_7^4$ 所构成，其中 $x_i(1\leq i\leq 6)$ 跑过值 $[1.5p_i]-1$ 到 $2p_i-1$ 中的整数，而 x_7 经过 0 到 $1.8p_7$ 中的整数，则集合 U 中任一数皆小于 $\frac{N}{4}$ 且都是不同的，设 $\overline{U}$ 表示 U 中的元素的个数，则 $\overline{U}\geq\left(\frac{1.8}{2^{11.5}}\right)p^{4-4(\frac{3}{4})^7}$.

证. 由于 $N\geq 10^{230}$, 就显见 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_7^4\leq\frac{N}{4}$. 又 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_7^4$ 都是不同的，因为如果有 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_7^4={x'_1}^4+{x'_2}^4+\cdots+{x'_7}^4$. 不妨假定 $x_1>x'_1$ 则由于 $N\geq 10^{230}$, 有 $x_1^4-{x'_1}^4\geq x_1^4-(x_1-1)^4\geq([1.5p_1-1])^4-([1.5p_1-2])^4\geq 12p_2^4$. 又有 $|x_2^4+x_3^4+\cdots+x_7^4-{x'_2}^4-{x'_3}^4-\cdots-{x'_7}^4|\leq(2p_2)^4-(1.5p_2-2)^4<12p_2^4$. 故有 $x_1=x'_1$. 同样可证明 $x_i=x'_i(i=2,3,\ldots,7)$. 故 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_7^4$ 的个数大于或等于 $\left(\frac{p_1}{2}\right)\left(\frac{p_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{p_6}{2}\right)(1.8p_7)=\left(\frac{1.8}{2^6}\right)p_1\cdots p_7\geq\left(\frac{1.8}{2^{11.5}}\right)p^{4-4(\frac{3}{4})^7}$.

引理 10. 凡是大于 10^{237} 的整数 N 都能够表示成为 26 个正整数的四次方的和.

证. 设 u 和 u' 分别独立地经过集合 U 中的整数. 考虑积分

$$I(N)=\int_0^1(p_\alpha)^{12}\sum_u\sum_{u'}e^{2\pi i(u+u'-N)\alpha}d\alpha,$$

则有

$$I(N)=\sum_u\sum_{u'}\{W_0(N-u-u')+W_1(N-u-u')\}.$$

由于 $N\geq 10^{237}$ 及引理 8 我们有

$$\begin{aligned}\sum_u\sum_{u'}W_0(N-u-u')&\geq\sum_u\sum_{u'}R(N-u-u')\\&\quad\cdot\left\{\Xi(N-u-u')-10^{14}\left(\frac{N}{2}\right)^{-1/6}\right\}-5\times 10^{11}N^{\frac{89}{48}}\overline{U}^2\\&\geq\left(\frac{3}{2^{23}}\right)\left(\frac{N}{2}\right)^2\overline{U}^2\geq\left(\frac{3}{2^{25}}\right)p^8\overline{U}^2.\end{aligned}\tag{27}$$

又由引理 5, 引理 7, 引理 9, $N\geq 10^{237}$ 及 $4\left(\frac{3}{4}\right)^7\leq 0.534$ 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_u\sum_{u'}W_1(N-u-u')\\&\quad\leq\{p^{12-4/5}+p^{12-36/32}(2^{12})(\log p+3)^{33/4}\}\int_0^1\sum_u\sum_{u'}e^{2\pi i(u-u')\alpha}d\alpha\end{aligned}$$

$$\leq \{p^{12-4/5} + 2^{12}p^{12-36/32}(\log p + 3)^{33/4}\}\overline{U}^2 p^{-4+4(\frac{3}{4})^7}\left(\frac{2^{11.5}}{1.8}\right)$$
$$< \left(\frac{3}{2^{25}}\right)p^8\overline{U}^2. \tag{28}$$

由 (27) 和 (28) 有 $I(N) > 0$. 故本引理得证.

由引理 1 和引理 10 即得 $g(4) \leq 27$.

参考文献

[1] 陈景润. Waring's problem for $g(5) = 37$. 中国科学, 1964, **XIII**: 1547 ~ 1568

[2] Dickson L E. History of the theory of numbers. New York: Chelsea, 1952. 718 ~ 720

[3] Dickson L E. Waring's theorem. *Bull. of Amer. Math. Soc.*, 1933, **39**: 701 ~ 727

[4] 华罗庚. 堆垒素数论. 北京: 科学出版社, 1957

[5] Виноградов И М. *Избранные. труды*. Москва, 1952

关于区间中的殆素数的分布问题 *†

摘　要

本文的目的在于证明对于大正数 x. 则在区间 $x - x^{\frac{1}{2}} < n \le x$ 中至少存在有二个整数，这二个整数的素因子的个数都不超过二个.

一. 引　言

令 x 表示一个大的正数，寻求下界 α 使得在区间 $x - x^{\alpha} < n \le x$ 中至少存在有二个整数，这二个整数的素因子的个数都不超过二个. 曾经从事这方面工作的有王元[1,2]、W.B. Jurkat 和 H.E. Richert[3]、H.E. Richert[4]. 他们所得到的结果是

$$\alpha \le \frac{10}{17}, \frac{14}{25}, \frac{6}{11}.$$

本文的目的在于使用筛法和三角和方法证明了 $\alpha \le \frac{1}{2}$.

完全类似的方法可用于改善 Richert[4] 所得到关于区间中殆素数 P_j 分布问题，其中 $j \ge 3$.

二. 几 个 引 理

设 x 是一个大正数，而 ε 为一个充分小的正数，

$$\frac{1}{10} \le \alpha_1 < \alpha_1 + \varepsilon = \alpha_2 < \frac{1}{2}.$$

当

$$\frac{15}{56} < \alpha_1 \le \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \quad 时,$$

令

$$\beta = \frac{2.5 - 4\alpha_1 - 21\varepsilon}{10};$$

* 1975 年 1 月 8 日收到.

† 原载中国科学， **19**(1976), no. 1, pp. 7 – 20.

而当

$$\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}<\alpha_1<\frac{1}{2}-\sqrt{\varepsilon}\quad 时$$

令

$$\beta=\frac{1}{2}-\alpha_1-\sqrt{\varepsilon}.$$

又令

$$y=x^{\frac{1}{2}},$$

$$Q=\prod_{2\le p\le x^\beta}p,\quad S(x^\beta)=\sum_{1\le k\le x^\beta}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)},\quad \lambda_1=1,$$

当 $1<d\le x^\beta$ 时，令

$$\lambda_d=\frac{\mu(d)d}{\varphi(d)}\Bigg\{\sum_{\substack{1\le k\le x^\beta/d\\(k,d)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}\Bigg\}\{S(x^\beta)\}^{-1}.$$

而当 $d>x^\beta$ 时，令 $\lambda_d=0$. 设 $\mu(d)\ne 0$, 则有

$$\begin{aligned}S(x^\beta)&=\sum_{t|d}\sum_{\substack{1\le k\le x^\beta\\(k,d)=t}}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}=\sum_{t|d}\frac{\mu^2(t)}{\varphi(t)}\sum_{\substack{1\le k\le x^\beta/t\\(k,d)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}\\&\ge\left\{\frac{d}{\varphi(d)}\right\}\Bigg\{\sum_{\substack{1\le k\le x^\beta/d\\(k,d)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}\Bigg\},\end{aligned}$$

故有 $|\lambda_d|\le 1$. 由于当 $\mu(d)\ne 0$ 时，有 $d=\prod_{p|d}(p-1+1)=\sum_{t|d}\varphi(t)$, 而得

$$\begin{aligned}\sum_{1\le d_1\le x^\beta}\sum_{1\le d_2\le x^\beta}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{1}{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}&=\sum_{1\le d_1\le x^\beta}\sum_{1\le d_2\le x^\beta}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{d_1d_2}\sum_{t|(d_1,d_2)}\varphi(t)\\&=\sum_{1\le t\le x^\beta}\varphi(t)\Bigg(\sum_{\substack{1\le d\le x^\beta\\t|d}}\frac{\lambda_d}{d}\Bigg)^2.\end{aligned}$$

由于

$$S(x)=\sum_{1\le k\le x}\frac{\mu^2(k)}{k}\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\ge\sum_{1\le k\le x}\frac{1}{k}\ge\log x,$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le d\le x^\beta\\ t|d}}\frac{\lambda_d}{d}&=\sum_{\substack{1\le m\le x^\beta/t\\(m,t)=1}}\frac{\mu(tm)}{S(x^\beta)\varphi(tm)}\sum_{\substack{1\le k\le x^\beta/tm\\(k,tm)=1}}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}\\&=\left\{\frac{\mu(t)}{S(x^\beta)\varphi(t)}\right\}\sum_{\substack{1\le d\le x^\beta/t\\(d,t)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\sum_{m|d}\mu(m)=\frac{\mu(t)}{\varphi(t)S(x^\beta)}.\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le d_1\le x^\beta}\sum_{1\le d_2\le x^\beta}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{1}{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}&=\left(\frac{1}{S(x^\beta)}\right)^2\sum_{1\le t\le x^\beta}\frac{\mu^2(t)}{\varphi(t)}\\&=\frac{1}{S(x^\beta)}\le\frac{1}{\beta\log x}.\end{aligned}\tag{1}$$

我们用 $[a]$ 来表示 a 的整数部分，而 $\{a\}$ 表示 a 的分数部分. 由 (1) 式我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\sum_{\substack{x-y<a\le x\\ a\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),\,(a,Q)=1}}1\le\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\sum_{\substack{x-y<a\le x\\ a\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)}}\left(\sum_{d|(a,Q)}\lambda_d\right)^2\\&=\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\sum_{\substack{x-y<a\le x\\ a\equiv 0(\mathrm{mod}\,\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)})}}1\\&=\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left(\left[\frac{x}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right]-\left[\frac{x-y}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right]\right)\\&=\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left(\frac{x}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}-\frac{x-y}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)+R\\&=\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{y}{p}\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{1}{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}+R\\&\le\left(\frac{y}{\beta\log x}\right)\left(\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{1}{p}\right)+R.\end{aligned}\tag{2}$$

其中

$$R = -\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left(\left\{\frac{x}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right\}-\left\{\frac{x-y}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right\}\right).$$

令

$$f(d)=\sum_{\substack{d_1|Q\ d_2|Q\\ d=\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2},\quad g(d)=\sum_{\substack{d_1\le x^\beta,d_1|Q\ d_2\le x^\beta,d_2|Q\\ d=\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}}1.$$

如果不存在正整数 d_1 和 d_2，同时满足 $1\le d_1\le x^\beta$、$d_1|Q$，$1\le d_2\le x^\beta$，$d_2|Q$，$d=\dfrac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}$，则定义 $f(d)=g(d)=0$．又有

$$R=-\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}f(d)\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left(\left\{\frac{x}{pd}\right\}-\left\{\frac{x-y}{pd}\right\}\right).$$

引理 1. 令 $\triangle$ 表示满足 $0<\triangle\le 0.1$ 的任一数，设 F 经过 T 个实数值，又对于正整数 m 令

$$W_m=\sum e^{2\pi imF},\quad 和\quad B=\sum_{m=1}^{\infty}C_mW_m,$$

其中 C_m 和 F 所取的数值无关，且有 $C_m\ll Z_m$ 而

$$Z_m=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & 当\ m\le\triangle^{-1}\ 时,\\ \dfrac{1}{\triangle^2m^3}, & 当\ m>\triangle^{-1}\ 时.\end{cases}$$

如果对 B 估计具有 $B\ll R$，则有

$$\sum\{F\}=\frac{T}{2}+O(T\triangle+R).$$

证. 见资料 [5] 中第 377 页的引理 4.

引理 2. 令 $\triangle$ 表示满足 $0<\triangle\le 0.1$ 任一数，则存在二个函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 满足：

$$|x-\varphi(x)|\le 2\triangle,\qquad 当\ 0\le x\le 1-\triangle\ 时,$$

$$|x-\varphi(x)|\le 2,\qquad 当\ 1-\triangle\le x\le 1\ 时,$$

$$\psi(x)=1,\quad 当\,1-\triangle\le x\le 1\,时;\quad \psi(x)=0,\quad 当\,\triangle\le x\le 1-2\triangle\,时;$$

$$0\le\psi(x)\le 1,\quad 当\,0\le x\le\triangle\quad 或\quad 1-2\triangle\le x\le 1-\triangle\,时.$$

又有

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos 2\pi mx+B_m\sin 2\pi mx),$$

$$\psi(x)=2\triangle+\sum_{m=1}^{\infty}(A'_m\cos 2\pi mx+B'_m\sin 2\pi mx),$$

其中 A_m, B_m, A'_m 和 B'_m 只和 m 和 $\triangle$ 有关，而当 $m\le\frac{1}{\triangle}$ 时，有

$$A_m\ll\frac{1}{m},\quad B_m\ll\frac{1}{m},\quad A'_m\ll\frac{1}{m},\quad B'_m\ll\frac{1}{m}.$$

而当 $m>\frac{1}{\triangle}$ 时，有

$$A_m\ll\frac{1}{\triangle^2m^3},\quad B_m\ll\frac{1}{\triangle^2m^3},\quad A'_m\ll\frac{1}{\triangle^2m^3},\quad B'_m\ll\frac{1}{\triangle^2m^3}.$$

证. 将资料 [5] 中第 134 页的 2△ 改为 △, 即得本引理，又资料 [5] 中第 134 页的结果，可由

$$\int_0^1\varphi(x)dx=\frac{1}{2},\ A_m=2\int_0^1\varphi(x)\cos 2\pi mxdx,\ B_m=2\int_0^1\varphi(x)\sin 2\pi mxdx,$$

$$\int_0^1\psi(x)dx=2\triangle,\ A'_m=2\int_0^1\psi(x)\cos 2\pi mxdx,\ B'_m=2\int_0^1\psi(x)\sin 2\pi mxdx,$$

而得到.

引理 3. 我们有

$$|R|\ll x^{\alpha_2+2\beta}\triangle+\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left(\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}f(d)e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|\right.$$
$$+\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}f(d)e^{2\pi i\frac{m(x-y)}{pd}}\right|+\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}g(d)e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|$$
$$\left.+\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}g(d)e^{2\pi i\frac{m(x-y)}{pd}}\right|\right),$$

其中

$$Z_m=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & 当\ m\le\triangle^{-1}\ 时,\\ \dfrac{1}{\triangle^2m^3}, & 当\ m>\triangle^{-1}\ 时.\end{cases}$$

证. 我们使用记号 $\triangle(Z,x,\alpha_1,\alpha_2,Q,\beta)$ 来表示满足 $\left\{\dfrac{Z(d_1d_2)}{pd_1d_2}\right\}\geq 1-\triangle$ 的 (p,d_1,d_2) 的组数，其中 p 是素数满足 $x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}$, 而 d_1 和 d_2 都是正整数，并满足

$$1\leq d_1\leq x^{\beta},\quad d_1|Q,\quad 1\leq d_2\leq x^{\beta},\quad d_2|Q.$$

令

$$R^*=-\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\varphi\left(\frac{x}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)-\varphi\left(\frac{x-y}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)\right),$$

由引理 2, 我们有

$$\begin{aligned}R^*=-\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{&A_m\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\cos\frac{2\pi mx}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}-\cos\frac{2\pi m(x-y)}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)\\&+B_m\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\sin\frac{2\pi mx}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}-\sin\frac{2\pi m(x-y)}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{3}$$

由 $|\lambda_{d_1}|\leq 1$, $|\lambda_{d_2}|\leq 1$ 及引理 2, 我们有

$$\begin{aligned}|R-R^*|\leq&\sum_{d_1|Q}\sum_{d_2|Q}|\lambda_{d_1}||\lambda_{d_2}|\sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\left|\left\{\frac{x}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right\}-\varphi\left(\frac{x}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)\right|\right.\\&\left.+\left|\left\{\frac{x-y}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right\}-\varphi\left(\frac{x-y}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)\right|\right)\\\leq&\ x^{\alpha_2+2\beta}\triangle+2(\triangle(x,x,\alpha_1,\alpha_2,Q,\beta)\\&+\triangle(x-y,x,\alpha_1,\alpha_2,Q,\beta)).\end{aligned}\tag{4}$$

由引理 2, 亦有

$$\triangle(x,x,\alpha_1,\alpha_2,Q,\beta)\leq\sum_{d_1|Q,d_1\leq x^{\beta}}\ \sum_{d_2|Q,d_2\leq x^{\beta}}\ \sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\psi\left(\frac{x}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)$$

$$\leq x^{\alpha_2+2\beta}\triangle + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{A'_m \sum_{\substack{d_1|Q\\ d_1\leq x^\beta}} \sum_{\substack{d_2|Q\\ d_2\leq x^\beta}} \sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}} \cos\frac{2\pi mx}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right.$$

$$\left.+B'_m \sum_{\substack{d_1|Q\\ d_1\leq x^\beta}} \sum_{\substack{d_2|Q\\ d_2\leq x^\beta}} \sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}} \sin\frac{2\pi mx}{\frac{pd_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right\}. \tag{5}$$

由 (3) – (5) 式有

$$|R| \leq 5x^{\alpha_2+2\beta}\triangle + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{|A_m| \sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} f(d)\cos\frac{2\pi mx}{pd}\right|\right.\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} f(d)\cos\frac{2\pi m(x-y)}{pd}\right|\right)$$

$$+|B_m| \sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} f(d)\sin\frac{2\pi mx}{pd}\right|\right.$$

$$\left.\left.+\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} f(d)\sin\frac{2\pi m(x-y)}{pd}\right|\right)\right\}$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\left\{|A'_m| \sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} g(d)\cos\frac{2\pi mx}{pd}\right|\right.\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} g(d)\cos\frac{2\pi m(x-y)}{pd}\right|\right)$$

$$+|B'_m| \sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} g(d)\sin\frac{2\pi mx}{pd}\right|\right.$$

$$\left.\left.+\left|\sum_{1\leq d\leq x^{2\beta}} g(d)\sin\frac{2\pi m(x-y)}{pd}\right|\right)\right\}. \tag{6}$$

故引理 3 得证.

我们使用下面的记号

$$P(z)=\prod_{p<z} p,\quad S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,z)=\sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}} \sum_{\substack{x-y<a\leq x,(a,P(z))=1\\ a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}} 1.$$

引理 4. 当 $\frac{1}{2}-2\sqrt{\varepsilon}>\alpha_1\geq\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ 时，则有

$$S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,x^{\frac{1}{7}}) \leq \frac{y\sum\limits_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\frac{1}{p}}{(0.5-\alpha_1-2\sqrt{\varepsilon})(\log x)}.$$

证. 当 $0 \le l \le \dfrac{\beta \log x}{\log 2}$ 时，我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left| \sum_{2^l x^\beta \le d \le 2^{l+1} x^\beta} f(d) e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right|$$

$$\ll \left\{ x^{\alpha_2} \sum_{x^{\alpha_1} \le n \le x^{\alpha_2}} \left| \sum_{2^l x^\beta \le d \le 2^{l+1} x^\beta} f(d) e^{2\pi i \frac{mx}{nd}} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll x^{\frac{\alpha_2}{2}} \left\{ x^{\alpha_2 + 2\beta + \varepsilon} \right.$$

$$\left. + \sum_{2^l x^\beta \le d_1 < d_2 \le 2^{l+1} x^\beta} f(d_1) f(d_2) \sum_{x^{\alpha_1} \le n \le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i \frac{mx(d_2 - d_1)}{n d_1 d_2}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

令 $h(n) = \dfrac{mx(d_2 - d_1)}{n d_1 d_2}$, 则由资料 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1} \le n \le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i h(n)} \ll x^{\alpha_2} \left(\frac{mx(d_2 - d_1)}{x^{3\alpha_1} d_1 d_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x^{3\alpha_2} d_1 d_2}{mx(d_2 - d_1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\beta}{2} + \varepsilon} 2^{-\frac{l}{2}} + x^{-\frac{1}{2} + \frac{3\alpha_1}{2} + \beta + \frac{3\varepsilon}{2}} 2^l (d_2 - d_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

由于 $2^l \le x^\beta$, 故我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left| \sum_{2^l x^\beta < d \le 2^{l+1} x^\beta} f(d) e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right|$$

$$\ll x^{\alpha_1 + \beta + 2\varepsilon} + x^{\frac{\alpha_2}{2}} \{ m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{3\beta}{2} + 2\varepsilon} 2^{\frac{3l}{2}} + x^{-\frac{1}{2} + \frac{3\alpha_1}{2} + 2.5\beta + 2\varepsilon} 2^{\frac{5l}{2}} \}^{\frac{1}{2}},$$

及

$$\sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left(\sum_{m=1}^{x^\beta} \frac{1}{m} \left| \sum_{2^l x^\beta < d \le 2^{l+1} x^\beta} f(d) e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{m=x^\beta}^{\infty} \frac{x^{2\beta}}{m^3} \left| \sum_{2^l x^\beta < d \le 2^{l+1} x^\beta} f(d) e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right| \right)$$

$$\ll x^{\alpha_1 + \beta + 2.1\varepsilon} + x^{\frac{1}{4} + \frac{\alpha_1}{4} + \frac{7\beta}{4} + 2\varepsilon} + x^{-\frac{1}{4} + \frac{5\alpha_1}{4} + 2.5\beta + 2\varepsilon}.$$

由于

$$\frac{1}{2} - 2\sqrt{\varepsilon} > \alpha_1 \ge \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon},$$

得到

$$\frac{1}{4} + \frac{3\beta}{4} - \frac{3\alpha_1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{3\alpha_1}{2} - \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{4} \le 0,$$

$$\frac{\alpha_1}{4} + \frac{3\beta}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{5\alpha_1}{4} - \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{2} \le 0.$$

取 $\triangle = x^{-\beta}$, 我们有

$$\sum_{m=1}^{\infty} Z_m \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left| \sum_{1 \le d \le x^{2\beta}} f(d) e^{\frac{2\pi i m x}{pd}} \right| \ll x^{\alpha_1 + \beta + 2.5\varepsilon},$$

其中

$$Z_m = \begin{cases} \dfrac{1}{m}, & \text{当 } m \le \dfrac{1}{\triangle} = x^{\beta} \text{ 时}, \\ \dfrac{1}{\triangle^2 m^3}, & \text{当 } m \ge \dfrac{1}{\triangle} \text{ 时}. \end{cases}$$

同样地估计，有

$$\sum_{m=1}^{\infty} Z_m \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left(\left| \sum_{1 \le d \le x^{2\beta}} g(d) e^{\frac{2\pi i m x}{pd}} \right| + \left| \sum_{1 \le d \le x^{2\beta}} f(d) e^{\frac{2\pi i m (x-y)}{pd}} \right| \right.$$
$$\left. + \left| \sum_{1 \le d \le x^{2\beta}} g(d) e^{\frac{2\pi i m (x-y)}{pd}} \right| \right) \ll x^{\alpha_1 + \beta + 2.5\varepsilon}.$$

由于 $\triangle = x^{-\beta}$, $\alpha_1 + \beta = \frac{1}{2} - \sqrt{\varepsilon}$, $\beta \le \frac{1}{7}$, (2) 式及引理 3, 故当 $\frac{1}{2} - 2\sqrt{\varepsilon} > \alpha_1 \ge \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ 时，我们有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\frac{1}{7}}) \le \left(\frac{y}{(1-\varepsilon)\beta \log x} \right) \left(\sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \frac{1}{p} \right).$$

故引理 4 得证.

引理 5. 当 $\frac{15}{56} < \alpha_1 \le \frac{5}{12} - 1.5\varepsilon$ 时，则有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\frac{1}{7}}) \le \left(\frac{10y}{(2.5 - 4\alpha_1 - 40\varepsilon) \log x} \right) \left(\sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \frac{1}{p} \right).$$

证. 令 $\delta = \frac{3\alpha_1 + 4\beta - 1}{7}$, 由 $\alpha_1 \le \frac{5}{12} - 1.5\varepsilon$ 及 $\beta = \frac{2.5 - 4\alpha_1 - 21\varepsilon}{10}$ 得到

$$\delta \le \frac{\frac{3}{4} - 1.2\alpha_1 - 6.3\varepsilon + 4\beta}{7} \le \frac{3\beta + 4\beta}{7} = \beta.$$

当 $1 \le l \le x^{2\beta-2\delta}$ 时，我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{lx^{2\delta}\le d\le(l+1)x^{2\delta}} f(d)e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|$$

$$\ll x^{\frac{\alpha_2}{2}}\left\{\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{lx^{2\delta}\le d\le(l+1)x^{2\delta}} f(d)e^{\frac{2\pi imx}{nd}}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll x^{\alpha_2+\delta+\varepsilon}$$

$$+x^{\frac{\alpha_2}{2}}\left\{\sum_{lx^{2\delta}<d_1<d_2\le(l+1)x^{2\delta}} f(d_1)f(d_2)\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i\frac{mx(d_2-d_1)}{nd_1d_2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

令 $h(n)=\dfrac{mx(d_2-d_1)}{nd_1d_2}$, 则由资料 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}} e^{2\pi ih(n)} \ll x^{\alpha_2}\left(\frac{mx(d_2-d_1)}{d_1d_2x^{3\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{d_1d_2x^{3\alpha_2}}{mx(d_2-d_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}-\delta+\varepsilon}l^{-1}m^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}+\frac{3\alpha_1}{2}+2\delta+\frac{3\varepsilon}{2}}l(d_2-d_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

故有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{lx^{2\delta}\le d\le(l+1)x^{2\delta}} f(d)e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|$$

$$\ll x^{\alpha_2+\delta+\varepsilon}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\delta}{2}+2\varepsilon}m^{\frac{1}{4}}l^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}+\frac{5\alpha_1}{4}+\frac{5\delta}{2}+2\varepsilon}l^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

令

$$\Delta=x^{-\delta},\quad Z_m=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & 当\ m\le\dfrac{1}{\Delta}=x^{\delta}\ 时,\\ \dfrac{x^{2\delta}}{m^3}, & 当\ m>x^{\delta}\ 时.\end{cases}$$

由于 $\delta=\dfrac{3\alpha_1+4\beta-1}{7}$, 故 $\dfrac{3\alpha_1}{4}+\beta-\dfrac{1}{4}-\dfrac{7\delta}{4}=0$, $\alpha_1+2\beta-\delta=\dfrac{1}{4}+\beta+\dfrac{\alpha_1}{4}+\dfrac{3\delta}{4}$. 由于 $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\alpha_1}{4}+\beta+\dfrac{\delta}{2}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\alpha_1}{4}+\beta+\dfrac{3\alpha_1+4\beta-1}{14}=\left(\dfrac{9}{70}\right)(2.5-4\alpha_1-21\varepsilon)+\dfrac{13\alpha_1}{28}-\dfrac{9}{28}<0$, 故得 $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5\alpha_1}{4}+3\beta-\dfrac{\delta}{2}\le\alpha_1+2\beta-\delta$.

由 (7) 式我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\left|\sum_{x^{2\delta}\le d\le x^{2\beta}} f(d)e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|$$

$$\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2.5\varepsilon}+x^{\frac{1}{4}+\beta+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\delta}{4}+2.5\varepsilon}+x^{-\frac{1}{4}+\frac{5\alpha_1}{4}+3\beta-\frac{\delta}{2}+2.5\varepsilon}$$

$$\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2.5\varepsilon}. \tag{8}$$

又有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{1\le d\le x^{2\delta}}f(d)e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|\ll x^{\frac{\alpha_2}{2}}\left\{\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{1\le d\le x^{2\delta}}f(d)e^{\frac{2\pi imx}{nd}}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll x^{\frac{\alpha_2}{2}}\left\{x^{\alpha_2+2\delta+\varepsilon}+\sum_{1\le d_1<d_2\le x^{2\delta}}f(d_1)f(d_2)\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}}e^{2\pi i\frac{mx(d_2-d_1)}{nd_1d_2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

令 $h(n)=\dfrac{mx(d_2-d_1)}{nd_1d_2}$, 则由资料 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}}e^{2\pi ih(n)}\ll x^{\alpha_2}\left\{\frac{mx(d_2-d_1)}{d_1d_2x^{3\alpha_1}}\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\frac{d_1d_2x^{3\alpha_2}}{mx(d_2-d_1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+\delta+\varepsilon}m^{\frac{1}{2}}(d_1d_2)^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{3\alpha_1}{2}-\frac{1}{2}+2\delta+\frac{3\varepsilon}{2}}(d_2-d_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{1\le d\le x^{2\delta}}f(d)e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|$$

$$\ll x^{\alpha_1+\delta+2\varepsilon}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\delta}{2}+2\varepsilon}m^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{5\alpha_1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5\delta}{2}+2\varepsilon}.$$

故我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\left|\sum_{1\le d\le x^{2\delta}}f(d)e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|$$

$$\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+\frac{5\varepsilon}{2}}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\beta+\frac{3\delta}{4}+2.5\varepsilon}+x^{-\frac{1}{4}+\frac{5\alpha_1}{4}+3\beta-\frac{\delta}{2}+2.5\varepsilon}$$

$$\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2.5\varepsilon}. \tag{9}$$

由 (8) 和 (9) 式, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}f(d)e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2.5\varepsilon}.$$

同样地估计, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\left(\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}g(d)e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|+\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}f(d)e^{\frac{2\pi im(x-y)}{pd}}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{1\le d\le x^{2\beta}}g(d)e^{\frac{2\pi im(x-y)}{pd}}\right|\right)\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2.5\varepsilon}.$$

由于 $\alpha_1+2\beta-\delta=\frac{1}{7}+\frac{4\alpha_1}{7}+\frac{10\beta}{7}=\frac{1}{2}-3\varepsilon$. $\Delta=x^{-\delta}$, $\beta\le\frac{1}{7}$, (2) 式及引理 3, 故当 $\frac{15}{56}<\alpha_1\le\frac{5}{12}-\frac{3\varepsilon}{2}$ 时，有

$$S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,x^{\frac{1}{7}})\le\left(\frac{y}{\beta(1-\varepsilon)(\log x)}\right)\left(\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{1}{p}\right).$$

故引理 5 得证.

在资料 [4] 中第 15 页，取 $\mathcal{S}=\{a:$ 当 $x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}$ 时，有 $x-y<a\le x,\ a\equiv 0\,(\bmod p)\}$. 在资料 [4] 中的第 1 页，取 $K=1$, $S_1(\mathcal{S},z)=S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,z)$. 在资料 [4] 中第 4 页，取

$$X=\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{y}{p},\ r(d)=1,\ \eta(X,d)=\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\ \sum_{\substack{x-y<a\le x,a\equiv 0\,(\bmod p)\\ a\equiv 0\,(\bmod d)}}1-\frac{X}{d}\right|.$$

令 $\Delta=x^{-\delta}$, 而

$$\delta=\begin{cases}\frac{\alpha_1}{2}, & \text{当 } \frac{1}{10}\le\alpha_1\le\frac{1}{6}-5\varepsilon \text{ 时},\\ \frac{1}{8}-\frac{\alpha_1}{4}-\frac{13\sqrt{\varepsilon}}{7}, & \text{当 } \frac{1}{6}-5\varepsilon\le\alpha_1\le\frac{5}{18}+10\sqrt{\varepsilon} \text{ 时};\end{cases}$$

$$\beta=\begin{cases}\frac{1}{4}-\frac{\alpha_1}{4}-2\varepsilon, & \text{当 } \frac{1}{10}\le\alpha_1\le\frac{1}{6}-5\varepsilon \text{ 时},\\ \frac{1}{3.2}-\frac{5\alpha_1}{8}-\sqrt{\varepsilon}, & \text{当 } \frac{1}{6}-5\varepsilon<\alpha_1\le\frac{5}{18}+10\sqrt{\varepsilon} \text{ 时};\end{cases}$$

$$Z_m=\begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{当 } m\le\frac{1}{\Delta}=x^{\delta} \text{ 时},\\ \frac{x^{2\delta}}{m^3}, & \text{当 } m>\frac{1}{\Delta} \text{ 时}.\end{cases}$$

由引理 1, 我们有

$$\sum_{d\le x^{2\beta},d|P(x^{\alpha_1})}\eta(X,d)=\sum_{\substack{d\le x^{2\beta}\\ d|P(x^{\alpha_1})}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left(\left[\frac{x}{pd}\right]-\left[\frac{x-y}{pd}\right]-\frac{y}{pd}\right)\right|$$

$$\le\sum_{d\le x^{2\beta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left(\left\{\frac{x-y}{pd}\right\}-\left\{\frac{x}{pd}\right\}\right)\right|$$

$$\ll x^{\alpha_2+2\beta-\delta}+\sum_{m=1}^{\infty}Z_m$$

$$\cdot\sum_{x^{2\beta-\delta}\le d\le x^{2\beta}}\left(\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|+\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}e^{\frac{2\pi im(x-y)}{pd}}\right|\right).\quad(10)$$

当 $1 \leq u \leq 3$ 时，令 $F(u) = \frac{2e^{\nu}}{u}$, 而当 $3 \leq u \leq 5$ 时，则令

$$F(u) = \frac{2e^{\nu}}{u}\left\{1 + \int_{2}^{u-1} \frac{\log(t-1)}{t} dt\right\}.$$

引理 6. 当 $\frac{1}{10} \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{7}$ 时，则

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\alpha_1}) \leq \left(\sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \frac{(1+\varepsilon)y}{p}\right)\left(\frac{e^{-\nu}}{\log x^{\alpha_1}}\right) F\left(\frac{\log x^{2\beta}}{\log x^{\alpha_1}}\right).$$

而当 $\frac{1}{7} \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{6} - 5\varepsilon$ 时，则有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\frac{1}{7}}) \leq \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \frac{(1+\varepsilon)y}{\beta p \log x}.$$

证. 令 D 表示一个满足 $\frac{x^{\alpha_1/2}}{2} \leq 2^D < x^{\alpha_1/2}$ 的正整数则当 $0 \leq n \leq D$ 时，我们有

$$\sum_{x^{2\beta-\alpha_1/2}2^n < d \leq x^{2\beta-\alpha_1/2}2^{n+1}} \left| \sum_{x^{\alpha_1} < p \leq x^{\alpha_2}} e^{\frac{2\pi i m x}{pd}} \right|$$

$$\ll \left\{ x^{2\beta - \frac{\alpha_1}{2}} 2^n \sum_{x^{2\beta-(\alpha_1/2)}2^n < d \leq x^{2\beta-(\alpha_1/2)}2^{n+1}} \left| \sum_{x^{\alpha_1} < p \leq x^{\alpha_2}} e^{\frac{2\pi i m x}{pd}} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll x^{\beta - \frac{\alpha_1}{4}} 2^{\frac{n}{2}} \left\{ x^{2\beta - \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2} 2^n + \sum_{x^{\alpha_1} < p_1 < p_2 \leq x^{\alpha_2}} \sum_{x^{2\beta-\alpha_1/2}2^n < d \leq x^{2\beta-\alpha_1/2}2^{n+1}} e^{\frac{2\pi i m x (p_2 - p_1)}{p_1 p_2 d}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

令 $h(d) = \frac{mx(p_2 - p_1)}{p_1 p_2 d}$, 则由资料 [6] 中的引理 1, 有

$$\sum_{x^{2\beta-(\alpha_1/2)}2^n < d \leq x^{2\beta-(\alpha_1/2)}2^{n+1}} e^{2\pi i h(d)}$$

$$\ll x^{2\beta - \frac{\alpha_1}{2}} 2^n \left\{ \frac{mx(p_2 - p_1)}{p_1 p_2 x^{6\beta - 1.5\alpha_1} 2^{3n}} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{p_1 p_2 x^{6\beta - 1.5\alpha_1} 2^{3n}}{mx(p_2 - p_1)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll (mx)^{\frac{1}{2}} x^{-\beta + \frac{\alpha_1}{4} - \frac{\alpha_1}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} + x^{-\frac{1}{2} + 3\beta + \frac{\alpha_1}{4} + \varepsilon} 2^{\frac{3n}{2}} (p_2 - p_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

故有

$$\sum_{x^{2\beta-0.5\alpha_1}2^n<d\le x^{2\beta-0.5\alpha_1}2^{n+1}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}<p\le x^{\alpha_2}}e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|$$
$$\ll x^{2\beta+\frac{\alpha_1}{2}+\varepsilon}+m^{\frac14}x^{\frac14+\frac{\beta}{2}+\frac{3\alpha_1}{4}+\varepsilon}+x^{-\frac14+2.5\beta+\frac{5\alpha_1}{4}+2\varepsilon}.$$

由于当 $\frac{1}{10}\le\alpha_1\le\frac16-5\varepsilon$ 时有 $\beta=\frac14-\frac{\alpha_1}{4}-2\varepsilon$, 故有

$$\frac14+\frac{3\alpha_1}{8}-\frac{3\beta}{2}=-\frac18+\frac{3\alpha_1}{4}+3\varepsilon<0, \qquad (11)$$

$$-\frac14+\frac{\beta}{2}+\frac{3\alpha_1}{4}=-\frac18+\frac{5\alpha_1}{8}-\varepsilon<0. \qquad (12)$$

由 (11) 和 (12) 式，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{x^{2\beta-0.5\alpha_1}\le d\le x^{2\beta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}<p\le x^{\alpha_2}}e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|$$
$$\ll x^{2\beta+0.5\alpha_1+2.1\varepsilon}+x^{\frac14+\frac{\beta}{2}+\frac{7\alpha_1}{8}+1.1\varepsilon}+x^{-\frac14+2.5\beta+\frac{5\alpha_1}{4}+2.1\varepsilon}$$
$$\ll x^{2\beta+0.5\alpha_1+2.1\varepsilon}.$$

同法，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{x^{2\beta-0.5\alpha_1}\le d\le x^{2\beta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}<p\le x^{\alpha_2}}e^{\frac{2\pi im(x-y)}{pd}}\right|\ll x^{2\beta+0.5\alpha_1+2.1\varepsilon}.$$

由于当 $n\le x^{2\beta}$, $n|P(x^{\alpha_1})$ 时，有 $2^{p(n)}=d(n)\ll x^{0.01\varepsilon}$, 故由 (10) 式，有

$$\sum_{d\le x^{2\beta},d|P(x^{\alpha_1})}3^{\nu(d)}\eta(X,d)\ll x^{2\beta+0.5\alpha_1+2.5\varepsilon}.$$

由资料 [4] 中的定理 A, 即当 $\frac{1}{10}\le\alpha_1\le\frac17$ 时，有

$$S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,x^{\alpha_1})\ll\left(\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{(1+\varepsilon)y}{p}\right)\left(\frac{e^{-\nu}}{\log x^{\alpha_1}}\right)F\left(\frac{\log x^{2\beta}}{\log x^{\alpha_1}}\right);$$

而当 $\frac17\le\alpha_1\le\frac16-5\varepsilon$ 时，有

$$S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,x^{\frac17})\le\left(\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{(1+\varepsilon)y}{p}\right)\left(\frac{e^{-\nu}}{\log x^{1/7}}\right)F\left(\frac{\log x^{2\beta}}{\log x^{1/7}}\right)$$
$$\le\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{(1+\varepsilon)y}{\beta p\log x}.$$

故引理 6 得证.

引理 7. 当 $\frac{1}{6}-5\varepsilon \le \alpha_1 \le \frac{5}{18}+10\sqrt{\varepsilon}$ 时，则有

$$S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,x^{\frac{1}{7}}) \le \left(\frac{1}{\frac{1}{3.2}-\frac{5\alpha_1}{8}-3\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(\frac{y}{\log x}\right)\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{1}{p}.$$

证. 由于 $\alpha_1 \ge \frac{1}{6}-5\varepsilon$, 故有 $2\delta=\alpha_1+\frac{1}{4}-\frac{3\alpha_1}{2}-\frac{26\sqrt{\varepsilon}}{7}\le\alpha_1$. 令 $L=[x^{\alpha_2-2\delta}-x^{\alpha_1-2\delta}]$, 又令 D 表示满足 $\frac{x^\delta}{2}<2^D\le x^\delta$ 的一正整数. 当 $0\le S\le D$, $0\le l\le L$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{2^S x^{2\beta-\delta}\le d\le 2^{S+1}x^{2\beta-\delta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}+lx^{2\delta}<p\le x^{\alpha_1}+(l+1)x^{2\delta}} e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|\\
&\ll\left\{2^S x^{2\beta-\delta}\sum_{2^S x^{2\beta-\delta}<d\le 2^{S+1}x^{2\beta-\delta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}+lx^{2\delta}<p\le x^{\alpha_1}+(l+1)x^{2\delta}} e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\ll x^{\beta-\frac{\delta}{2}}2^{\frac{S}{2}}\left\{2^S x^{2\beta+\delta}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{x^{\alpha_1}+lx^{2\delta}<p_1<p_2\le x^{\alpha_1}+(l+1)x^{2\delta}}\ \sum_{2^S x^{2\beta-\delta}<d\le 2^{S+1}x^{2\beta-\delta}} e^{\frac{2\pi i(p_2-p_1)mx}{p_1p_2d}}\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

令 $h(d)=\frac{mx(p_2-p_1)}{p_1p_2d}$, 则由资料 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{2^S x^{2\beta-\delta}<d\le 2^{S+1}x^{2\beta-\delta}} e^{2\pi ih(d)}\\
&\ll 2^S x^{2\beta-\delta}\left(\frac{mx(p_2-p_1)}{p_1p_2 2^{3S}x^{6\beta-3\delta}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{p_1p_2 2^{3S}x^{6\beta-3\delta}}{mx(p_2-p_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\ll 2^{-\frac{S}{2}}m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}-\beta+\frac{\delta}{2}-\alpha_1}(p_2-p_1)^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3S}{2}}x^{3\beta-1.5\delta+\alpha_1-\frac{1}{2}+\varepsilon}(p_2-p_1)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{2^S x^{2\beta-\delta}<d\le 2^{S+1}x^{2\beta-\delta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}+lx^{2\delta}<p\le x^{\alpha_1}+(l+1)x^{2\delta}} e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|\\
&\ll 2^S x^{2\beta+0.1\varepsilon}+2^{\frac{S}{4}}x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+2.5\delta-\frac{\alpha_1}{2}+\varepsilon}+2^{\frac{5S}{4}}x^{2.5\beta+\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{4}+\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{13}$$

又有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}+1.75\delta-\frac{\alpha_1}{2}-1.5\beta\\&=\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{1}{8}-\frac{\alpha_1}{4}-\frac{13\sqrt{\varepsilon}}{7}\right)-\frac{\alpha_1}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3.2}-\frac{5\alpha_1}{8}-\sqrt{\varepsilon}\right)\\&=-\frac{7\sqrt{\varepsilon}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}+2\varepsilon\\&=\frac{1}{6.4}-\frac{5\alpha_1}{16}-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}+\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+2\varepsilon-\frac{\alpha_1}{8}-\frac{13\sqrt{\varepsilon}}{14}\\&=\frac{10}{64}-\frac{12}{64}+\frac{\alpha_1}{16}-\frac{20\sqrt{\varepsilon}}{14}+2\varepsilon<0.\end{aligned}$$

由 (13) 式，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{x^{2\beta-\delta}<d\le x^{2\beta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}+lx^{2\delta}<p\le x^{\alpha_1}+(l+1)x^{2\delta}}e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|\\&\ll x^{2\beta+\delta+\frac{\varepsilon}{2}}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+2.75\delta-\frac{\alpha_1}{2}+\frac{3\varepsilon}{2}}+x^{2.5\beta+\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3\delta}{2}+2\varepsilon}\\&\ll x^{2\beta+\delta+\frac{\varepsilon}{2}}.\end{aligned}$$

故得

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{x^{2\beta-\delta}<d\le x^{2\beta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2\varepsilon}.$$

同法，可得

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{x^{2\beta-\delta}<d\le x^{2\beta}}\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}e^{\frac{2\pi im(x-y)}{pd}}\right|\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2\varepsilon}.$$

由于当 $n\le x^{2\beta}$, $n|P(x^{1/7})$ 时有 $2^{\nu(n)}\le d(n)\ll x^{0.01\varepsilon}$. 故由 (10) 式，我们有

$$\sum_{d\le x^{2\beta},d|P(x^{1/7})}3^{\nu(d)}\eta(X,d)\ll x^{\alpha_1+2\beta-\delta+2.5\varepsilon},\tag{14}$$

又有

$$\begin{aligned}\alpha_1+2\beta-\delta&=\alpha_1-\frac{5\alpha_1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{1}{1.6}-\frac{1}{8}+\frac{13\sqrt{\varepsilon}}{7}-2\sqrt{\varepsilon}\\&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{7}.\end{aligned}\tag{15}$$

当 $\frac{1}{6}-5\varepsilon<\alpha_1\le\frac{5}{18}+10\sqrt{\varepsilon}$ 时，则用 (14), (15) 式和资料 [4] 中的定理 A，有

$$S(x,y,\alpha_1,\alpha_2,x^{\frac{1}{7}})\le\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{(1+\varepsilon)y}{p}\left(\frac{e^{-\nu}}{\log x^{1/7}}\right)\left(F\left(\frac{\log x^{2\beta}}{\log x^{1/7}}\right)\right)$$
$$\le\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\frac{(1+\varepsilon)y}{\beta p\log x}.$$

故引理 7 得证.

三. 定 理

令 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的整数 n 的个数，

$$x-x^{\frac{1}{2}}\le n\le x,\quad n=p_1\quad 或\quad n=p_2p_3,$$

其中 p_1,p_2 和 p_3 都是素数.

定理. 我们有

$$\frac{18}{7}P_x(1,2)\ge\frac{0.14x^{\frac{1}{2}}}{\log x}.$$

证. 令

$$S(x,y,p,z)=\sum_{\substack{x-y<a\le x,(a,P(z))=1\\ a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}}1,$$

则由资料 [4] 中的定理 B, 我们有

$$S(x,y,1,x^{\frac{1}{10}})\ge\frac{10e^{-\nu}(f(5)-10^{-8})y}{\log x}$$
$$=\left(\frac{4y}{\log x}\right)\left(\log 4+\int_3^4\frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{10^{-7}}{4e^{\nu}}\right).\qquad(16)$$

由引理 6, 有

$$\sum_{x^{1/10}\le p\le x^{1/7}}S(x,y,p,p)\le\sum_{x^{1/10}\le p\le x^{1/7}}\left(\frac{(1+10^{-7})e^{-\nu}y}{p\log p}\right)F\left(\frac{\log(\frac{x}{p})^{\frac{1}{2}}}{\log p}\right)$$

$$\leq \sum_{x^{1/10}\leq p\leq x^{1/7}} \left(\frac{4(1+10^{-7})y}{p\log p}\right)\left(\frac{\log p}{\log\frac{x}{p}}\right)\left(1+\int_2^{\frac{\log x}{2\log p}-\frac{3}{2}}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right)$$

$$\leq 4(1+10^{-7})y\int_{x^{1/10}}^{x^{1/7}}\left(\frac{dt}{t\log t}\right)\left(\frac{1}{\log x-\log t}\right)$$

$$\cdot\left(1+\int_2^{\frac{\log x}{2\log t}-\frac{3}{2}}\frac{\log(S-1)}{S}dS\right)$$

$$=\left(\frac{4(1+10^{-7})y}{\log x}\right)\int_{1/10}^{1/7}\left\{\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}\right\}\left\{1+\int_2^{1/2\alpha-3/2}\frac{\log(S-1)}{S}dS\right\}.$$

令 $\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}=u$, 则有 $-\frac{d\alpha}{2\alpha^2}=du$, $-\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}=\frac{2\alpha du}{1-\alpha}=\frac{du}{u}$. 故得

$$\sum_{x^{1/10}\leq p\leq x^{1/7}} S(x,y,p,p)$$
$$\leq\left(\frac{4(1+10^{-7})y}{\log x}\right)\int_3^{4.5}\frac{du}{u}\left(1+\int_2^{u-1}\frac{\log(S-1)}{S}dS\right). \tag{17}$$

由 (16) 和 (17) 式，我们有

$$S(x,y,1,x^{\frac{1}{7}})\geq\left(\frac{4y}{\log x}\right)\left(\log\frac{4}{1.5}-\int_4^{4.5}\frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(S-1)}{S}dS-10^{-6}\right).$$

由于

$$\int_4^{4.5}\frac{du}{u}\int_2^3\frac{\log(t-1)}{t}dt\leq\left(\log\frac{9}{8}\right)\int_2^3\frac{t-2}{t}dt$$
$$=\left(\log\frac{9}{8}\right)\left(1-2\log\frac{3}{2}\right)\leq 0.0225$$

和

$$\int_4^{4.5}\frac{du}{u}\int_3^{u-1}\frac{\log(S-1)}{S}dS\leq(\log 2.5)\int_4^{4.5}\frac{\log\frac{u-1}{3}}{u}du$$
$$\leq(\log 2.5)\int_4^{4.5}\frac{u-4}{3u}du=(\log 2.5)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-4\log\frac{9}{8}\right)$$
$$<0.01,$$

故有

$$S(x,y,1,x^{\frac{1}{7}})\geq\left(\frac{4y}{\log x}\right)(0.9808-0.03255)\geq\frac{3.792y}{\log x}. \tag{18}$$

由引理 4 - 7, 我们有

$$\sum_{x^{1/7}\le p\le x^{9/20}} S(x,y,p,x^{\frac{1}{7}})\left(1-\frac{20\log p}{9\log x}\right)$$

$$\le (1+10^{-8})y\left\{\sum_{x^{1/7}\le p\le x^{1/6}}\left(1-\frac{20\log p}{9\log x}\right)\left(p\log\frac{x^{1/4}}{p^{1/4}}\right)^{-1}\right.$$

$$+\sum_{x^{1/6}\le p\le x^{5/18}}\left(1-\frac{20\log p}{9\log x}\right)\left(p\log\frac{x^{1/3.2}}{p^{5/8}}\right)^{-1}$$

$$+\sum_{x^{5/18}<p\le x^{5/12}}\left(1-\frac{20\log p}{9\log x}\right)\left(p\log\frac{x^{1/4}}{p^{2/5}}\right)^{-1}$$

$$\left.+\sum_{x^{5/12}\le p\le x^{9/20}}\left(1-\frac{20\log p}{9\log x}\right)\left(p\log\frac{x^{1/2}}{p}\right)^{-1}\right\}$$

$$\le (1+10^{-8})y\left\{\int_{x^{1/7}}^{x^{1/6}}\frac{4dt}{t(\log t)}\left(1-\frac{20\log t}{9\log x}\right)\left(\log\frac{x}{t}\right)^{-1}\right.$$

$$+\int_{x^{1/6}}^{x^{5/18}}\frac{dt}{t(\log t)}\left(1-\frac{20\log t}{9\log x}\right)\left(\log\frac{x^{1/3.2}}{t^{5/8}}\right)^{-1}$$

$$+\int_{x^{5/18}}^{x^{5/12}}\frac{dt}{t(\log t)}\left(1-\frac{20\log t}{9\log x}\right)\left(\log\frac{x^{1/4}}{t^{2/5}}\right)^{-1}$$

$$\left.+\int_{x^{5/12}}^{x^{9/20}}\frac{dt}{t(\log t)}\left(1-\frac{20\log t}{9\log x}\right)\left(\log\frac{x^{1/2}}{t}\right)^{-1}\right\}$$

$$\le (1+10^{-8})\left(\frac{y}{\log x}\right)\left\{\int_{1/7}^{1/6}\frac{4\left(1-\frac{20\alpha}{9}\right)}{\alpha(1-\alpha)}d\alpha+\int_{1/6}^{5/18}\frac{2\left(1-\frac{20\alpha}{9}\right)}{\left(\frac{1}{1.6}-\frac{5\alpha}{4}\right)\alpha}d\alpha\right.$$

$$\left.+\int_{5/18}^{5/12}\frac{1-\frac{20\alpha}{9}}{\alpha\left(\frac{1}{4}-\frac{2\alpha}{5}\right)}d\alpha+\int_{5/12}^{9/20}\frac{1-\frac{20\alpha}{9}}{\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)}d\alpha\right\}$$

$$\le (1+10^{-8})\left(\frac{y}{\log x}\right)\left\{4\int_{1/7}^{1/6}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right)d\alpha\right.$$

$$+2\int_{1/6}^{5/18}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{1.6}-\frac{5\alpha}{4}}\right)(1.6)d\alpha+4\int_{5/18}^{5/12}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}-\frac{2\alpha}{5}}\right)d\alpha$$

$$+2\int_{5/12}^{9/20}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}\right)d\alpha-\frac{80}{9}\int_{1/7}^{1/6}\frac{d\alpha}{1-\alpha}$$

$$-\frac{40}{9}\int_{1/6}^{5/18}\frac{d\alpha}{\frac{1}{1.6}-\frac{5\alpha}{4}}-\frac{20}{9}\int_{5/18}^{5/12}\frac{d\alpha}{\frac{1}{4}-\frac{2\alpha}{5}}-\frac{20}{9}\int_{5/12}^{9/20}\frac{d\alpha}{\frac{1}{2}-\alpha}\Bigg\}$$

$$\le(1+10^{-8})\left(\frac{y}{\log x}\right)\Bigg\{2\log\frac{63}{20}+1.2\log\frac{5}{3}+2\log\frac{7}{4}-\frac{44}{9}\log\frac{36}{35}$$

$$-\frac{16}{45}\log\frac{3}{2}-\frac{2}{9}\log\frac{5}{3}-\frac{14}{9}\log\frac{5}{3}\Bigg\}$$

$$=(1+10^{-8})\left(\frac{y}{\log x}\right)\Bigg\{2\log\frac{49}{16}+2\log\frac{7}{4}$$

$$-\frac{26}{9}\log\frac{36}{35}-\frac{16}{45}\log\frac{3}{2}+\left(0.2-\frac{7}{9}\right)\log\frac{5}{3}\Bigg\}$$

$$\le(1+10^{-8})\left(\frac{y}{\log x}\right)\Bigg\{2.2385+0.5597+\frac{16}{45}\log\frac{7}{6}+\frac{29}{45}\log\frac{21}{20}$$

$$+\left(0.2-\frac{2}{15}\right)\log\frac{5}{3}-\frac{26}{9}\log\frac{36}{35}\Bigg\}$$

$$\le(1+10^{-8})\left(\frac{y}{\log x}\right)\{2.7982+0.0549+0.032+0.0342-0.0812\}$$

$$\le\frac{2.84y}{\log x}. \tag{19}$$

由 (18) 和 (19) 式，有

$$\frac{18}{7}P_x(1,2)\ \ge S(x,x^{\frac{1}{2}},1,x^{\frac{1}{7}})-\sum_{\substack{x-x^{1/2}<a\le x\\ (a,\prod_{p\le x^{1/7}}p)=1}}\ \sum_{\substack{p>x^{1/7}\\ p\mid a}}\left(\frac{9}{7}\right)\left(1-\frac{20\log p}{9\log x}\right)$$

$$\ge\frac{3.792x^{\frac{1}{2}}}{\log x}-\left(\frac{9}{7}\right)\sum_{x^{1/7}\le p\le x^{9/20}}S(x,x^{\frac{1}{2}},p,x^{\frac{1}{7}})\left(1-\frac{20\log p}{9\log x}\right)$$

$$\ge\frac{3.792x^{\frac{1}{2}}}{\log x}-\frac{3.652x^{\frac{1}{2}}}{\log x}=\frac{0.14x^{\frac{1}{2}}}{\log x}.$$

故本定理得证.

参 考 文 献

[1] 王元. 科学记录, 1957, **1**(3): 1

[2] 王元. *Sci. Sin.*, 1962, **11**: 1607

[3] Jurkat W B, Richert H E. *Acta Arithmetica*, 1965, **XI**: 217

[4] Richert H E. *Mathematika*, 1969, **16**(1)

[5] Виноградов И М. *Избранные Труды*. 1952

[6] 陈景润. *Sci. Sin.*, 1963, **12**: 751

关于算术级数中的最小素数和 L 函数零点的二个定理 *†

摘　要

当 $(D, k) = 1$ 时，令 $P(D, k)$ 是在算术级数 $Dn + k$ 中的最小素数，本文证明了

$$P(D, k) \ll D^{168}.$$

关于 L 函数的零点分布问题，在本文中也得到某些结果．这些结果目前来说是最好的．

一．引　言

令 D 是一个大正整数，$(D, k) = 1$，又令 $P(D, k)$ 是在级数 $\{Dn+k\}$ 中的最小素数，Linnik 和资料 [1－4] 曾从事于求上极限 L，使得 $P(D, k) \le D^L$ 成立．他们所得到的结果是：

$$L \le c, \quad c \text{为 } 5448, 777, 630, 550.$$

在本文中我们证明了 $L \le 168$．令 $Q(\lambda)$ 表示所有模 D 的 L 函数在正方形

$$1 - \frac{\lambda}{\log D} \le \sigma \le 1, \quad |t - t_0| \le \frac{\lambda}{2 \log D}$$

内至少有一个零点的 L 函数的数目，其中 $0.05 < \lambda \le \log D$，$|t_0| \le D^\varepsilon$．关于 $Q(\lambda)$ 的估计，最好的结果是 Jutila[5] 所得到的 $Q(\lambda) < e^{224\lambda}$．在资料 [5] 中，他又证明了假定存在有一个模 D 实特征 χ_1，而它的 $L(s, \chi_1)$ 有一个除外零点 $\rho_1 = 1 - \delta_1$，又设在正方形

$$1 - \frac{\lambda}{\log D} \le \sigma \le 1, \quad |t| \le D^\varepsilon$$

内有一个模 D 的 L 函数，它有另外一个零点，则有

$$\delta_1 > (322)^{-1} e^{-215\lambda} (\log D)^{-1}.$$

---

* 1976 年 8 月 9 日收到．

† 原载中国科学，**20**(1977), no. 5, pp. 383－414.

在本文中改善了上述三个结果，得到以下三个定理：

定理 1. 我们有 $P(D,k) \ll D^{168}$

定理 2. 当 $0.05 < \lambda \le \log D$, $|t_0| \le D^{\varepsilon}$ 时，我们有 $Q(\lambda) \le e^{80.7\lambda}$.

定理 3. 设存在一个模 D 的实特征 χ_1, 而它的 $L(s,\chi_1)$ 有一个除外零点 $\rho_1 = 1-\delta_1$. 又设在正方形

$$1-\frac{\lambda}{\log D} \le \sigma \le 1, \quad |t| \le D^{\varepsilon}$$

内有一个模 D 的 L 函数的零点，则当 $0.05 < \lambda \le \log D$ 时，我们有

$$\delta_1 > (200)^{-1} e^{-81\lambda} (\log D)^{-1}.$$

二. 几个引理

设 $|t_0| \le D^{\varepsilon}$ 及 $L(s,\chi)(\chi \ne \chi_0)$ 在正方形

$$1-\frac{\lambda}{\log D} \le \sigma \le 1, \quad |t-t_0| \le \frac{\lambda}{2\log D} \qquad R_\lambda(t_0)$$

内有一个零点 $\rho_\chi = \beta_\chi + i\tau_\chi$. 令 $K_\chi = \beta_\chi + (K\log D)^{-1} + i\tau_\chi$.

引理 1. 当 $\frac{1}{\lambda} \ge K+\varepsilon > \frac{1}{2}$ 时, 则有 $R\frac{L'}{L}(K_\chi,\chi) \ge (K-0.4263)(\log D)$.

证. 由资料 [5] 中的引理 2, 有

$$\left|\frac{L'}{L}(K_\chi,\chi) - \sum_{\rho}\left(\frac{1}{K_\chi-\rho} - 4(\overline{K}_\chi - \overline{\rho})\right)\right| < 0.4263\log D. \tag{1}$$

其中 ρ 经过 $L(s,\chi)$ 在圆 $|s-K_\chi| \le \frac{1}{2}$ 内的零点，设 $Z = K_\chi - \rho$, 则我们有

$$\mathrm{Re}(Z^{-1} - 4\overline{Z}) = \mathrm{Re}\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}(1-4|Z|^2) \ge 0,$$

故由 (1) 式及 $K_\chi - \rho_\chi = (K\log D)^{-1}$, 引理 1 得证.

引理 2. 当 $0 \le a \le 2$ 时, 令 $f_\chi(s,a) = \sum_{p>D^a} \frac{\chi(p)\log p}{p^s}$, 则 $\frac{1}{\lambda} \ge K+\varepsilon > \frac{1}{2}$ 及 $\mathrm{Re}\,K_\chi \ge 1+\frac{\varepsilon}{\log D}$ 时，有

$$|f_\chi(K_\chi,a)| \ge (K-a-0.4264)(\log D).$$

证. 当 $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \dfrac{\varepsilon}{\log D}$ 时，有

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s},$$

$$\left|\sum_{p\leq D^a} \frac{\chi(p)\log p}{p^s}\right| + \left|\sum_{\substack{n=p^a\\ a\geq 2}} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}\right| \leq (a+\varepsilon)\log D,$$

故由引理 1 便可得到引理 2.

引理 3. 设 $0 \leq a \leq 2$, $\varepsilon \leq \delta \leq \dfrac{1}{4}$, 则当 $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \dfrac{\delta}{\log D}$ 时，我们有

$$\left|\frac{d}{ds} f_\chi(s,a)\right| \leq \frac{(1+2\varepsilon)(\log D)^2}{\delta^2}.$$

证. 由于 $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \dfrac{\delta}{\log D}$, 故有

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{ds} f_\chi(s,a)\right| &\leq \sum_{p>D^a} \frac{(\log p)^2}{p^{1+\delta(\log D)^{-t}}} \leq -(1+\varepsilon)\int_1^{\infty} \frac{t}{\log t} d\left(\frac{\log^2 t}{t^{1+\delta(\log D)^{-1}}}\right)\\ &\leq (1+\varepsilon)\left(1+\frac{\delta}{\log D}\right)\int_1^{\infty} \frac{\log t}{t^{1+\delta(\log D)^{-1}}} dt\\ &\leq (1+2\varepsilon)\left(\frac{\log D}{\delta}\right)\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\delta(\log D)^{-1}}} = \frac{(1+2\varepsilon)(\log D)^2}{\delta^2}.\end{aligned}$$

引理 3 得证.

引理 4. 在区域 $\sigma \geq 1 - \dfrac{0.05}{\log D}$, $|t| \leq D^{\varepsilon}$ 中除去可能有一个模 D 的实特征 χ_1 的 $L(s,\chi_1)$ 有一个实零点 ρ_1, 而对于其余任一个模 D 的 L 函数则在该区域内都无零点.

证. 见资料 [5] 中的引理 4.

若 $L(s,\chi_1)$ 有一个实零点 ρ_1 满足 $\rho_1 > 1 - \dfrac{0.05}{\log D}$, 则 χ_1 称作对模 D 的除外特征，而 ρ_1 称作对模 D 的除外零点.

引理 5. 设 $\varepsilon \leq \delta \leq \dfrac{1}{4}$, 则当 $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \dfrac{\delta}{\log D}$ 及 $1 < a \leq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{\chi} |f_\chi(s,a)|^2 \leq (2+10\varepsilon)(e^{-2a\delta}\delta^{-1})\Big\{&\delta^{-1} + e^{(a-2)\delta}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)(1+e^{-1+\delta})\\ &+ \log\frac{1}{a-1}\Big\}(\log D)^2,\end{aligned}$$

其中的 χ 表示模 D 一类的特征.

证. 当 $\varepsilon \le \delta \le \frac{1}{4}$ 时，有

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha e^{\alpha\delta}} + (-1+\delta)e^{-\delta} \le \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{d(\alpha\delta)}{e^{\alpha\delta}} + (-1+\delta)e^{-\delta}$$
$$= e^{-\delta}(-1+\delta+e^{-1+\delta}) \le 0.$$

由上式有

$$\int_{D^a}^{\infty} \frac{ds}{s^{1+\delta(\log D)^{-1}} \log \frac{s}{D}} = \int_a^{\infty} \frac{D^{\alpha}(\log D)d\alpha}{D^{\alpha} e^{\alpha\delta} \log D^{\alpha-1}} = \int_a^{\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha-1)e^{\alpha\delta}}$$
$$= e^{-\delta} \int_{a-1}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha e^{\alpha\delta}} \le e^{-\delta}\left\{ e^{-(a-1)\delta} \int_{a-1}^{1} \frac{d\alpha}{\alpha} + \int_1^{\infty} e^{-\alpha\delta} d\log\alpha \right\}$$
$$= e^{-\delta}\left\{ \delta \int_1^{\infty} e^{-\alpha\delta}(\log\alpha)d\alpha + e^{-(a-1)\delta} \log\frac{1}{a-1} \right\}$$
$$\le e^{-\delta}\left\{ e^{-\delta}\delta \int_1^{\frac{1}{\delta}} (\log\alpha)d\alpha - \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} (\log\alpha)de^{-\alpha\delta} + e^{-(a-1)\delta}\log\frac{1}{a-1} \right\}$$
$$= e^{-\delta}\left\{ e^{-\delta}\left(\log\frac{1}{\delta} - 1 + \delta \right) + \left(\log\frac{1}{\delta} \right) e^{-1} \right.$$
$$\left. + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha e^{a\delta}} + e^{-(a-1)\delta}\log\frac{1}{a-1} \right\}$$
$$\le e^{-a\delta}\left\{ e^{(a-2)\delta}\left(\log\frac{1}{\delta} \right)(1+e^{-1+\delta}) + \log\frac{1}{a-1} \right\}. \tag{2}$$

当 $\mathrm{Re}\, s \ge 1 + \frac{\delta}{\log D}$ 及 $1 < a \le 2$ 时，则由 (2) 式及资料 [5] 中的引理 7 有

$$\sum_{\chi} |f_{\chi}(s,a)|^2 \le \varphi(D) \sum_{p_1 > D^a} \frac{\log p_1}{p_1^{1+\delta(\log D)^{-1}}} \sum_{\substack{p_2 > D^a \\ p_2 \equiv p_1 (\mathrm{mod}\, D)}} \frac{\log p_2}{p_2^{1+\delta(\log D)^{-1}}}$$
$$\le (1+\varepsilon)(\varphi(D))\left(\int_{D^a}^{\infty} \frac{(\log t)d\pi(t)}{t^{1+\delta(\log D)^{-1}}} \right)\left(\max_{(l,D)=1} \int_{D^a}^{\infty} \frac{(\log s)d\pi(s,D,l)}{s^{1+\delta(\log D)^{-1}}} \right)$$
$$\le (2+5\varepsilon)\left\{ \int_{D^a}^{\infty} \frac{t}{\log t} d\left(\frac{\log t}{t^{1+\delta(\log D)^{-1}}} \right) \right\}$$
$$\cdot \left\{ \int_{D^a}^{\infty} \left(\frac{s}{\log\frac{s}{D}} \right) d\left(\frac{\log s}{s^{1+\delta(\log D)^{-1}}} \right) \right\}$$
$$\le (2+10\varepsilon)\left(\int_{D^a}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\delta(\log D)^{-1}}} \right)$$
$$\cdot \left(\int_{D^a}^{\infty} \frac{ds}{s^{1+\delta(\log D)^{-1}}} + \int_{D^a}^{\infty} \frac{(\log D)ds}{s^{1+\delta(\log D)^{-1}} \log\frac{s}{D}} \right)$$

$$\leq (2+10\varepsilon)(e^{-2a\delta}\delta^{-1})\left\{\delta^{-1}+e^{(a-2)\delta}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)(1+e^{-1+\delta})+\log\frac{1}{a-1}\right\}$$

$$\cdot(\log D)^2,$$

故引理 5 得证.

引理 6. 设 $Q_\Delta(\lambda)=Q_\Delta(\lambda(D))$ 表示在矩形

$$1-\frac{\lambda}{\log D}\leq\sigma\leq 1,\quad |t-t_0|\leq\frac{0.0365}{2\log D}\qquad R_{\lambda,\Delta}(t_0)$$

内至少有一个零点的 $L(s,\chi)$ 的数目，其中 $\chi\neq\chi_1$, 则当 $\frac{1}{20}\leq\lambda\leq 0.09$ 时，有

$$Q_\Delta(\lambda)\leq 10.36e^{18.2\lambda}.$$

我们用 $Q(\lambda)=Q(\lambda(D))$ 表示在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内至少有一个零点的 $L(s,\chi)$ 的数目，其中 $\chi\neq\chi_1$, 则当 $0.09<\lambda\leq 0.65$ 时，有

$$Q(\lambda)\leq e^{c_{1\lambda}\lambda},\quad 其中\quad c_{1\lambda}=\begin{cases}58, & 当\ 0.09<\lambda\leq 0.1\ 时;\\ 75, & 当\ 0.1<\lambda\leq 1/3\ 时;\\ 60, & 当\ 1/3<\lambda\leq 0.5\ 时;\\ 70, & 当\ 0.5<\lambda\leq 0.65\ 时.\end{cases}$$

证. 设 $L(s,\chi)(\chi\neq\chi_1)$ 在矩形 $R_{\lambda,\Delta}(t_0)$ 内有一个零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\tau_\chi$. 在引理 2 中取 $K=1/3\lambda$, 则有

$$|f_\chi(K_\chi,1.07)|\geq(1/3\lambda-1.5)(\log D).$$

由引理 4, $R_{\lambda,\Delta}(t_0)$ 和 K_χ 的定义，我们知道这些 K_χ 皆包含在矩形

$$1+\frac{2\lambda}{\log D}\leq\sigma\leq 1+\frac{3\lambda-0.05}{\log D},\quad |t-t_0|\leq\frac{0.0365}{2\log D}\qquad R^*_{\lambda,\Delta}(t_0)$$

内，以 K^*_Δ 记作矩形 $R^*_{\lambda,\Delta}(t_0)$ 中的二个对角线的交点. 由 K^*_Δ 到 $R^*_{\lambda,\Delta}(t_0)$ 任一点的距离不超过 $\left\{\left(\lambda-\frac{1}{20}\right)^2+(0.0365)^2\right\}^{\frac{1}{2}}(2\log D)^{-1}$, 以及在引理 3 中取 $\delta=2\lambda$, 则有

$$\begin{aligned}|f_\chi(K_\chi,1.07)-f_\chi(K^*_\Delta,1.07)|&\leq\int_{K_\chi}^{K^*_\Delta}\left|\frac{d}{ds}f_\chi(s,1.07)\right||ds|\\&\leq\left(\frac{(1+2\varepsilon)(\log D)}{8\lambda^2}\right)\left\{\left(\lambda-\frac{1}{20}\right)^2+(0.0365)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\&\leq 0.39\left(\frac{1}{3\lambda}-1.5\right)(\log D).\end{aligned}$$

其中用到当 $0.05 \le \lambda \le 0.09$ 时，有

$$\left(\frac{1+2\varepsilon}{8\lambda^2}\right)\left\{\left(\lambda-\frac{1}{20}\right)^2+(0.0365)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le 0.39\left(\frac{1}{3\lambda}-1.5\right).$$

因此

$$|f_\chi(K^*_\Delta, 1.07)|^2 \ge (0.61)^2\left(\frac{1}{3\lambda}-1.5\right)^2(\log D)^2.$$

由于 $\operatorname{Re} K^*_\Delta \ge 1+\frac{2\lambda}{\log D}$, 故由引理 5 有

$$\sum_\chi |f_\chi(K^*_\Delta, 1.07)|^2 \le (2+10\varepsilon)e^{-4.28\lambda}(2\lambda)^{-1}\Big\{(2\lambda)^{-1} + e^{-1.86\lambda}(1+e^{-1+2\lambda})\left(\log\frac{1}{2\lambda}\right)+\log\frac{100}{7}\Big\}(\log D)^2.$$

由上二式，故当 $0.05 \le \lambda \le 0.09$ 时，有

$$\begin{aligned} Q_\Delta(\lambda) &\le (0.61)^{-2}\left(\frac{1}{3\lambda}-1.5\right)^{-2}\lambda^{-2}\Big\{0.5 \\ &\quad +\lambda e^{-1.86\lambda}\left(\log\frac{1}{2\lambda}\right)(1+e^{-1+2\lambda})+\lambda\log\frac{100}{7}\Big\}e^{-4.28\lambda} \\ &\le 10.36e^{18.2\lambda}. \end{aligned}$$

设 $L(s,\chi)(\chi \ne \chi_1)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 $\rho_\chi = \beta_\chi + i\tau_\chi$. 取 K 使得

$$\frac{1}{\lambda} \ge K+\varepsilon > \max\left(\frac{1}{2}, a+0.341\right),$$

由引理 2 有 $|f_\chi(K_\chi, a)| \ge (K-a-0.4264)(\log D)$. 由引理 4,$R_\lambda(t_0)$ 和 K_χ 的定义，可知这些 K_χ 皆包含在下面的矩形内.

$$1+\frac{\frac{1}{K}-\lambda}{\log D} \le \sigma \le 1+\frac{\frac{1}{K}-\frac{1}{20}}{\log D}, \quad |t-t_0| \le \frac{\lambda}{2\log D}. \qquad R^*_\lambda(t_0)$$

令 $\delta = \frac{1}{K}-\lambda$ 在 $R^*_\lambda(t_0)$ 内作边长为 $\eta = \frac{\delta^2(K-a-0.43)}{\sqrt{2}\log D}$ 的正方形网将 $R^*_\lambda(t_0)$ 盖住，则这种正方形的个数不超过

$$N = \left(\left[\frac{\lambda-\frac{1}{20}}{\eta\log D}\right]+1\right)\left(\left[\frac{\lambda}{\eta\log D}\right]+1\right).$$

其中 $[m]$ 代表 m 的整数部分. 由 $Q(\lambda)$ 的定义, 必有一个边长为 η 的正方形 $R_\lambda^{**}(t_0)$, 它至少有 $Q(\lambda)N^{-1}$ 个 $L(s,\chi)$, 而所有这些 $L(s,\chi)$ 有 $R_\lambda^{**}(t_0)$ 内都有一点 K_χ. 以 K^* 记作 $R_\lambda^{**}(t_0)$ 中的二个对角线的交点, 由引理 3 得

$$|f_\chi(K_\chi,a)-f_\chi(K^*,a)|\le\int_{K_\chi}^{K^*}\left|\frac{d}{ds}f_\chi(s,a)\right||ds|\le\frac{(K-a-0.427)(\log D)}{2}.$$

由引理 2 有

$$|f_\chi(K^*,a)|^2\ge\frac{(K-a-0.427)^2(\log D)^2}{4}. \tag{3}$$

又由引理 5 有

$$\begin{aligned}\sum_\chi|f_\chi(K^*,a)|^2\le{}&(2+10\varepsilon)(e^{-2a\delta}\delta^{-1})\\&\cdot\left\{\delta^{-1}+e^{(a-2)\delta}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)(1+e^{-1+\delta})+\log\frac{1}{a-1}\right\}(\log D)^2,\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\delta=\dfrac{1}{K}-\lambda$. 由 (3) 和 (4) 式有

$$\begin{aligned}Q(\lambda)\le{}&(8+50\varepsilon)(e^{-2a\delta}\delta^{-2})\left\{1+\delta e^{(a-2)\delta}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)(1+e^{-1+\delta})\right.\\&\left.+\delta\log\frac{1}{a-1}\right\}\left(\left[\frac{\sqrt{2}\left(\lambda-\frac{1}{20}\right)}{\delta^2(K-a-0.43)}\right]+1\right)\\&\cdot\left(\left[\frac{\sqrt{2}\lambda}{\delta^2(K-a-0.43)}\right]+1\right)(K-a-0.43)^{-2}.\end{aligned} \tag{5}$$

当 $0.09<\lambda\le0.1$ 时, 取 $a=1.07$, $K=\dfrac{1}{3\lambda}$, 由 (5) 式有

$$\begin{aligned}Q(\lambda)\le{}&(8+50\varepsilon)e^{-4.28\lambda}\left(\frac{2}{3}-3\lambda\right)^{-2}\\&\cdot\left\{1+2\lambda e^{-1.86\lambda}\left(\log\frac{1}{2\lambda}\right)(1+e^{-1+2\lambda})+2\lambda\log\frac{100}{7}\right\}\\&\cdot\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}-3\lambda\right)}+1\right]\right)\left(\left[\frac{1-\frac{1}{20\lambda}}{\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}-3\lambda\right)}\right]+1\right)\\\le{}&144e^{19.5\lambda-1.6}\le e^{58\lambda}.\end{aligned}$$

当 $0.1 < \lambda \le 0.25$ 时，取 $a = 1.07$, $K = \dfrac{1}{2\lambda}$, 由 (5) 式有

$$Q(\lambda) \le 8e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{2} - 1.5\lambda\right)^{-2}\left\{1 + \lambda e^{-0.9\lambda}\left(\log\frac{1}{\lambda}\right)(1 + e^{-1+\lambda})\right.$$
$$\left. +\lambda\log\frac{100}{7}\right\}\cdot\left(\left[\frac{\sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{20\lambda}\right)}{0.5 - 1.5\lambda}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{\sqrt{2}}{0.5 - 1.5\lambda}\right] + 1\right)$$
$$\le e^{75\lambda}.$$

当 $0.25 < \lambda \le 0.5$ 时，取 $a = 1.07$, $K = \dfrac{5}{6\lambda}$, 由 (5) 式有

$$Q(\lambda) \le 8\left(\frac{1}{6} - 0.3\lambda\right)^{-4}(50)$$
$$\cdot\left\{1 + \left(\frac{\lambda}{5}\right)\left(\log\frac{5}{\lambda}\right)(1 + e^{-1+\frac{\lambda}{5}}) + \left(\frac{\lambda}{5}\right)\log\frac{100}{7}\right\}$$
$$\le \begin{cases} e^{75\lambda}, & \text{当 } 0.25 < \lambda \le 1/3 \text{ 时}, \\ e^{60\lambda}, & \text{当 } 1/3 < \lambda \le 0.5 \text{ 时}. \end{cases}$$

当 $0.5 < \lambda \le 0.57$ 时，取 $a = 1.07$, $K = \dfrac{9}{10\lambda}$, 由 (5) 式有

$$Q(\lambda) \le (8)(81)(2)\left(0.1 - \frac{1.5\lambda}{9}\right)^{-4}(2) \le e^{70\lambda}.$$

当 $0.57 < \lambda \le 0.65$ 时，取 $a = 1.01$, $K = \dfrac{99}{100\lambda}$, 由 (5) 式有

$$Q(\lambda) \le (16)(10^4)(1.25)\left(0.01 - \frac{1.44\lambda}{99}\right)^{-4} \le e^{70\lambda},$$

故引理 6 得证.

当 $0 < a < 1.01$ 时，令 $F_\chi(s, a) = \displaystyle\sum_{D^a < p \le D^{1.01}} \frac{\chi(p)\log p}{p^s}$.

再令

$$n(\lambda) = \begin{cases} 2, & \text{当 } 0.65 < \lambda \le 0.95 \text{ 时}, \\ 3, & \text{当 } 0.95 < \lambda \le 1.1 \text{ 时}, \\ 4, & \text{当 } 1.1 < \lambda \le 1.25 \text{ 时}. \end{cases}$$

当 $0.65 < \lambda \le 1.25$ 时，令 $K = \dfrac{99}{100\lambda}$, 设 $L(s, \chi)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 ρ_χ, 令 $K_\chi = \rho_\chi + \dfrac{1}{K\log D}$, 由引理 2 有

$$\left|f_\chi\left(K_\chi, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right| \ge \left(K - \frac{1}{n(\lambda)} - 0.427\right)(\log D).$$

则有二种可能情形

A) $\left|F_\chi\left(K_\chi, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right| \geq 0.1 \log D$.

B) $|f_\chi(K_\chi, 1.01)| \geq \left(K - \frac{1}{n(\lambda)} - 0.527\right)(\log D)$.

引理 7. 令使 A) 成立的 $L(s,\chi)(\chi \neq \chi_1)$ 的个数为 $Q_1(\lambda)$, 则当 $0.65 < \lambda \leq 1.25$ 时，我们有 $Q_1(\lambda) \leq \frac{e^{70\lambda}}{2}$.

证. 设 $L(s,\chi)(\chi \neq \chi_1)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 ρ_χ, 并使得 $\left|F_\chi\left(K_\chi, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right| \geq 0.1 \log D$, 由 $R_\lambda(t_0)$ 和 K_χ 的定义及引理 4, 知道这些 K_χ 皆包含在矩形 $R_\lambda^*(t_0)$ 内. 又当 $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \frac{\varepsilon}{\log D}$ 时，我们有

$$\left|\frac{d}{ds}F_\chi\left(s, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right| \leq \sum_{D^{1/n(\lambda)} \leq p \leq D^{1.01}} \frac{\log^2 p}{p} \leq (1+\varepsilon)\int_{D^{1/n(\lambda)}}^{D^{1.01}} \frac{(\log t)dt}{t}$$
$$\leq \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\left\{(\log D^{1.01})^2 - (\log D^{1/n(\lambda)})^2\right\} \leq \frac{\log^2 D}{2}.$$

作边长为 $\eta = \frac{0.11}{\log D}$ 的正方形网，将 $R_\lambda^*(t_0)$ 盖住，则这种正方形的个数不超过 $N = \left(\left[\frac{\lambda - \frac{1}{20}}{\eta \log D}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{\lambda}{\eta \log D}\right] + 1\right)$. 由 $Q_1(\lambda)$ 的定义，必有一个边长为 η 的正方形 $R_\lambda^{**}(t_0)$, 使得至少具有 $Q_1(\lambda)N^{-1}$ 个 $L(s,\chi)$, 而所有这些 $L(s,\chi)$ 在 $R_\lambda^{**}(t_0)$ 内都有一点 K_χ 并满足 $\left|F_\chi\left(K_\chi, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right| \geq 0.1 \log D$. 以 K^* 记作 $R_\lambda^{**}(t_0)$ 中的二个对角线的交点，我们有

$$\left|F_\chi\left(K_\chi, \frac{1}{n(\lambda)}\right) - F_\chi\left(K^*, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right| \leq \int_{K_\chi}^{K^*} \left|\frac{d}{ds}F_\chi\left(s, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right||ds|$$
$$\leq 0.04 \log D.$$

故至少具有 $Q_1(\lambda)N^{-1}$ 个模 D 不同的 χ, 使得 $\left|F_\chi\left(K^*, \frac{1}{n(\lambda)}\right)\right| \geq 0.06 \log D$, 则有二种可能情形:

1) 至少存在有 $Q_1(\lambda)(2N)^{-1}$ 个模 D 不同的 χ, 使得 $|F_\chi(K^*, 1)| \geq 0.01 \log D$.

2) 至少存在有 $Q_1(\lambda)(2N)^{-1}$ 个模 D 不同的 χ, 使得

$$\left|\sum_{D^{1/n(\lambda)} < p \leq D} \frac{\chi(p)\log p}{p^{K^*}}\right| \geq 0.05 \log D.$$

设 1) 成立，则有 $Q_1(\lambda)(2N)^{-1}$ 个模 D 不同的 χ, 使得

$$|F_\chi(K^*,1)| \geq 0.01 \log D. \tag{6}$$

我们使用记号 $\sum^{(i)}$ 来表示一个和式，在该和式中只经过所有素数因子都大于 $D^{\frac{1}{i}}$ 的正整数. 由 (6) 式有

$$\left| \sum_{D^2<m\leq D^{2.02}}^{(1)} \frac{a_m \chi(m)}{m^{K^*}} \right|^2 \geq (0.01 \log D)^4, \tag{7}$$

其中 $a_m \leq 2(1.01 \log D)^2 \leq 2.1(\log D)^2$. 利用资料 [1] 中的引理 4.1 和引理 4.2, 有

$$\begin{aligned}\sum_\chi \left| \sum_{D^2<m\leq D^{2.02}}^{(1)} \frac{a_m \chi(m)}{m^{K^*}} \right|^2 &\leq (2.1)^2 (\log D)^4 \sum_{D^2<u\leq D^{2.02}}^{(1)} \frac{\varphi(D)}{u} \sum_{\substack{D^2<v\leq D^{2.02} \\ v\equiv u \,(\mathrm{mod}\, D)}}^{(1)} \frac{1}{v} \\ &\leq (5000)(\log D)^4. \end{aligned} \tag{8}$$

当 $0.65 \leq \lambda \leq 1.25$ 时，则由 (7) 和 (8) 式有

$$Q_1(\lambda) \leq 10^{12} \left(\frac{\lambda - 0.05}{0.11} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{0.11} + 1 \right) \leq \frac{e^{70\lambda}}{2}. \tag{9}$$

用相似方法可以证明，当情况 2) 成立时，引理 7 也能够成立.

引理 8. 令使 B) 成立的 $L(s,\chi)(\chi \neq \chi_1)$ 的个数为 $Q_2(\lambda)$, 则当 $0.65 \leq \lambda \leq 1.25$ 时，有

$$Q_2(\lambda) \leq \frac{e^{70\lambda}}{2}.$$

证. 设 $L(s,\chi)\,(\chi \neq \chi_1)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 ρ_χ. 并使得

$$|f_\chi(K_\chi, 1.01)| \geq \left(K - \frac{1}{n(\lambda)} - 0.527 \right) (\log D).$$

由于 $R_\lambda(t_0)$ 和 K_χ 的定义及引理 4, 可知这些 K_χ 皆包含在矩形 $R_\lambda^*(t_0)$ 内. 令 $\delta = \frac{1}{K} - \lambda$, 由引理 3 可知，当 $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \frac{\delta}{\log D}$ 时，有 $\left| \frac{d}{ds} f_\chi(s, 1.01) \right| \leq (1+2\varepsilon) \left(\frac{\log D}{\delta} \right)^2$. 作边长为 $\eta = \dfrac{\delta^2 \left(K - \frac{1}{n(\lambda)} - 0.53 \right)}{\sqrt{2} \log D}$ 的正方形网将 $R_\lambda^*(t_0)$ 盖住，则这种正方形的个数不超过

$$N = \left(\left[\frac{\lambda - \frac{1}{20}}{\eta \log D} \right] + 1 \right) \left(\left[\frac{\lambda}{\eta \log D} \right] + 1 \right).$$

由于 $Q_2(\lambda)$ 的定义必有一个边长为 η 的正方形 $R_\lambda^{**}(t_0)$, 它至少含有 $Q_2(\lambda)\cdot N^{-1}$ 个不同的 $L(s,\chi)$, 而这些 $L(s,\chi)$ 在 $R_\lambda^{**}(t_0)$ 内都有一点 K_χ, 并使得

$$|f_\chi(K_\chi,1.01)|\geq\left(K-\frac{1}{n(\lambda)}-0.527\right)(\log D).$$

以 K^* 记作 $R_\lambda^{**}(t_0)$ 中的二个对角线的交点，由引理 3 有

$$\begin{aligned}|f_\chi(K_\chi,1.01)-f_\chi(K^*,1.01)|&\leq\int_{K_\chi}^{K^*}\left|\frac{d}{ds}f_\chi(s,1.01)\right||ds|\\&\leq\frac{\left(K-\dfrac{1}{n(\lambda)}-0.527\right)(\log D)}{2}.\end{aligned}$$

因而有

$$|f_\chi(K^*,1.01)|^2\geq\frac{\left(K-\dfrac{1}{n(\lambda)}-0.527\right)^2(\log D)^2}{4}.\tag{10}$$

由于 $\mathrm{Re}K^*\geq 1+\dfrac{\delta}{\log D}$ 和引理 5, 有

$$\begin{aligned}&\sum_\chi|f_\chi(K^*,1.01)|^2\\&\leq 2\delta^{-2}\left\{1+\delta\left(\log\frac{1}{\delta}\right)(1+e^{-1+\delta})+\delta\log 100\right\}(\log D)^2.\end{aligned}\tag{11}$$

由 (10) 和 (11) 式有

$$\begin{aligned}Q_2(\lambda)\leq\ &8\delta^{-2}\left\{1+\delta\left(\log\frac{1}{\delta}\right)(1+e^{-1+\delta})+\delta\log 100\right\}\\&\cdot\left(\frac{1}{K-\dfrac{1}{n(\lambda)}-0.53}\right)^2\left(\left[\frac{\sqrt{2}\left(\lambda-\dfrac{1}{20}\right)}{\delta^2\left(K-\dfrac{1}{n(\lambda)}-0.53\right)}\right]+1\right)\\&\cdot\left(\left[\frac{\sqrt{2}\lambda}{\delta^2\left(K-\dfrac{1}{n(\lambda)}-0.53\right)}\right]+1\right).\end{aligned}\tag{12}$$

当 $0.65 < \lambda \le 0.95$ 时，取 $K = \frac{99}{100\lambda}$, 则由 (12) 式和 $n(\lambda) = 2$ 有

$$Q_2(\lambda) \le 8\left(\frac{1}{0.01 - \frac{1.03\lambda}{99}}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{\lambda}{99}\right)\left(\log\frac{99}{\lambda}\right)(1 + e^{-1+\frac{\lambda}{99}}) + \frac{\lambda \log 100}{99}\right\}\left(\left[\frac{(99)\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{20\lambda}\right)}{0.01 - \frac{1.03\lambda}{99}}\right] + 1\right) \cdot \left(\left[\frac{(99)\sqrt{2}}{0.01 - \frac{1.03\lambda}{99}}\right] + 1\right) \le \frac{e^{70\lambda}}{2}. \tag{13}$$

当 $0.95 < \lambda \le 1.1$ 时，取 $K = \frac{99}{100\lambda}$, 则由 (12) 式和 $n(\lambda) = 3$ 有

$$Q_2(\lambda) \le 8\left(0.01 - \frac{0.87\lambda}{99}\right)^{-4}(10^2)^2(2)^2 < \frac{e^{70\lambda}}{2}. \tag{14}$$

当 $1.1 < \lambda \le 1.25$ 时，取 $K = \frac{99}{100\lambda}$, 则由 (12) 式和 $n(\lambda) = 4$, 有

$$Q_2(\lambda) \le 8\left(0.01 - \frac{0.78\lambda}{99}\right)^{-4}(10^2)^2(2)^2 < \frac{e^{70\lambda}}{2}. \tag{15}$$

由 (13) - (15) 式，引理 8 得证.

由引理 7 和引理 8 即得.

引理 9. 我们用 $Q(\lambda) = Q(\lambda(D))$ 表示在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内至少有一个零点的 $L(s,\chi)(\chi \ne \chi_1)$ 的数目，则当 $0.65 \le \lambda \le 1.25$ 时，我们有

$$Q(\lambda) \le e^{70\lambda}.$$

引理 10. 设 $\alpha > 1, A \ge \kappa \ge \sqrt{5}$, 又令 $|K_1(\omega)| = |e^{\alpha A\omega}(e^{A\omega} - e^{-A\omega})/(2A\omega)|$, 则当 ω 是正方形 $-\frac{2}{\kappa A} \le \sigma \le 0, |t| \le \frac{1}{\kappa A}$ 内的一点时. 我们有

$$|K_1(\omega)| \ge e^{-\frac{2\alpha}{\kappa}}\left(0.9997 + \frac{1}{2\kappa^2} - \frac{7}{120\kappa^4}\right).$$

证. 由 $K_1(\omega)$ 的定义而得到

$$|K_1(\omega)| = \left|\frac{e^{\alpha A\omega}}{2A\omega}\right|\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A\omega)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-A\omega)^n}{n!}\right| = \left|e^{\alpha A\omega}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{(A\omega)^{n-1}}{n!}\right|.$$

由于 $|A\omega| \le \frac{\sqrt{5}}{\kappa} \le 1$, 我们有

$$|K_1(\omega)| \ge e^{\alpha A\sigma}\left\{\left|1+\frac{A^2(\sigma^2-t^2+2i\sigma t)}{6}+\frac{A^4((\sigma^2-t^2)^2-4\sigma^2t^2)}{120}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{i\sigma t(\sigma^2-t^2)A^4}{30}\right|-\left|\sum_{\substack{n=7\\ 2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n!}\right|\right\}$$
$$\ge e^{\alpha A\sigma}\left\{1+\frac{A^2(\sigma^2-t^2)}{6}+\frac{A^4((\sigma^2-t^2)^2-4\sigma^2t^2)}{120}-0.0003\right\}.$$

由于 $\kappa \ge \sqrt{5}$, $-\frac{2}{\kappa A} \le \sigma \le 0$, $|t| \le \frac{1}{\kappa A}$, 得

$$|K_1(\omega)| \ge e^{\alpha A\sigma}\left\{0.9997+\frac{A^2\sigma^2}{6}+\frac{A^4\sigma^4}{120}-\frac{1}{6\kappa^2}+\frac{1}{120\kappa^4}-\frac{A^2\sigma^2}{20\kappa^2}\right\}$$
$$\ge e^{-\frac{2\alpha}{\kappa}}\left\{0.9997+\frac{2}{3\kappa^2}-\frac{1}{6\kappa^2}+\frac{16}{120\kappa^4}+\frac{1}{120\kappa^4}-\frac{1}{5\kappa^4}\right\},$$

故引理 10 得证.

引理 11. 设 $1 \le \overline{\lambda} \le \varepsilon \log D$, $|t_0| \le D^{\varepsilon}$, $m \ge 2$. 如果 $L(s,\chi)(\chi \ne \chi_0)$ 它至少有一个零点 $\rho_1 = \beta_1 + it_1$ 具有

$$\frac{0.07\overline{\lambda}}{\log D} < |1-\beta_1| \le \frac{\overline{\lambda}}{m\log D}, \quad |t-t_0| \le \frac{\overline{\lambda}}{2m\log D}, \tag{16}$$

则 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\left.\begin{aligned}
&1-\frac{0.51\overline{\lambda}}{\log D} \le \sigma \le 1-\frac{0.42\overline{\lambda}}{\log D}, \quad |t-t_0| \le \frac{\overline{\lambda}}{4\log D};\\
&1-\frac{0.42\overline{\lambda}}{\log D} < \sigma \le 1-\frac{0.07\overline{\lambda}}{\log D}, \quad |t-t_0| \le \frac{7\overline{\lambda}}{16\log D};\\
&1-\frac{0.271\overline{\lambda}}{\log D} < \sigma \le 1-\frac{0.07\overline{\lambda}}{\log D}, \quad \frac{7\overline{\lambda}}{16\log D} < |t-t_0| \le \frac{\overline{\lambda}}{2\log D}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

内的零点数目最多为

$$\left(0.611+\frac{0.25}{0.611}\right)\left(0.4265\overline{\lambda}+\frac{100}{34}-\frac{0.34+\frac{1}{m}}{\left(0.34+\frac{1}{m}\right)^2+\frac{0.25}{m^2}}\right)+1.$$

证. 令 $\sigma_0 = 1+\dfrac{0.34\overline{\lambda}}{\log D}$, $s_0 = \sigma_0+it_0$. 由于 $\left|\dfrac{L'}{L}(s_0,\chi)\right| \le (1+\varepsilon)(\sigma_0-1)^{-1}$ 及资料 [5] 中的 (2.3) 式，有

$$\sum_{\rho} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_0-\rho} - 4(\overline{s_0}-\overline{\rho})\right) \le \left(0.4264 + \frac{1}{0.34\overline{\lambda}}\right)(\log D), \tag{18}$$

其中和式内的 ρ 经过 $L(s,\chi)$ 在圆 $|s-s_0| \le \dfrac{1}{2}$ 内的零点，记 $s_0-\rho = z$, 则当 $|z| \le \dfrac{1}{2}$ 时，有 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z} - 4\overline{z}\right) = \mathrm{Re}\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}(1-4|z|^2) \ge 0$. 于是在 (18) 式中的和式内所有的项都是非负的. 又我们有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_0-\rho_1}\right) \ge \frac{\sigma_0-\beta_1}{(\sigma_0-\beta_1)^2+\left(\dfrac{r}{2m}\right)^2} \ge \frac{0.34+\dfrac{1}{m}}{\left(0.34+\dfrac{1}{m}\right)^2 r + \dfrac{0.25r}{m^2}},$$

其中 $r = \dfrac{\overline{\lambda}}{\log D}$. 故有

$$\sum_{\rho}{}' \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_0-\rho}\right) \le \left(0.4265\overline{\lambda} + \frac{100}{34} - \frac{0.34+\dfrac{1}{m}}{\left(0.34+\dfrac{1}{m}\right)^2 + \dfrac{0.25}{m^2}}\right)\left(\frac{1}{r}\right), \tag{19}$$

其中 $\sum\limits_{\rho}{}'$ 的 ρ 是经过 $L(s,\chi)$ 在区域 (17) 内的零点，但 $\rho \ne \rho_1$, 我们能证明当 ρ 是在区域 (17) 式内 $L(s,\chi)$ 的零点时，有 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{s_0-\rho}\right) \ge \dfrac{0.611}{(0.611)^2 r + 0.25r}$.
由 (19) 式引理 11 得证. 同法可得

引理 12. 设 $1 \le \overline{\lambda} \le \varepsilon \log D$, $|t_0| \le D^{\varepsilon}$, 则当 $\chi \ne \chi_0$ 时， $L(s,\chi)$ 在区域 (17) 式内的零点数目最多为

$$\left(0.611 + \frac{0.25}{0.611}\right)\left(0.4265\overline{\lambda} + \frac{100}{34}\right).$$

现设 $\lambda \ge \dfrac{1}{3}$, $k \ge 2$, $10^2 \ge \kappa \ge \sqrt{5}$, 并令 $A = \dfrac{2\log D}{\kappa\lambda}$, 作正方形

$$1 - \frac{2}{\kappa A} \le \sigma \le 1, \quad |t-t_0| \le \frac{1}{\kappa A}.$$

令 $0 \le \mu < 1$. 我们将区域 $0 \le \sigma \le 1 - \frac{\mu}{A}$, $t \ge t_0 + \frac{2.4}{A}$ 用矩形

$$P_{uv}(\mu): \begin{cases} 1 - \frac{u+1}{A} \le \sigma \le 1 - \frac{\max(u,\mu)}{A} \\ t_0 + \frac{2.4+v}{A} \le t \le t_0 + \frac{3.4+v}{A} \end{cases}$$

盖住，其中 $u = 0, 1, \ldots$, $v = 0, 1, \ldots$. 我们又将区域 $1 - \frac{\mu}{A} \le \sigma \le 1$, $t \ge t_0 + \frac{7}{A}$ 用矩形

$$P(v,\mu): \begin{cases} 1 - \frac{\mu}{A} \le \sigma \le 1, \\ t_0 + \frac{7+v}{A} \le t \le t_0 + \frac{8+v}{A} \end{cases}$$

盖住，其中 $v = 0, 1, \ldots$. 设 $\rho = \sigma + it$, 则当 $\alpha > 1$ 时，有

$$|K_1(\rho - 1 - it_0)| = \left| \frac{e^{(\alpha-1)A(\rho-1-it_0)}(e^{2A(\rho-1-it_0)} - 1)}{2A(\rho - 1 - it_0)} \right|$$

$$= \frac{e^{(\alpha-1)A(\sigma-1)}\{1 + e^{4A(\sigma-1)} - 2e^{2A(\sigma-1)}\cos 2A(t-t_0)\}^{\frac{1}{2}}}{2A\{(\sigma-1)^2 + (t-t_0)^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

令 $M_u(\mu) = \max(u, \mu)$, 当 $v \ge 0$ 时，令 $c(v) = \left(\frac{1}{7+v}\right)^k$, 设 ρ 是 $P(v,\mu)$ 中的一点，则有

$$|K_1(\rho - 1 - it_0)|^k \le c(v).$$

令

$$C_{00}(\mu) = e^{-k(\alpha-1)\mu}2^{-k}\left(\frac{1 + e^{-4\mu} - 0.174e^{-2\mu}}{(2.4)^2 + \mu^2}\right)^{k/2},$$

$$C_{uv}(\mu) = \begin{cases} e^{-k(\alpha-1)u}2^{-k}\left(\frac{1+e^{-4u}}{(2.4)^2+u^2}\right)^{k/2}, & \text{当}u \ge 1,\ v = 0\text{时}, \\ 2^{-k}e^{-k(\alpha-1)M_u(\mu)} & \\ \quad \cdot \max\left(\left(\frac{1+e^{-4M_u(\mu)}}{(3.4)^2 + (M_u(\mu))^2}\right)^{k/2}, \frac{(1+e^{-2M_u(\mu)})^k}{((3.9)^2 + (M_u(\mu))^2)^{k/2}}\right), & \\ & \text{当}u \ge 0,\ v = 1\text{时}, \\ e^{-k(\alpha-1)M_u(\mu)}(2.4+v)^{-k}\left(\frac{1+e^{-2M_u(\mu)}}{2}\right)^k, & \text{当}u \ge 0,\ v \ge 2\text{时}. \end{cases}$$

设 ρ 是 $P_{uv}(\mu)$ 中的一点，则有

$$|K_1(\rho-1-it_0)|^k \le C_{uv}(\mu).$$

我们使用 n_{00}^* 表示用资料 [5] 来估计 $L(s,\chi)$ 在 $P_{00}(0)$ 中的零点数目时，所得到该零点数目的上界，而用 n_{uv} 来表示 $L(s,\chi)$ 在 $P_{uv}(0)$ 中的零点数目. 由资料 [5] 中第 8 节 §2 的引理知道，当 $h \le A$ 和 $0 \le v \le 2A$ 时，我们有

$$s_{hv} = \sum_{0\le u\le h} n_{uv} \le (h+1)n_{00}^*.$$

而对于所有 $h \ge 0, v \ge 0$, 则我们有

$$s_{hv} \ll (h+1)n_{00}^* \log\left(2+\frac{v}{A}\right),$$

而分部求和得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le u<\infty}\sum_{0\le v<\infty} n_{uv}C_{uv}(\mu)\\
&\le 1.01n_{00}^* e^{-k(\alpha-1)\mu}2^{-k}\left(\frac{1+e^{-4\mu}-0.174e^{-2\mu}}{5.76+\mu^2}\right)^{k/2}\\
&\quad +1.01n_{00}^* e^{-k(\alpha-1)}2^{-k}\left(\frac{1+e^{-4}}{6.76}\right)^{k/2}(1-e^{-k(\alpha-1)})^{-1}\\
&\quad +1.01n_{00}^* e^{-k(\alpha-1)\mu}2^{-k}\max\left(\left(\frac{1+e^{-4\mu}}{11.56+\mu^2}\right)^{k/2}, \frac{(1+e^{-2\mu})^k}{(15.21+\mu^2)^{k/2}}\right)\\
&\quad +1.01n_{00}^* e^{-k(\alpha-1)}2^{-k}\left(\frac{1+e^{-4}}{12.56}\right)^{k/2}(1-e^{-k(\alpha-1)})^{-1}\\
&\quad +1.01n_{00}^*\left(\frac{1}{4.4}\right)^k\left\{e^{-k(\alpha-1)\mu}\left(\frac{1+e^{-2\mu}}{2}\right)^k\right.\\
&\quad \left.+e^{-k(\alpha-1)}\left(\frac{1+e^{-2}}{2}\right)^k(1-e^{-k(\alpha-1)})^{-1}\right\}\left(1+\frac{4.4}{k-1}\right),
\end{aligned} \tag{20}$$

我们使用 l_v 来表示 $L(s,\chi)$ 在矩形 $1-\frac{1}{A} \le \sigma \le 1$, $t_0+\frac{7+v}{A} \le t \le t_0+\frac{8+v}{A}$ 内的零点数目，由于 $l_v \le n_{00}^*$, 故有

$$\sum_{0\le v<\infty} l_v C(v) \le n_{00}^* \sum_{v=0}^{\infty}\frac{1.01}{(7+v)^k} \le 1.01n_{00}^*\left(\frac{1}{7}\right)^k\left(1+\frac{7}{k-1}\right). \tag{21}$$

又关于 $|K_1(\rho-1-it_0)|^k$ 经过 $L(s,\chi)$ 在区域

$$0 \le \sigma \le 1-\frac{\mu}{A}, \quad t \le t_0-\frac{2.4}{A}$$

内所有零点 ρ 的数值估计，及关于 $|K_1(\rho-1-it_0)|^k$ 经过 $L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{1}{A} \le \sigma \le 1, \quad t \le t_0-\frac{7}{A}$$

内所有零点 ρ 的数值估计，可用前面的方法，定义矩形

$$Q_0:\begin{cases} 1-\frac{3}{A} \le \sigma \le 1-\frac{2.4}{A}, \\ |t-t_0| \le \frac{2.4}{A}, \end{cases} \qquad Q_u:\begin{cases} 1-\frac{3+u}{A} \le \sigma \le 1-\frac{2+u}{A}, \\ |t-t_0| \le \frac{2.4}{A}, \end{cases}$$

其中 $u=1,\ldots$. 又当 $u\ge 0$ 时，令 n_u 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形 Q_u 中的零点个数，当 $u \ge 0$ 时，显见 $n_u \le 4.8(u+1)n_{00}^*$. 令

$$C_0=(4.8)^{-k}(1+e^{-4.8})^k e^{-2.4(\alpha-1)k},$$

而当 $u \ge 1$ 时，令

$$C_u=(2u+4)^{-k}(1+e^{-6})^k e^{-k(\alpha-1)(2+u)}.$$

设 $u \ge 0$ 及 ρ 是 Q_u 中的一点时，则有

$$|K_1(\rho-1-it_0)|^k \le C_u.$$

当 $k \ge 2$ 时，有

$$\begin{aligned} \sum_{0\le u<\infty} n_u C_u \le\ & 5n_{00}^*(4.8)^{-k}e^{-2.4(\alpha-1)k}(1.01)^k \\ & +10n_{00}^*(6)^{-k}(1.01)^k e^{-3k(\alpha-1)} \\ & +25n_{00}^*(8)^{-k}(1.01)^k e^{-4k(\alpha-1)}(1-e^{-k(\alpha-1)})^{-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

如果 ρ 是区域

$$1-\frac{2.4}{A} \le \sigma \le 1-\frac{2}{A}, \quad \frac{1.2}{A} < |t-t_0| \le \frac{2.4}{A}$$

内的一点，则我们有

$$|K_1(\rho-1-it_0)|^k \le 2^{-k}(5.44)^{-\frac{k}{2}}e^{-2(\alpha-1)k}(1+e^{-4})^k$$
$$\le (4.57)^{-k}e^{-2(\alpha-1)k}. \tag{23}$$

又 $L(s,\chi)$ 在该区域内的零点数目 $\le 4.8n_{00}^*$.

如果 ρ 是区域

$$1-\frac{2}{A}\le\sigma\le 1-\frac{1.3}{A},\quad \frac{2.1}{A}\le|t-t_0|\le\frac{2.4}{A}$$

内的一点，则有

$$|K_1(\rho-1-it_0)|^k \le 2^{-k}(6.1)^{-\frac{k}{2}}e^{-1.3(\alpha-1)k}(1+e^{-5.2}+e^{-2.6})^{\frac{k}{2}}$$
$$\le (4.74)^{-k}e^{-1.3(\alpha-1)k}. \tag{24}$$

引理 13. 设 $k\ge 2$ 正整数， $\alpha\ge 1.05$, $0\le\mu<1$, $(\alpha-1)kA>\log D$, 当 χ 是资料 [5] 中引理 8 的非除外特征，及 $L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{\mu}{A}\le\sigma\le 1,\quad |t-t_0|\le\frac{7}{A}$$

内没有零点时，则有

$$\left|\sum_{\rho}^{(\mu)}(K_1(\rho-1-it_0))^k\right| \le 12\sqrt{a_1}D^{-\frac{\beta}{2}}+2.02n_{00}^*(2)^{-k}e^{-k(\alpha-1)\mu}$$
$$\cdot\left\{\left(\frac{1+e^{-4\mu}-0.174e^{-2\mu}}{5.76+\mu^2}\right)^{\frac{k}{2}}+\max\left(\left(\frac{1+e^{-4\mu}}{11.56+\mu^2}\right)^{\frac{k}{2}},\frac{(1+e^{-2\mu})^k}{(15.21+\mu^2)^{k/2}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4.4}\right)^k(1+e^{-2\mu})^k\left(1+\frac{4.4}{k-1}\right)\right\}+2.02n_{00}^*(2)^{-k}e^{-k(\alpha-1)}(1-e^{-k(\alpha-1)})^{-1}$$
$$\cdot\left\{\left(\frac{1+e^{-4}}{6.76}\right)^{\frac{k}{2}}+\left(\frac{1+e^{-4}}{12.56}\right)^{\frac{k}{2}}+\left(\frac{1}{4.4}\right)^k(1+e^{-2})^k\left(1+\frac{4.4}{k-1}\right)\right\}$$
$$+2.02n_{00}^*\left(\frac{1}{7}\right)^k\left(1+\frac{7}{k-1}\right)+5n_{00}^*e^{-2.4(\alpha-1)k}\{(4.75)^{-k}$$
$$+2(5.9)^{-k}e^{-0.6(\alpha-1)k}+5(7.9)^{-k}e^{-1.6(\alpha-1)k}(1-e^{-k(\alpha-1)})^{-1}\}$$
$$+5n_{00}^*\{(4.57)^{-k}e^{-2k(\alpha-1)}+(4.74)^{-k}e^{-1.3(\alpha-1)k}\},$$

其中 $\sum_{\rho}^{(\mu)}$ 系表示和式中的 ρ 经过 $L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{2.4}{A}\le\sigma\le1-\frac{2}{A},\quad |t-t_0|<\frac{1.2}{A};\quad 1-\frac{2}{A}<\sigma\le1-\frac{\mu}{A},$$
$$|t-t_0|<\frac{2.1}{A};\quad 1-\frac{1.3}{A}<\sigma\le1-\frac{\mu}{A},\quad \frac{2.1}{A}\le|t-t_0|\le\frac{2.4}{A}$$

内所有零点，又其中 a_1 由资料 [5] 中的 (3.15) 式所决定，而 β 的定义见资料 [5] 中的引理 8.

证. 由 (20) – (24) 式及资料 [5] 中的引理 8, 即得到引理 13 的证明.

引理 14. 我们用 $Q(\lambda)=Q(\lambda(D))$ 表示在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内至少有一个零点的 $L(s,\chi)(\chi\ne\chi_0)$ 的数目，则有

$$Q(\lambda)\le e^{c_{1\lambda}\lambda}.$$

其中

$$c_{1\lambda}=\begin{cases}72, & \text{当 } 1.25<\lambda\le1.8 \text{ 时;}\\ 70, & \text{当 } 1.8<\lambda\le2.35 \text{ 时;}\\ 75, & \text{当 } 2.35<\lambda\le2.85 \text{ 时;}\\ 80, & \text{当 } 2.85<\lambda\le3.6 \text{ 时;}\\ 80.7, & \text{当 } 3.6<\lambda\le5 \text{ 时.}\end{cases}$$

证. 在引理 10 和引理 13 中取

$$A=\begin{cases}0.44\log D, & \text{当 } 1.25<\lambda\le1.8 \text{ 时;}\\ 0.31\log D, & \text{当 } 1.8<\lambda\le2.35 \text{ 时;}\\ 0.24\log D, & \text{当 } 2.35<\lambda\le2.85 \text{ 时;}\\ (\log D)/5.2, & \text{当 } 2.85<\lambda\le3.6 \text{ 时;}\\ (\log D)/6.2, & \text{当 } 3.6<\lambda\le5 \text{ 时.}\end{cases}$$

$$\alpha=\begin{cases}1.27, & \text{当 } 1.25<\lambda\le1.8 \text{ 时;}\\ 1.38, & \text{当 } 1.8<\lambda\le2.35 \text{ 时;}\\ 1.44, & \text{当 } 2.35<\lambda\le2.85 \text{ 时;}\\ 1.5, & \text{当 } 2.85<\lambda\le3.6 \text{ 时;}\\ 1.6, & \text{当 } 3.6<\lambda\le5 \text{ 时.}\end{cases}$$

又令

$$\kappa=\begin{cases}(0.22)^{-1}\lambda^{-1}, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 1.8 \text{ 时;}\\ 2(0.31\lambda)^{-1}, & \text{当 } 1.8<\lambda\le 2.35 \text{ 时;}\\ (0.12\lambda)^{-1}, & \text{当 } 2.35<\lambda\le 2.85 \text{ 时;}\\ 10.4\lambda^{-1}, & \text{当 } 2.85<\lambda\le 3.6 \text{ 时;}\\ 12.4\lambda^{-1}, & \text{当 } 3.6<\lambda\le 5 \text{ 时;}\end{cases}$$

$$k_0=\begin{cases}9, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 2.35 \text{ 时;}\\ 10, & \text{当 } 2.35<\lambda\le 2.85 \text{ 时;}\\ 11, & \text{当 } 2.85<\lambda\le 5 \text{ 时.}\end{cases}$$

我们先来考虑那些 χ, 它使得 $L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{1}{2A}\le\sigma\le 1,\quad |t-t_0|\le\frac{7}{A}$$

内没有零点, 在引理 11 中取

$$\overline{\lambda}=\begin{cases}11, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 1.8 \text{ 时;}\\ 15.6, & \text{当 } 1.8<\lambda\le 2.35 \text{ 时;}\\ 20, & \text{当 } 2.35<\lambda\le 2.85 \text{ 时;}\\ 25, & \text{当 } 2.85<\lambda\le 3.6 \text{ 时;}\\ 29.76, & \text{当 } 3.6<\lambda\le 5 \text{ 时;}\end{cases}\quad m=\begin{cases}5, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 1.8 \text{ 时;}\\ 6, & \text{当 } 1.8<\lambda\le 3.6 \text{ 时;}\\ 5.95, & \text{当 } 3.6<\lambda\le 5 \text{ 时.}\end{cases}$$

由引理 11 和

$$\begin{aligned}&\left(0.34+\frac{1}{m}\right)\left(\left(0.34+\frac{1}{m}\right)^2+\frac{0.25}{m^2}\right)^{-1}\\ &=\left(0.34+\frac{1}{m}+\frac{0.25}{m^2(0.34+\frac{1}{m})}\right)^{-1}\\ &\ge\begin{cases}1.7904, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 1.8 \text{ 时;}\\ 1.9216, & \text{当 } 1.8<\lambda\le 3.6 \text{ 时;}\\ 1.915, & \text{当 } 3.6<\lambda\le 5 \text{ 时.}\end{cases}\end{aligned}$$

我们知道 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\begin{aligned}&1-\frac{2.4}{A}\le\sigma\le 1-\frac{2}{A},\quad |t-t_0|<\frac{1.2}{A};\quad 1-\frac{2}{A}<\sigma\le 1-\frac{1}{2A},\\ &|t-t_0|<\frac{2.1}{A};\quad 1-\frac{1.3}{A}<\sigma\le 1-\frac{1}{2A},\quad \frac{2.1}{A}\le|t-t_0|\le\frac{2.4}{A}\end{aligned}\tag{25}$$

内的零点数目

$$\le \left[\left(0.611+\frac{0.25}{0.611}\right)\left(0.4265\overline{\lambda}+\frac{100}{34}-\frac{0.34+\dfrac{1}{m}}{\left(0.34+\dfrac{1}{m}\right)^2+\dfrac{0.25}{m^2}}\right)\right]+1\le N$$

其中

$$N=\begin{cases}6, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 1.8 \text{ 时；}\\ 8, & \text{当 } 1.8<\lambda\le 2.35 \text{ 时；}\\ 10, & \text{当 } 2.35<\lambda\le 2.85 \text{ 时；}\\ 12, & \text{当 } 2.85<\lambda\le 3.6 \text{ 时；}\\ 14, & \text{当 } 3.6<\lambda\le 5 \text{ 时.}\end{cases}$$

令

$$c_{2\lambda}=\begin{cases}0.5588, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 1.8 \text{ 时；}\\ 0.4278, & \text{当 } 1.8<\lambda\le 2.35 \text{ 时；}\\ 0.3456, & \text{当 } 2.35<\lambda\le 2.85 \text{ 时；}\\ 0.2885, & \text{当 } 2.85<\lambda\le 3.6 \text{ 时；}\\ 0.2581, & \text{当 } 3.6<\lambda\le 5 \text{ 时.}\end{cases}$$

$$c_{3\lambda}=\begin{cases}(0.22)^{-2}, & \text{当 } 1.25<\lambda\le 1.8 \text{ 时；}\\ 4(0.31)^{-2}, & \text{当 } 1.8<\lambda\le 2.35 \text{ 时；}\\ (0.12)^{-2}, & \text{当 } 2.35<\lambda\le 2.85 \text{ 时；}\\ 109, & \text{当 } 2.85<\lambda\le 3.6 \text{ 时；}\\ 154, & \text{当 } 3.6<\lambda\le 5 \text{ 时.}\end{cases}$$

设 $L(s,\chi)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 ρ'. 现在资料 [5] 的引理 6 中取 $z_j=\{K_1(\rho-1-it_0)/K_1(\rho'-1-it_0)\}^{k_0}$, 而 ρ 经过 $L(s,\chi)$ 在区域 (25) 式内所有的零点. 由引理 10, 引理 13 及资料 [5] 中的引理 6 知道，当 $1.25<\lambda\le 5$ 时，存在有一个 k, 使得

$$1\le F_1e^{c_{2\lambda}k\lambda}+Ge^{-gk}, k_0/k, k_0\le k\le k_0N, \tag{26}$$

其中

$$F_1 = 36a_1^{1/2}D^{-\beta/2}\left(0.9997 + \frac{\lambda^2}{2c_{3\lambda}} - \frac{7\lambda^4}{(120)(c_{3\lambda})^2}\right)^{-k},$$

$$g = \log\frac{100}{21.15} + \log\left(0.9997 + \frac{\lambda^2}{2c_{3\lambda}} - \frac{7\lambda^4}{(120)(c_{3\lambda})^2}\right) - c_{2\lambda}\lambda,$$

$$G = 3n_{00}^{*}c_{4\lambda}, \quad 而 \quad c_{4\lambda} = \begin{cases} 8, & 当\ 1.25 < \lambda \le 1.8\ 时; \\ 6, & 当\ 1.8 < \lambda \le 3.6\ 时; \\ 0.5, & 当\ 3.6 < \lambda \le 5\ 时. \end{cases}$$

当 $1.25 < \lambda \le 5$ 时，由资料 [5] 中的引理 3b, 我们有 $Ge^{-gk} \le \frac{2}{3}$. 当 $1.25 < \lambda \le 5$ 时，我们有 $(\alpha-1)kA \ge 1.05\log D$, 故由资料 [5] 中的 (3.15) 式和资料 [5] 中的引理 7 的推论知，可取 $a_1 = 43$. 由 (26) 式我们有

$$D^{\beta} \le (36)^2(43)(9)\exp\left\{2k\left[c_{2\lambda}\lambda - \log\left(0.9997 + \frac{\lambda^2}{2c_{3\lambda}} - \frac{7\lambda^4}{(120)(c_{3\lambda})^2}\right)\right]\right\}$$
$$\le \frac{e^{c_{1\lambda}\lambda}}{3}.$$

故当 $1.25 < \lambda \le 5$ 时，在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内至少有一个零点，而在区域

$$1 - \frac{1}{2A} \le \sigma \le 1, \quad |t - t_0| \le \frac{7}{A}$$

内无零点的 $L(s,\chi)$ 的数目 (其中 $\chi \ne \chi_0$) $\le \frac{2e^{c_{1\lambda}\lambda}}{3}$. 由归纳法及引理 9 知道在区域

$$1 - \frac{1}{3A} \le \sigma \le 1, \quad |t - t_0| \le \frac{7}{A}$$

内有零点的 $L(s,\chi)$ 的数目 $\le \frac{e^{c_{1\lambda}\lambda}}{2}$, 故引理 14 得证.

引理 15. 我们用 $Q(\lambda) = Q(\lambda(D))$ 表示在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内至少有一个零点的 $L(s,\chi)$ (其中 $\chi \ne \chi_0$) 的数目，则当 $\lambda > 5$ 时，有

$$Q(\lambda) \le e^{80.9\lambda}.$$

证. 我们先考虑那些 χ, 它使得 $L(s,\chi)$ 在矩形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 $\rho' = \sigma' + it'$, 但在区域 $1 - \frac{1}{2.7A} \le \sigma \le 1$, $|t - t_0| \le \frac{7}{A}$ 内没有 $L(s,\chi)$ 的零

点，其中 $A=\dfrac{2\log D}{5\lambda}$. 在引理 10 和 13 中取 $\alpha=1.111$, 又在引理 11 中取 $\overline{\lambda}=12\lambda$, $m=12$, 因而 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\begin{gathered}1-\frac{2.4}{A}\le\sigma\le1-\frac{2}{A},\quad |t-t_0|<\frac{1.2}{A};\quad 1-\frac{2}{A}<\sigma\le1-\frac{1}{2.7A},\\ |t-t_0|<\frac{2.1}{A};\quad 1-\frac{1.3}{A}<\sigma\le1-\frac{1}{2.7A},\quad \frac{2.1}{A}\le|t-t_0|\le\frac{2.4}{A}\end{gathered}\tag{27}$$

内的零点数目

$$\le N=\left(0.611+\frac{0.25}{0.611}\right)\left((0.4265)(12\lambda)+\frac{100}{34}-\frac{0.34+\dfrac{1}{12}}{\left(0.34+\dfrac{1}{12}\right)^2+\dfrac{0.25}{144}}\right)+1.$$

现把资料 [5] 中引理 5 的 z_j 取为 $\dfrac{K_1(\rho-1-it_0)}{K_1(\rho'-1-it_0)}$, 其中的 ρ 经过 $L(s,\chi)$ 在区域 (27) 式内的所有零点. 在资料 [5] 的引理 5 中取 $N_1=N$, $m=[4.45N]$, 而存在有一个整数 k 于区间 $4.45N\le k\le 5.45N$ 中，并使得

$$\left|\sum_{\rho}^{(\frac{1}{2.7})}\left(\frac{K_1(\rho-1-it_0)}{K_1(\rho'-1-it_0)}\right)^k\right|\ge(43.6e)^{-N},$$

其中 ρ 是经过 $L(s,\chi)$ 在区域 (27) 式内所有的零点，由于 $\lambda\ge5$, 我们有 $N\ge27$, $k\ge120$. 在引理 13 中，取 $\mu=\dfrac{1}{2.7}$, 则有

$$\begin{aligned}(43.6e)^{-N}|K_1(\rho'-1-it_0)|^k&\le\left|\sum_{\rho}^{(\frac{1}{2.7})}(K_1(\rho-1-it_0))^k\right|\\ &\le 12a_1^{1/2}D^{-\beta/2}+3n_{00}^*(4.73)^{-k}.\end{aligned}\tag{28}$$

又有 $(\alpha-1)kA\ge1.031\log D$, 故由资料 [5] 中的 (3.15) 式和资料 [5] 中引理 7 的推论知道，可取 $a_1=68$. 当 $\lambda>5$ 时，我们有 $\dfrac{1}{A}>\dfrac{12}{\log D}$. 由资料 [5] 的引理 3a 和引理 3b, 有

$$n_{00}^*\le\frac{1.1\log D}{A}=\frac{5.5\lambda}{2}<0.53N<e^{0.11N},$$

由引理 10 有

$$|K_1(\rho'-1-it_0)|^k\ge e^{-0.4444k}(0.9997+0.02-0.0007)^k.\tag{29}$$

由 (28) 和 (29) 式，有

$$1 \le (43.6e)^N(100D^{-\beta/2} + e^{0.16N-k\log 4.73})e^{0.4444k}(1.019)^{-k}$$

$$= (100D^{-\beta/2} + e^{0.16N-k\log 4.73})e^{(0.4444-\log 1.019)k+(1+\log 43.6)N}. \tag{30}$$

令 $k = \omega' N$, 则有 $4.45 \le \omega' \le 5.45$. 由 $N \ge 27$, 有

$$N(1.16 + \log 43.6 + \omega'(0.4444 - \log 1.019 - \log 4.73)) \le -0.0856N < -2.$$

$$e^{0.16N-k\log 4.73+(0.4444-\log 1.019)k+(1+\log 43.6)N} < e^{-2} < 0.14. \tag{31}$$

取 β 使得

$$\beta = \left(\frac{2}{\log D}\right)\{\log 125 + (1 + \log 43.6)N + (0.4444 - \log 1.019)k\}. \tag{32}$$

由 (31) 和 (32) 式知道，(30) 式不成立. 我们使用 c 来表示一个正数，它满足 $e^{c\lambda} = D^\beta$, 则当 $\lambda > 5$ 时，有

$$c = \frac{\beta\log D}{\lambda} \le \frac{2\log 125}{3} + \frac{14.189N}{\lambda}$$
$$\le (5.222)(14.189) + \frac{9.657 + 22.902}{5} \le 80.61.$$

故在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内至少有一个零点，而在区域

$$1 - \frac{1}{2.7A} < \sigma \le 1, \quad |t - t_0| \le \frac{7}{A}$$

内无零点的 $L(s,\chi)$ 的数目 (其中 $\chi \ne \chi_0) \le e^{80.61\lambda+1} < 0.65e^{80.9\lambda}$. 又由归纳法及引理 14 知道，在区域 $1 - \dfrac{1}{2.7A} < \sigma \le 1, |t - t_0| \le \dfrac{7}{A}$ 内有零点的 $L(s,\chi)$ 的数目 $< 0.3e^{80\lambda}$, 故引理 15 得证.

引理 16. 令

$$a_{\lambda,1} = \begin{cases} \dfrac{1}{3.9}, & \text{当 } \dfrac{1}{20} \le \lambda \le \dfrac{1}{4}\text{时;} \\ \dfrac{1}{2.9}, & \text{当 } \dfrac{1}{4} < \lambda \le \dfrac{1}{3}\text{时,} \end{cases}$$

又当 $\dfrac{1}{20} \le \lambda \le \dfrac{1}{3}$ 时，令 $\eta_\lambda = \dfrac{a_{\lambda,1} - \lambda}{\log D}$, 则当 $m \ge 1$ 时，有

$$\sum_{p \ge e^{m/\eta_\lambda}} \frac{\log p}{p^{1+\eta_\lambda}} \le \frac{1.001}{\eta_\lambda e^m}, \quad \sum_{p \ge 3} \frac{(\log p)^2}{p^{1+\eta_\lambda}} \le \frac{1+2\varepsilon}{\eta_\lambda^2}.$$

证. 我们有

$$\sum_{p\geq e^{m/\eta_\lambda}}\frac{\log p}{p^{1+\eta_\lambda}}\leq-(1+\varepsilon)\int_{e^{m/\eta_\lambda}}^{\infty}\left(\frac{t}{\log t}\right)\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\log t}{t^{1+\eta_\lambda}}\right)\right\}dt\leq\frac{1.001}{\eta_\lambda e^m},$$

$$\sum_{p\geq 3}\frac{(\log p)^2}{p^{1+\eta_\lambda}}\leq-(1+\varepsilon)\int_{2}^{\infty}\left(\frac{t}{\log t}\right)\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\log^2 t}{t^{1+\eta_\lambda}}\right)\right\}dt\leq\frac{1+2\varepsilon}{\eta_\lambda^2}.$$

故引理 16 得证.

令 $f(s,\chi)=L(s,\chi)L(s+\delta_1,\chi\chi_1)$, 显然当 $\operatorname{Re}s=\sigma>1$ 时, 有

$$\frac{f'}{f}(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A(n)b_n}{n^s},$$

其中

$$b_n=\begin{cases}\chi(p^m)(1+\chi_1(p^m)p^{-m\delta_1}), & \text{当 } n=p^m, \text{而 } m\geq 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

引理 17. 如果 $L(s,\chi)(\chi\neq\chi_0)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\tau_\chi$, 其中 $\frac{1}{20}\leq\lambda\leq\frac{1}{3}$. 令 $s^*=\beta_\chi+\frac{a_{\lambda,1}}{\log D}+i\tau_\chi$, 则当 $\frac{1}{20}\leq\lambda\leq\frac{1}{3}$ 时, 有

$$\operatorname{Re}\frac{f'}{f}(s^*,\chi)\geq\left(\frac{1}{a_{\lambda,1}}-0.855\right)(\log D).$$

证. 由于 $\frac{f'}{f}(s^*,\chi)=\frac{L'}{L}(s^*,\chi)+\frac{L'}{L}(s^*+\delta_1,\chi\chi_1)$ 和资料 [5] 的引理 2, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f'}{f}(s^*,\chi)-\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s^*-\rho}-4(\overline{s^*}-\overline{\rho})\right)\right.\\&\left.-\sum_{\rho'}\left(\frac{1}{s^*+\delta_1-\rho'}-4(\overline{s^*+\delta_1}-\overline{\rho'})\right)\right|\leq 0.854\log D,\end{aligned}\tag{33}$$

其中的 ρ 经过 $L(s,\chi)$ 在圆 $|s-s^*|\leq\frac{1}{2}$ 内的零点, 而 ρ' 经过 $L(s,\chi\chi_1)$ 在圆 $|s-(s^*+\delta_1)|\leq\frac{1}{2}$ 内的零点. 令 $z=s^*-\rho$, 则当 $|z|\leq\frac{1}{2}$ 时, 我们有 $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}-4\overline{z}\right)\geq 0$. 令 $z'=s^*+\delta_1-\rho'$, 则当 $|z'|\leq\frac{1}{2}$ 时, 我们有 $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z'}-4\overline{z'}\right)\geq 0$. 由于 $s^*-\rho_\chi=\frac{a_{\lambda,1}}{\log D}$ 及 (33) 式, 引理 17 得证.

引理 18. 令 $f_1(s)=\sum\limits_{p\ge D^{1.01}}\dfrac{b_p\log p}{p^s}$. 如果 $L(s,\chi)(\chi\ne\chi_0)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\tau_\chi$, 其中 $\dfrac{1}{20}\le\lambda\le\dfrac{1}{3}$. 令 $s^*=\beta_\chi+\dfrac{a_{\lambda,1}}{\log D}+i\tau_\chi$, 则当 $\dfrac{1}{20}\le\lambda\le\dfrac{1}{3}$ 时，有

$$|f_1(s^*)|\ge\left(\frac{1}{a_{\lambda,1}}-2.879\right)(\log D).$$

证. 由引理 17 及

$$\left|\sum_{\substack{n=p^a\\a\ge2}}\frac{b_n\Lambda(n)}{n^{s^*}}\right|+\left|\sum_{p<D^{1.01}}\frac{b_p\log p}{p^{s^*}}\right|\le2.024\log D,$$

即得到引理 18 的证明.

令

$$a_{\lambda,2}=\begin{cases}0.361, & 当\dfrac{1}{20}\le\lambda\le\dfrac{1}{4};\\ 0.005, & 当\dfrac{1}{4}<\lambda\le\dfrac{1}{3};\end{cases}\qquad a_{\lambda,3}=\begin{cases}6, & 当\dfrac{1}{20}\le\lambda\le\dfrac{1}{12}时;\\ 7, & 当\dfrac{1}{12}<\lambda\le\dfrac{1}{5}时;\\ 8, & 当\dfrac{1}{5}<\lambda\le\dfrac{1}{4}时;\\ 12, & 当\dfrac{1}{4}<\lambda\le\dfrac{1}{3}时;\end{cases}$$

$$a_{\lambda,4}=\begin{cases}0.31, & 当\dfrac{1}{20}\le\lambda\le\dfrac{1}{5};\\ 0.27, & 当\dfrac{1}{5}<\lambda\le\dfrac{1}{4};\\ 0.005, & 当\dfrac{1}{4}<\lambda\le\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

引理 19. 如果 $L(s,\chi)(\chi\ne\chi_0)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\tau_\chi$, 其中 λ 满足 $\dfrac{1}{20}\le\lambda\le\dfrac{1}{3}$. 设 $\delta_1\le\dfrac{a_{\lambda,2}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2}{\log D}$, 则下面二个式子中至少有一个能够成立.

$$\sum_{\substack{D^{1.01}\le p\le D^{3(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{1}{p}\ge0.7e(a_{\lambda,1}-\lambda)a_{\lambda,4},\tag{34}$$

$$\sum_{\substack{D^{1.01}\le p\le D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{1}{p}\ge 1.43(a_{\lambda,1}-\lambda)ea_{\lambda,4}. \tag{35}$$

证. 由于 λ 满足 $\frac{1}{20}\le\lambda\le\frac{1}{3}$ 及 $\delta_1\le\frac{a_{\lambda,2}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2}{\log D}$, 故当 $D^{1.01}\le p\le D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}$ 时，有

$$1-p^{-\delta_1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\delta_1\log p)^n}{n!}\le\frac{a_{\lambda,2}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2\log p}{\log D},$$

因而由引理 16, 18 和 $\mathrm{Re}\, s^*\ge 1+\eta_\lambda$, 有

$$\begin{aligned}
&2\sum_{\substack{D^{1.01}\le p\le D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{\log p}{p^{1+\eta_\lambda}}\\
&\ge\left(\frac{1}{a_{\lambda,1}}-2.88\right)(\log D)-2\sum_{p>D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}}\frac{\log p}{p^{1+\eta_\lambda}}\\
&\quad-\frac{a_{\lambda,2}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2}{\log D}\sum_{D^{1.01}<p\le D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}}\frac{\log^2 p}{p^{1+\eta_\lambda}}\\
&\ge\left(\frac{1}{a_{\lambda,1}}-2.88-\frac{2.02}{(a_{\lambda,1}-\lambda)e^{a_{\lambda,3}}}-a_{\lambda,2}\right)(\log D)\\
&>2a_{\lambda,4}\log D.
\end{aligned}\tag{36}$$

令 $f(t)=\frac{\log t}{t^{\eta_\lambda}}$, 则当 $t\ge 1$ 时，有 $f(t)\le\frac{1}{e\eta_\lambda}$ 而当 $t>e^{3/\eta_\lambda}$ 时，有 $f(t)\le\frac{3}{\eta_\lambda e^3}$. 如

$$\sum_{\substack{D^{3(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}<p\le D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{\log p}{p^{1+\eta_\lambda}}\le 0.3a_{\lambda,4}\log D$$

成立，则由 (36) 式，有

$$\sum_{\substack{D^{1.01}\le p\le D^{3(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{\log p}{p^{1+\eta_\lambda}}\ge 0.7a_{\lambda,4}\log D,$$

即得到 (34) 式成立. 如果

$$\sum_{\substack{D^{3(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}<p\le D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{\log p}{p^{1+\eta_\lambda}}\ge 0.3a_{\lambda,4}\log D,$$

则由 (36) 式，有

$$\sum_{\substack{D^{1.01}\le p\le D^{a_{\lambda,3}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{1}{p}\ge e\left(\frac{e^2}{10}+0.7\right)a_{\lambda,4}(a_{\lambda,1}-\lambda),$$

故 (35) 式成立，因此引理 19 得到证明.

引理 20. 如果 $L(s,\chi)(\chi\ne\chi_0)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\tau_\chi\ne\rho_1$, 其中 $\frac{1}{20}\le\lambda\le\frac{1}{3}$, 令 $\delta_1=1-\rho_1$ 设 $\delta_1\le\frac{a_{\lambda,2}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2}{\log D}$, 则有

$$L(1,\chi_1)\ge\frac{2.799ea_{\lambda,4}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2W}{a_{\lambda,3}\log D},$$

其中 $W=\sum_{1\le n\le D^{1.01}}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{d|n}\chi_1(d)\right)$.

证. 令

$$a_{\lambda,5}=\begin{cases}a_{\lambda,3}, & \text{当 (35) 式成立时,}\\ 3, & \text{当 (35) 式不成立时.}\end{cases}$$

令 $g(n)=\sum_{d|n}\chi_1(d)$, 则由资料 [5] 中的 (7.12) 式，有

$$L(1,\chi_1)\ge(a_{\lambda,1}-\lambda)(a_{\lambda,5}\log D)^{-1}\sum_{D^{1.01}\le n\le D^{1.01+a_{\lambda,5}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}}\frac{g(n)}{n}-|O(D^{-0.001})|. \tag{37}$$

又有

$$\sum_{D^{1.01}\le n\le D^{1.01+a_{\lambda,5}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}}\frac{g(n)}{n}\ge 2W\sum_{\substack{D^{1.01}<p\le D^{a_{\lambda,5}(a_{\lambda,1}-\lambda)^{-1}}\\ \chi_1(p)=1}}\frac{1}{p},$$

因而由引理 19 和 (37) 式，即得到引理 20 的证明.

引理 21. 如 $L(s,\chi)$ 在正方形 $R_\lambda(t_0)$ 内有一个零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\tau_\chi\ne\rho_1$,

其中 λ 满足 $\frac{1}{20} \le \lambda \le \frac{1}{3}$, 则有 $\delta_1 \ge \frac{a_{\lambda,6}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2}{\log D}$, 其中,

$$a_{\lambda,6} = \begin{cases} 0.36, & \text{当 } \frac{1}{20} \le \lambda \le \frac{1}{12} \text{ 时;} \\ 0.32, & \text{当 } \frac{1}{12} < \lambda \le \frac{1}{5} \text{ 时;} \\ 0.25, & \text{当 } \frac{1}{5} < \lambda \le \frac{1}{4} \text{ 时;} \\ 0.003, & \text{当 } \frac{1}{4} < \lambda \le \frac{1}{3} \text{ 时.} \end{cases}$$

证. 当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时有

$$\zeta(s)L(s,\chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

令 $\alpha = D^{-0.48}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-\rho_1}e^{-n\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \alpha^{\rho_1-\omega}\Gamma(\omega-\rho_1)\zeta(\omega)L(\omega,\chi_1)d\omega$$
$$= \alpha^{-\delta_1}\Gamma(\delta_1)L(1,\chi_1) + |O(D^{-\frac{1}{20}})|.$$

当 $1 \le n \le D^{0.48}$ 时, $n^{\delta_1} \le 1.01$. 因而由 $g(1)=1$, 我们有

$$\begin{aligned} W &\ge \left(\frac{1}{1.01}\right)\sum_{1\le n\le D^{1.01}} \frac{g(n)}{n^{1-\delta_1}e^{\alpha n}} \\ &\ge \left(\frac{1}{1.01}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-\rho_1}e^{-\alpha n} - |O(D^{-\frac{1}{20}})|\right) \\ &\ge \left(\frac{1}{1.01}\right)(\alpha^{-\delta_1}\Gamma(\delta_1)L(1,\chi_1) - |O(D^{-\frac{1}{20}})|) \ge \frac{L(1,\chi_1)}{1.02\delta_1} \\ &\ge \frac{2.799a_{\lambda,4}e(a_{\lambda,1}-\lambda)^2W}{1.02\delta_1 a_{\lambda,3}\log D}. \end{aligned}$$

由于 $W > 0$, 故有

$$\delta_1 \ge \frac{2.799a_{\lambda,4}e(a_{\lambda,1}-\lambda)^2}{1.02a_{\lambda,3}\log D} \ge \frac{a_{\lambda,6}(a_{\lambda,1}-\lambda)^2}{\log D}.$$

故引理 21 得证.

引理 22. 假定存在一个除外零点 $\rho_1 = 1 - \delta_1$. 又设 $L(s, \chi)$ 有一个零点

$$\rho_\chi = 1 - \frac{\lambda}{\log D} + it_0,$$

则当 $\frac{1}{3} \le \lambda \le 5$ 时，有

$$\delta_1 \ge b_{1\lambda}^{-1} e^{-b_{2\lambda}\lambda} (\log D)^{-1}.$$

其中

$$b_{1\lambda} = \begin{cases} (25)(10^4), & \text{当 } \frac{1}{3} \le \lambda \le 0.49 \text{ 时}; \\ (4)(10^5), & \text{当 } 0.49 < \lambda \le 1.3 \text{ 时}; \\ (12)(10^5), & \text{当 } 1.3 < \lambda \le 5 \text{ 时}; \end{cases}$$

$$b_{2\lambda} = \begin{cases} 58, & \text{当 } \frac{1}{3} \le \lambda \le 0.49 \text{ 时}; \\ 61, & \text{当 } 0.49 < \lambda \le 0.82 \text{ 时}; \\ 63, & \text{当 } 0.82 < \lambda \le 1.3 \text{ 时}; \\ 67, & \text{当 } 1.3 < \lambda \le 2.1 \text{ 时}; \\ 71, & \text{当 } 2.1 < \lambda \le 3.2 \text{ 时}; \\ 75, & \text{当 } 3.2 < \lambda \le 4.5 \text{ 时}; \\ 76, & \text{当 } 4.5 < \lambda \le 5 \text{ 时}. \end{cases}$$

证. 在引理 10 和引理 13 中取

$$A = \begin{cases} 1.05 \log D, & \text{当 } \frac{1}{3} \le \lambda \le 0.49 \text{ 时}; \\ 0.71 \log D, & \text{当 } 0.49 < \lambda \le 0.82 \text{ 时}; \\ 0.42 \log D, & \text{当 } 0.82 < \lambda \le 1.3 \text{ 时}; \\ 0.27 \log D, & \text{当 } 1.3 < \lambda \le 2.1 \text{ 时}; \\ 0.176 \log D, & \text{当 } 2.1 < \lambda \le 3.2 \text{ 时}; \\ 0.141 \log D, & \text{当 } 3.2 < \lambda \le 4.5 \text{ 时}; \\ 0.131 \log D, & \text{当 } 4.5 < \lambda \le 5 \text{ 时}; \end{cases}$$

$$\alpha=\begin{cases}1.145, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 0.49\ 时;\\ 1.19, & 当\ 0.49<\lambda\le 0.82\ 时;\\ 1.28, & 当\ 0.82<\lambda\le 1.3\ 时;\\ 1.44, & 当\ 1.3<\lambda\le 2.1\ 时;\\ 1.67, & 当\ 2.1<\lambda\le 3.2\ 时;\\ 1.83, & 当\ 3.2<\lambda\le 4.5\ 时;\\ 1.891, & 当\ 4.5<\lambda\le 5\ 时.\end{cases}$$

又令

$$\kappa=\begin{cases}2(1.05\lambda)^{-1}, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 0.49\ 时;\\ 2(0.71\lambda)^{-1}, & 当\ 0.49<\lambda\le 0.82\ 时;\\ 2(0.42\lambda)^{-1}, & 当\ 0.82<\lambda\le 1.3\ 时;\\ 2(0.27\lambda)^{-1}, & 当\ 1.3<\lambda\le 2.1\ 时;\\ 2(0.176\lambda)^{-1}, & 当\ 2.1<\lambda\le 3.2\ 时;\\ 2(0.141\lambda)^{-1}, & 当\ 3.2<\lambda\le 4.5\ 时;\\ 2(0.131\lambda)^{-1}, & 当\ 4.5<\lambda\le 5\ 时;\end{cases}$$

$$k_0=\begin{cases}7, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 0.49\ 时;\\ 8, & 当\ 0.49<\lambda\le 0.82\ 时;\\ 9, & 当\ 0.82<\lambda\le 5\ 时.\end{cases}$$

此时我们有 $\kappa\ge\sqrt{5}$ 及 $(\alpha-1)k_0A\ge 1.05\log D$. 我们先考虑哪些 χ 使得 $f(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{\mu}{A}\le\sigma\le 1,\quad |t-t_0|\le\frac{7}{A}$$

内没有 $f(s,\chi)$ 的零点，其中

$$\mu=\begin{cases}\frac{1}{2.93}, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 3.6\ 时,\\ \frac{1}{2}, & 当\ 3.6<\lambda\le 5\ 时,\end{cases}$$

及 $L(\rho_\chi,\chi)=0$, 其中 $\rho_\chi=1-\frac{\lambda}{\log D}+it_0$. 在引理 11 中取 $\overline{\lambda}=M_\lambda$, $m=7$, 因而 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\begin{aligned}&1-\frac{2.4}{A}\le\sigma\le 1-\frac{2}{A},\quad |t-t_0|<\frac{1.2}{A};\quad 1-\frac{2}{A}<\sigma\le 1-\frac{\mu}{A},\\ &|t-t_0|<\frac{2.1}{A};\quad 1-\frac{1.3}{A}<\sigma\le 1-\frac{\mu}{A},\quad \frac{2.1}{A}\le|t-t_0|\le\frac{2.4}{A}\end{aligned}\tag{38}$$

内的零点数目

$$\leq N_\lambda = \left[\left(0.611 + \frac{0.25}{0.611}\right)\left(0.4265M_\lambda + \frac{100}{34} - \frac{0.34 + \frac{1}{7}}{\left(0.34 + \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{0.25}{49}}\right)\right] + 1.$$

其中

$$M_\lambda = \begin{cases} 4.58, & \text{当 } \frac{1}{3} \leq \lambda \leq 0.49 \text{ 时；} \\ 6.8, & \text{当 } 0.49 < \lambda \leq 0.82 \text{ 时；} \\ 11.43, & \text{当 } 0.82 < \lambda \leq 1.3 \text{ 时；} \\ 17.9, & \text{当 } 1.3 < \lambda \leq 2.1 \text{ 时；} \\ 27.3, & \text{当 } 2.1 < \lambda \leq 3.2 \text{ 时；} \\ 34.05, & \text{当 } 3.2 < \lambda \leq 4.5 \text{ 时；} \\ 36.65, & \text{当 } 4.5 < \lambda \leq 5 \text{ 时.} \end{cases}$$

在引理 12 中取 $\overline{\lambda} = M_\lambda$, 因而 $L(s + \delta_1, \chi\chi_1)$ 在区域 (38) 式内的零点数目

$$\leq N'_\lambda = \left[\left(0.611 + \frac{0.25}{0.611}\right)\left(0.4265M_\lambda + \frac{100}{34}\right)\right],$$

故得 $f(s, \chi)$ 在区域 (38) 式内的零点数目 $\leq N_\lambda + N'_\lambda$. 现在资料 [5] 的引理 6 中取

$$z_j = \left(\frac{K_1(\rho - 1 - it_0)}{K_1(\rho_\chi - 1 - it_0)}\right)^{k_0},$$

其中 ρ 是经过 $f(s, \chi)$ 在区域 (38) 式内的零点，由该引理知道存在一个 l, $1 \leq l \leq N_\lambda + N'_\lambda$, 并满足

$$\left|\sum_\rho{}^{(\mu)}\left(\frac{K_1(\rho - 1 - it_0)}{K_1(\rho_\chi - 1 - it_0)}\right)^{lk_0}\right| \geq \frac{1}{3}, \tag{39}$$

其中 $\sum_\rho^{(\mu)}$ 是表示和式中的 ρ 经过区域 (38) 式内所有 $f(s, \chi)$ 的零点. 令

$$b_{3\lambda} = \begin{cases} 1.203, & \text{当 } \frac{1}{3} \leq \lambda \leq 0.49 \text{ 时；} \\ 0.8449, & \text{当 } 0.49 < \lambda \leq 0.82 \text{ 时；} \\ 0.5376, & \text{当 } 0.82 < \lambda \leq 1.3 \text{ 时；} \\ 0.3888, & \text{当 } 1.3 < \lambda \leq 2.1 \text{ 时；} \\ 0.294, & \text{当 } 2.1 < \lambda \leq 3.2 \text{ 时；} \\ 0.2581, & \text{当 } 3.2 < \lambda \leq 4.5 \text{ 时；} \\ 0.2478, & \text{当 } 4.5 < \lambda \leq 5 \text{ 时；} \end{cases}$$

$$b_{4\lambda}=\begin{cases}4, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 0.49\ 时;\\ 8, & 当\ 0.49<\lambda\le 0.82\ 时;\\ 23, & 当\ 0.82<\lambda\le 1.3\ 时;\\ 55, & 当\ 1.3<\lambda\le 2.1\ 时;\\ 130, & 当\ 2.1<\lambda\le 3.2\ 时;\\ 202, & 当\ 3.2<\lambda\le 4.5\ 时;\\ 234, & 当\ 4.5<\lambda\le 5\ 时.\end{cases}$$

由引理 10 和 (39) 式有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\rho}^{(\mu)}(K_1(\rho-1-it_0))^{lk_0}\right| &\ge \left(\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{2la k_0}{\kappa}}\left(0.9997+\frac{1}{2\kappa^2}-\frac{7}{120\kappa^4}\right)^{lk_0}\\ &\ge \left(\frac{1}{3}\right)e^{-b_{3\lambda}lk_0\lambda}\left(0.9997+\frac{\lambda^2}{2b_{4\lambda}}-\frac{7\lambda^4}{120(b_{4\lambda})^2}\right)^{lk_0} \qquad (40)\end{aligned}$$

令

$$b_{5\lambda}=\begin{cases}22, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 0.49\ 时;\\ 14, & 当\ 0.49<\lambda\le 0.82\ 时;\\ 12, & 当\ 0.82<\lambda\le 1.3\ 时;\\ 5, & 当\ 1.3<\lambda\le 2.1\ 时;\\ 1.5, & 当\ 2.1<\lambda\le 3.2\ 时;\\ 0.5, & 当\ 3.2<\lambda\le 4.5\ 时;\\ 0.26, & 当\ 4.5<\lambda\le 5\ 时;\end{cases}\qquad b_{6\lambda}=\begin{cases}4.47, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 3.6\ 时;\\ 4.73, & 当\ 3.6<\lambda\le 5\ 时.\end{cases}$$

我们用 N_{00} 表示 $f(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{1}{A}\le\sigma\le 1,\quad t_0+\frac{2.4}{A}\le t\le t_0+\frac{3.4}{A}$$

内的零点数目，则

$$N_{00}\le\begin{cases}4, & 当\ \frac{1}{3}\le\lambda\le 0.49\ 时;\\ 6, & 当\ 0.49<\lambda\le 0.82\ 时;\\ 8, & 当\ 0.82<\lambda\le 1.3\ 时;\\ 10, & 当\ 1.3<\lambda\le 2.1\ 时;\\ 14, & 当\ 2.1<\lambda\le 3.2\ 时;\\ 16, & 当\ 3.2<\lambda\le 5\ 时;\end{cases}$$

$$N_\lambda + N'_\lambda \leq \begin{cases} 7, & 当 \frac{1}{3} \leq \lambda \leq 0.49 时; \\ 9, & 当 0.49 < \lambda \leq 0.82 时; \\ 13, & 当 0.82 < \lambda \leq 1.3 时; \\ 19, & 当 1.3 < \lambda \leq 2.1 时; \\ 27, & 当 2.1 < \lambda \leq 3.2 时; \\ 33, & 当 3.2 < \lambda \leq 4.5 时; \\ 35, & 当 4.5 < \lambda \leq 5 时. \end{cases}$$

由资料 [5] 中的 (7.5) 式及相似于引理 13 的证明可得到

$$\left|\sum_\rho^{(\mu)} (K_1(\rho - 1 - it_0))^{lk_0}\right| \leq |J_{k_0 l}(\chi, t_0)| + b_{5\lambda} N_{00}(b_{6\lambda})^{-k_0 l} + |O(D^{-1})|,$$

其中,

$$J_k(\chi, t_0) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} (K_1(\omega))^k \frac{f'}{f}(\omega + 1 + it_0, \chi) d\omega.$$

因此由 (40) 式，有

$$3e^{b_{3\lambda} lk_0 \lambda}(|J_{k_0 l}(\chi, t_0)| + b_{5\lambda} N_{00}(b_{6\lambda})^{-k_0 l} + |O(D^{-1})|) \cdot \left(0.9997 + \frac{\lambda^2}{2b_{4\lambda}} - \frac{7\lambda^4}{(120)(b_{4\lambda})^2}\right)^{-lk_0} \geq 1. \tag{41}$$

令

$$b_{7\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 当 \frac{1}{3} \leq \lambda \leq 4时, \\ 0.75, & 当 4 < \lambda \leq 5时, \end{cases}$$

则当 $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 5$ 时，有

$$3b_{5\lambda} N_{00} e^{(b_{3\lambda}\lambda - \log b_{6\lambda})k_0}\left(0.9997 + \frac{\lambda^2}{2b_{4\lambda}} - \frac{7\lambda^4}{(120)(b_{4\lambda})^2}\right)^{-k_0} \leq b_{7\lambda}.$$

由 (41) 式，有

$$\begin{aligned} |J_{k_0 l}(\chi, t_0)| &\geq \left(\frac{1 - b_{7\lambda}}{3.1}\right) e^{-b_{3\lambda} lk_0 \lambda}\left(0.9997 + \frac{\lambda^2}{2b_{4\lambda}} - \frac{7\lambda^4}{(120)(b_{4\lambda})^2}\right)^{lk_0} \\ &\geq \left(\frac{1 - b_{7\lambda}}{3.1}\right) e^{-b_{2\lambda}\lambda}. \end{aligned}$$

因而由资料 [5] 中的 (7.17) 式，有

$$\begin{aligned}\delta_1 &\geq (\alpha+1)^{-1}\{k_0(N_\lambda+N'_\lambda)\}^{-1/2}\left(\frac{37.5k_0(N_\lambda+N'_\lambda)A}{\log D}+32.2\right)^{-1}\\&\quad\cdot\left(\frac{1-b_{7\lambda}}{3.1}\right)e^{-b_{2\lambda}\lambda}(\log D)^{-1}\\&\geq b_{1\lambda}^{-1}e^{-b_{2\lambda}\lambda}(\log D)^{-1}.\end{aligned}$$

由引理 21 和归纳法引理 22 得证.

引理 23. 假定存在一个除外零点 $\rho_1=1-\delta_1$. 又设 $L(s,\chi)$ 有一个零点

$$\rho_\chi=1-\frac{\lambda}{\log D}+it_0,$$

则当 $\lambda>5$ 时有

$$\delta_1\geq e^{-81\lambda}(\log D)^{-1}.$$

证. 在引理 10 和引理 13 中取 $\alpha=1.06$, $A=\dfrac{2\log D}{5\lambda}$, 先假定在区域

$$1-\frac{1}{2.7A}\leq\sigma\leq 1,\quad |t-t_0|\leq\frac{7}{A}$$

内没有 $f(s,\chi)$ 的零点，但 $L(\rho_\chi,\chi)=0$. 其中 $\rho_\chi=1-\dfrac{\lambda}{\log D}+it_0$. 在引理 11 中取 $\overline{\lambda}=12\lambda$, $m=12$ 就得到 $L(s,\chi)$ 在区域

$$\begin{aligned}&1-\frac{2.4}{A}\leq\sigma\leq 1-\frac{2}{A},\quad |t-t_0|<\frac{1.2}{A};\quad 1-\frac{2}{A}<\sigma\leq 1-\frac{1}{2.7A},\\&|t-t_0|<\frac{2.1}{A};\quad 1-\frac{1.3}{A}<\sigma\leq 1-\frac{1}{2.7A},\quad \frac{2.1}{A}\leq|t-t_0|\leq\frac{2.4}{A}\end{aligned}\tag{42}$$

内的零点数目

$$\leq N_\lambda=\left(0.611+\frac{0.25}{0.611}\right)\left((0.4265)(12\lambda)+\frac{100}{34}-\frac{0.34+\frac{1}{12}}{\left(0.34+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{0.25}{144}}\right)+1.$$

又在引理 12 中取 $\overline{\lambda}=12\lambda$, 就得到 $L(s+\delta_1,\chi\chi_1)$ 在区域 (42) 式内的零点数目

$$\leq N'_\lambda=\left(0.611+\frac{0.25}{0.611}\right)\left((0.4265)(12\lambda)+\frac{100}{34}\right).$$

因而 $f(s,\chi)$ 在区域 (42) 式内的零点数目 $\le N''_\lambda = N_\lambda + N'_\lambda$. 现将资料 [5] 的引理 5 中，取 z_j 为 $\dfrac{K_1(\rho-1-it_0)}{K_1(\rho_\chi-1-it_0)}$, 取 $N_1 = N''_\lambda$, $m = [4.35N''_\lambda]$, 而由该引理我们知道存在一个整数 k 于区间 $4.35N''_\lambda \le k \le 5.35N''_\lambda$ 中，并使得

$$\left|\sum_\rho{}^{(\frac{1}{2.7})}\left(\frac{K_1(\rho-1-it_0)}{K_1(\rho_\chi-1-it_0)}\right)^k\right| \ge (42.8e)^{-N''_\lambda}. \tag{43}$$

而 $\sum_\rho^{(\frac{1}{2.7})}$ 中的 ρ 是经过 $f(s,\chi)$ 在区域 (42) 式中的所有零点. 由于 $\lambda \ge 5$, 故有 $N''_\lambda \ge 52$, $(\alpha-1)kA \ge 1.09\log D$. 用资料 [5] 中的 (7.5) 式及相似于引理 13 的证明方法，有

$$\left|\sum_\rho{}^{(\frac{1}{2.7})}(K_1(\rho-1-it_0))^k\right| \le |J_k(\chi,t_0)| + 3.5N_{00}e^{-k\log 4.64} + |o(D^{-1})|. \tag{44}$$

由 (43), (44) 式和引理 10, 有

$$1 \le (42.8e)^{N''_\lambda}e^{0.424k-k\log 1.019}(|J_k(\chi,t_0)| + 3.5N_{00}e^{-k\log 4.64} + |o(D^{-1})|.$$

令 $k = \omega' N''_\lambda$, 则 $4.35 \le \omega' \le 5.35$. 由于 $N''_\lambda \ge 52, N_{00} \le e^{0.07N''_\lambda}$. 故有

$$3.5N_{00}e^{-k\log 4.64}(42.8e)^{N''_\lambda}e^{0.424k-k\log 1.019} \le e^{-0.056N''_\lambda} \le 0.08.$$

因而 $|J_k(\chi,t_0)| \ge 0.9e^{-\{1+\log 42.8+(0.424-\log 1.019)(5.35)\}N''_\lambda} \ge 0.9e^{-6.925N''_\lambda}$. 由于 $N'_\lambda \le 5.23\lambda + 3.001$, $N''_\lambda \le 10.46\lambda + 4.621$, 故有

$$|J_k(\chi,t_0)| \ge 0.9e^{-72.44\lambda-32.01}.$$

我们有

$$k \le 56\lambda + 25, \quad \frac{kA}{\log D} \le 22.4 + \frac{10}{\lambda}.$$

由 $\lambda \ge 5$ 和资料 [5] 中的 (7.17) 式，我们有

$$\begin{aligned}\delta_1 &\ge (2.1)^{-1}(56\lambda+25)^{-1/2}\{(37.5)(22.4+2)+32.2\}^{-1} \\ &\quad \cdot(1.2)^{-1}e^{-72.44\lambda-32.01}(\log D)^{-1} \\ &\ge e^{-81\lambda}(\log D)^{-l}.\end{aligned}$$

由引理 22 和归纳法得到引理 23.

先令

$$H(\omega)=e^{83\omega\log D}\left(\frac{e^{\omega\log D}-e^{-\omega\log D}}{2\omega\log D}\right).$$

引理 24. 设 $\omega=\dfrac{-\lambda+i\tau}{\log D}$, 则当 $\dfrac{1}{20}\leq\lambda\leq 0.1, |\tau|\leq\dfrac{1}{2}$ 时，有 $|H(\omega)|^2\leq 1.035e^{-164\lambda}$; 当 $\lambda>0$ 时，有

$$|H(\omega)|^2=\frac{1+e^{-4\lambda}-2e^{-2\lambda}\cos 2\tau}{4(\lambda^2+\tau^2)e^{164\lambda}};$$

当 $0<\lambda\leq\dfrac{1}{2}, \tau=0$ 时，有 $|H(\omega)|^2\leq e^{-164\lambda}$; 当 $0<\lambda\leq\dfrac{1}{2}, |\tau|\leq 1$ 时，有

$$|H(\omega)|^2\leq(1+e^{-2\lambda})e^{-164\lambda}.$$

证. 当 $\dfrac{1}{20}\leq\lambda\leq 0.1, |\tau|\leq\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}|H(\omega)|^2&=e^{-164\lambda}\left(\left|\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(2\omega\log D)^{v-1}}{v!}\right|\right)^2\\&\leq e^{-164\lambda}\left\{\left|1-\lambda+i\tau+\left(\frac{2}{3}\right)(\lambda^2-\tau^2-2\lambda\tau i)\right|+\sum_{v=4}^{\infty}\frac{(1.04)^{\frac{v-1}{2}}}{v!}\right\}^2\\&\leq c^{-164\lambda}\left\{\left(\left(0.96-\frac{2\tau^2}{3}\right)^2+\tau^2\right)^{1/2}+0.057\right\}^2\\&\leq 1.035e^{-164\lambda},\end{aligned}$$

其中用到 $|2\omega\log D|\leq(1.04)^{1/2}$.

当 $\lambda>0$ 时，有

$$\begin{aligned}|H(\omega)|^2&=e^{-164\lambda}|e^{-2\lambda+2i\tau}-1|^2\{4(\lambda^2+\tau^2)\}^{-1}\\&=e^{-164\lambda}(1+e^{-4\lambda}-2e^{-2\lambda}\cos 2\tau)\{4(\lambda^2+\tau^2)\}^{-1}.\end{aligned}$$

当 $0<\lambda\leq\dfrac{1}{2}, \tau=0$ 时，由于 $\dfrac{1+e^{-4\lambda}-2e^{-2\lambda}}{4\lambda^2}=\dfrac{(1-e^{-2\lambda})^2}{4\lambda^2}\leq 1$, 因而

$$|H(\omega)|^2\leq e^{-164\lambda}.$$

当 $0<\lambda\leq\dfrac{1}{2}, |\tau|\leq 1$ 时，由于 $\cos 2\tau\geq 1-\dfrac{(2\tau)^2}{2}$, 因而

$$|H(\omega)|^2\leq(1+e^{-2\lambda})e^{-164\lambda},$$

故引理 24 得证.

三. 定理的证明

定理 1. 我们有 $P(D,k) \ll D^{168}$.

证. 令

$$R(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} H^2(\omega)e^{-\omega\log n}d\omega,$$

$$J(\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} H^2(\omega)\frac{L'}{L}(\omega+1,\chi)d\omega.$$

由资料 [4] 知道, $n < D^{164}$ 或 $n > D^{168}$ 时, 都有 $R(n)=0$, 而当 $D^{164} \le n \le D^{168}$ 时, 则有

$$R(n) \ll \frac{1}{\log D}.$$

令

$$E_0 = \begin{cases} 1, & \text{当 } \chi = \chi_0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \chi \ne \chi_0 \text{ 时,} \end{cases}$$

则有

$$J(\chi) = \sum_{D^{164}\le n\le D^{168}} \frac{\Lambda(n)\chi(n)R(n)}{n},$$

及

$$J(\chi) = E_0 - \sum_{\rho_\chi} H^2(\rho_\chi - 1) + O(D^{-2}),$$

其中 ρ_χ 经过 $L(s,\chi)$ 的非明显零点, 因而

$$\sum_{\substack{D^{164}\le n\le D^{168}\\ n\equiv k(\mathrm{mod}\ D)}} \frac{\Lambda(n)R(n)}{n} = \left(\frac{1}{\varphi(D)}\right)\left\{1 - \sum_{\chi \bmod D}\overline{\chi}(k)\sum_{\rho_\chi} H^2(\rho_\chi-1)\right\} + O(D^{-2}).$$

要证明 $P(D,k) \ll D^{168}$, 只需证明

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H(\rho_\chi-1)|^2 < 1 - D^{-1/2} \tag{45}$$

成立.

我们分为四种情况来证明 (45) 式成立.

(1) 假定存在一个模 D 的特征 χ, 它使得 $L(s,\chi)$ 有一个零点 ρ_χ 满足

$$1-\frac{0.066}{\log D}\leq \operatorname{Re}\rho_\chi \leq 1-\frac{0.05}{\log D},\quad |\operatorname{Im}\rho_\chi|\leq D^{\varepsilon}.$$

由引理 21 我们有

$$\delta_1\geq (0.36)\left(\frac{1}{3.9}-0.066\right)^2(\log D)^{-1}\geq 0.013(\log D)^{-1}.$$

因而由引理 24, 有

$$|H(\rho_1-1)|^2\leq e^{-(164)(0.013)}\leq 0.119. \tag{46}$$

令

$$N(\lambda,\tau_1,\tau_2)=\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 1-\lambda(\log D)^{-1}\leq\beta_\chi\leq 1\\ \rho_\chi\neq\rho_1\ \tau_1(\log D)^{-1}\leq|\gamma_\chi|\leq\tau_2(\log D)^{-1}}}1,$$

由引理 4,6,24 和资料 [5] 中的引理 3b, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 1-\frac{0.09}{\log D}\leq\beta_\chi\leq 1\\ \rho_\chi\neq\rho_1\ |\gamma_\chi|\leq 0.4745/\log D}}|H(\rho_\chi-1)|^2\\
&\leq 1.035\int_{0.05}^{0.09}e^{-164\lambda}dN(\lambda,0,0.4745)\\
&\leq (1.035)(10.36)e^{-(164-18.2)(0.09)}\left(\frac{0.4745}{0.0365}\right)(2)\\
&\quad+(1.035)(164)(10.36)\left(\frac{0.4745}{0.0365}\right)(2)\int_{0.05}^{\infty}e^{-(164-18.2)\lambda}d\lambda\\
&\leq 0.2146.
\end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 1-(0.09)(\log D)^{-1}\leq\beta_\chi\leq 1\\ |\gamma_\chi|\geq 0.4745/\log D}}|H(\rho_\chi-1)|^2\\
&\leq\sum_{v=13}^{30}\frac{1+e^{-0.2}-2e^{-0.1}\cos(0.073(v+1))}{4(0.0365v)^2}\\
&\quad\cdot\int_{0.05}^{0.09}e^{-164\lambda}dN(\lambda,0.0365v,0.0365(v+1))\\
&\quad+\sum_{v\geq 31}\frac{1+e^{-0.2}+2e^{-0.1}}{4(0.0365v)^2}\int_{0.05}^{0.09}e^{-164\lambda}dN(\lambda,0.0365v,0.0365(v+1))
\end{aligned}$$

$$\leq (187.7)\left\{\sum_{v=13}^{30}\left(\frac{1}{v}\right)^2(1.819-1.8097\cos(0.073+0.073v))+\sum_{v\geq 31}\frac{3.629}{v^2}\right\}$$
$$\cdot\left\{(2)(10.36)e^{-(164-18.2)(0.09)}+(2)(10.36)(164)\int_{0.05}^{\infty}e^{-(164-18.2)\lambda}d\lambda\right\}$$
$$\leq (187.7)(0.07811+0.12097)(0.016)$$
$$\leq 0.5979. \tag{48}$$

由引理 6,9,14,15,24 及 [5] 中的引理 3a 和 3b, 得到

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\leq 1-\frac{0.09}{\log D}\\ |\gamma_\chi|\leq(\log D)^{-1}}}|H(\rho_\chi-1)|^2$$
$$\leq (1+e^{-0.18})\int_{0.09}^{\infty}e^{-164\lambda}dN(\lambda,0,1)$$
$$\leq (302)\left(\int_{0.09}^{\frac{1}{3}}2\left(1+\frac{1}{0.09}\right)e^{-(164-75)\lambda}d\lambda+8\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}e^{-(164-94)\lambda}d\lambda\right)$$
$$\leq 0.028. \tag{49}$$

$$\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\leq 1-\frac{0.09}{\log D}\\ \frac{1+0.5v}{\log D}<|\gamma_\chi|\leq\frac{1.5+0.5v}{(\log D)}}}|H(\rho_\chi-1)|^2$$
$$\leq\left(\frac{1+e^{-0.36+2e^{-0.18}}}{4}\right)\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+0.5v}\right)^2$$
$$\cdot\int_{0.09}^{\infty}e^{-164\lambda}dN(\lambda,1+0.5v,1.5+0.5v)$$
$$\leq (140)\left(1+\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+0.5t)^2}\right)$$
$$\cdot\left\{\int_{0.09}^{\frac{1}{3}}e^{-(164-75)\lambda}2\left(1+\frac{0.5}{0.09}\right)d\lambda+6\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}e^{-(164-94)\lambda}d\lambda\right\}$$
$$\leq 0.025. \tag{50}$$

由 (46) – (50) 式可知 (45) 式成立.

(2) 假定不存在模 D 的特征 χ, 使得 $L(s,\chi)$ 有一个零点 ρ_χ 满足

$$1-\frac{0.066}{\log D}\leq \operatorname{Re}\rho_\chi<1-\frac{0.05}{\log D},\quad |\operatorname{Im}\rho_\chi|\leq D^{\varepsilon}.$$

但是存在有一个模 D 的特征 χ, 使得 $L(s,\chi)$ 有一个零点 ρ_χ 满足

$$1-\frac{0.18}{\log D}\le \operatorname{Re}\rho_\chi \le 1-\frac{0.066}{\log D},\quad |\operatorname{Im}\rho_\chi|\le D^{\varepsilon}.$$

由引理 21 我们有

$$\delta_1 \ge (0.32)\left(\frac{1}{3.9}-0.18\right)^2(\log D)^{-1}\ge \frac{0.0018}{\log D},$$

因而由引理 24, 有

$$|H(\rho_1-1)|^2\le e^{-164(0.0018)}\le 0.75. \tag{51}$$

由引理 6, 24 和资料 [5] 中的引理 3b, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 1-\frac{0.09}{\log D}\le\beta_\chi\le 1-\frac{0.066}{\log D}\\ |\gamma_\chi|\le 0.4745(\log D)^{-1}}}|H(\rho_\chi-1)|^2\\ &\le 1.035\int_{0.066}^{0.09}e^{-164\lambda}dN(\lambda,0,0.4745)\\ &\le (1.035)(10.36)(2)\left(\frac{0.4745}{0.0365}\right)e^{-(164-18.2)(0.09)}\\ &\quad +(1.035)(164)(2)(10.36)\left(\frac{0.4745}{0.0365}\right)\int_{0.066}^{\infty}e^{-(164-18.2)\lambda}d\lambda\\ &\le 0.022.\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 1-\frac{0.09}{\log D}\le\beta_\chi\le 1-\frac{0.066}{\log D}}|H(\rho_\chi-1)|^2\\ &\le \sum_{v\ge 13}\frac{1+e^{-0.26}+2e^{-0.13}}{4(0.0365v)^2}\int_{0.066}^{0.09}e^{-164\lambda}dN(\lambda.\,0.0365v,0.0365(v+1))\\ &\le (663)(164)\sum_{v\ge 13}\left(\frac{1}{v}\right)^2\int_{0.066}^{0.09}(2)(10.36)e^{-(164-18.2)\lambda}d\lambda\\ &\le 0.086.\end{aligned} \tag{53}$$

由 (49) – (53) 式可得 (45) 式成立.

(3) 假定不存在模 D 的特征 χ, 使得 $L(s,\chi)$ 有一个零点 ρ_χ 满足

$$1-\frac{0.18}{\log D}\le \operatorname{Re}\rho_\chi \le 1-\frac{0.05}{\log D},\quad |\operatorname{Im}\rho_\chi|\le D^{\varepsilon},$$

但是存在有一个模 D 的特征 χ, 使得 $L(s,\chi)$ 有一个零点满足

$$1-\frac{1}{3\log D}\le \operatorname{Re}\rho_\chi<1-\frac{0.18}{\log D},\quad |\operatorname{Im}\rho_\chi|\le D^{\varepsilon}.$$

由引理 21, 有

$$\delta_1\ge(0.003)\left(\frac{1}{2.9}-\frac{1}{3}\right)^2(\log D)^{-1}\ge\frac{3.9}{10^7 logD},$$

因而由引理 24, 得

$$|H(\rho_1-1)|^2\le e^{-(164)(3.9)(10^{-7})}\le 0.99995. \tag{54}$$

由引理 6,9,14,15,24 及资料 [5] 中的引理 3a 和 3b, 得

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi \bmod D}\ \sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\le 1-\frac{0.18}{\log D}\\ |\gamma_\chi|\le(\log D)^{-1}}}|H(\rho_\chi-1)|^2\le 2\int_{0.18}^{\infty}e^{-164\lambda}dN(\lambda,0,1)\\ &\le(330)\left\{\int_{0.18}^{\frac13}2\left(1+\frac{1}{0.18}\right)e^{-(164-75)\lambda}d\lambda+6\int_{\frac13}^{\infty}e^{-(164-94)\lambda}d\lambda\right\}\\ &\le 0.00001.\end{aligned}\tag{55}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{\chi \bmod D}\ \sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\le 1-\frac{0.18}{\log D}\\ \frac{1+0.5v}{\log D}<|\gamma_\chi|\le\frac{1.5+0.5v}{\log D}}}|H(\rho_\chi-1)|^2\\ &\le\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+0.5v}\right)^2\int_{0.18}^{\infty}e^{-164\lambda}dN(\lambda,1+0.5v,1.5+0.5v)\\ &\le(800)\left\{\int_{0.18}^{\frac13}2\left(1+\frac{0.5}{0.18}\right)e^{-(164-75)\lambda}d\lambda+6\int_{\frac13}^{\infty}e^{-(164-94)\lambda}d\lambda\right\}\\ &\le 0.00001.\end{aligned}\tag{56}$$

由 (54) - (56) 式可知, (45) 式成立.

(4) 假定不存在模 D 的特征 χ, 使得 $L(s,\chi)$ 有一个零点 ρ_χ 满足

$$1-\frac{1}{3\log D}\le \operatorname{Re}\rho_\chi\le 1-\frac{0.05}{\log D},\quad |\operatorname{Im}\rho_\chi|\le D^{\varepsilon}.$$

令

$$\lambda_1=\min_{\rho_\chi}(1-\operatorname{Re}\rho_\chi)(\log D),$$

其中 ρ_χ 经过 $L(s,\chi)$ 的所有非除外零点，并满足 $|\mathrm{Im}\,\rho_\chi|\le D^{\varepsilon}$. 现分为三种情况来证明 (45) 式成立.

1) 当 $\frac{1}{3}\le\lambda_1\le 0.49$ 时，由引理 22 有 $\delta_1\ge(25)^{-1}(10^{-4})e^{-58\lambda_1}(\log D)^{-1}$，因而由引理 24 可得

$$|H(\rho_1-1)|^2\le e^{-(164)(25)^{-1}(10^{-4})e^{-58\lambda_1}}\le 1-(0.0006)e^{-58\lambda_1}. \tag{57}$$

由引理 6, 9, 14, 15, 24 和资料 [5] 中的引理 3a 和 3b, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\le 1-\frac{\lambda_1}{\log D}\\ |\gamma_\chi|\le(\log D)^{-1}}}|H(\rho_\chi-1)|^2\\
&\le 2\int_{\lambda_1}^{\infty}e^{-164\lambda}dN(\lambda,0,1)\\
&\le(330)\Big(12\int_{\lambda_1}^{0.5}e^{-(164-60)\lambda}d\lambda+16\int_{0.5}^{1.25}e^{-(164-70)\lambda}d\lambda\\
&\quad+\int_{1.25}^{\infty}e^{-(164-94)\lambda}d\lambda\Big)\\
&\le 40e^{-104\lambda_1}+100e^{-47}\\
&\le(0.0001)(e^{-58\lambda_1}).
\end{aligned}\tag{58}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{\chi\bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\le 1-\frac{\lambda_1}{\log D}\\ (1+0.5v)(\log D)^{-1}<|\gamma_\chi|\le(1.3+0.5v)(\log D)^{-1}}}|H(\rho_\chi-1)|^2\\
&\le\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+0.5v}\right)^2\int_{\lambda_1}^{\infty}e^{-164\lambda}dN(\lambda,1+0.5v,1.5+0.5v)\\
&\le(164)(4)\Big\{\int_{\lambda_1}^{0.5}12e^{-(164-60)\lambda}d\lambda+\int_{0.5}^{1.25}16e^{-(164-70)\lambda}d\lambda\\
&\quad+\int_{1.25}^{\infty}e^{-(164-94)\lambda}d\lambda\Big\}\\
&\le(0.0003)(e^{-58\lambda_1}).
\end{aligned}\tag{59}$$

由 (57) – (59) 式可知， (45) 式成立.

2) 当 $0.49<\lambda_1\le 1.25$ 时，由引理 22 有

$$\delta_1\ge(4^{-1})(10^{-5})\left(\frac{e^{-63\lambda_1}}{\log D}\right),$$

因而由引理 24 可得到

$$|H(\rho_1-1)|^2 \le e^{-(164)(4^{-1})(10^{-5})e^{-63\lambda_1}} \le 1-(0.0004)(e^{-63\lambda_1}). \qquad (60)$$

由引理 6, 9, 14, 15, 24 和资料 [5] 中的引理 3a 和 3b, 有

$$\sum_{\chi \bmod D} \sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\le 1-\frac{\lambda_1}{\log D} \\ |\gamma_\chi|\le(\log D)^{-1}}} |H(\rho_\chi-1)|^2 \le 2\int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-164\lambda} dN(\lambda,0,1)$$

$$\le (2)(164)\left(\int_{\lambda_1}^{1.25} 20e^{-(164-70)\lambda}d\lambda + \int_{1.25}^{\infty}(20)e^{-(164-82)\lambda}d\lambda\right)$$

$$\le 80e^{-94\lambda_1} + 80e^{-(82)(1.25)}$$

$$\le (0.0001)(e^{-63\lambda_1}). \qquad (61)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{\chi \bmod D} \sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\le 1-\frac{\lambda_1}{\log D} \\ \frac{1+0.5v}{\log D}<|\gamma_\chi|\le\frac{1.5+0.5v}{\log D}}} |H(\rho_\chi-1)|^2$$

$$\le \sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+0.5v}\right)^2\int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-164\lambda} dN(\lambda,1+0.5v,1.5+0.5v)$$

$$\le (164)(3)\left(\int_{\lambda_1}^{1.25} 12e^{-(164-70)\lambda}d\lambda + \int_{1.25}^{\infty}(20)e^{-(164-82)\lambda}d\lambda\right)$$

$$\le (0.0001)(e^{-63\lambda_1}). \qquad (62)$$

由 (60) – (62) 式可知, (45) 式成立.

3) 当 $\lambda_1 > 1.25$ 时, 由引理 22 和 23, 有 $\delta_1 \ge e^{-81\lambda_1}(\log D)^{-1}$, 因而由引理 24, 我们有

$$|H(\rho_1-1)|^2 \le e^{(-164)e^{-81\lambda_1}} \le 1-(160)(e^{-81\lambda_1}). \qquad (63)$$

由引理 14, 15, 24 及资料 [5] 中的引理 3a 和 3b, 有

$$\sum_{\chi \bmod D} \sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\le 1-\frac{\lambda_1}{\log D} \\ |\gamma_\chi|\le(\log D)^{-1}}} |H(\rho_\chi-1)|^2$$

$$\le \int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-164\lambda} dN(\lambda,0,1)$$

$$\leq (164)(2)\int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-(164-83)\lambda} d\lambda$$

$$\leq 10e^{-81\lambda_1} \tag{64}$$

$$\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\substack{\rho_\chi=\beta_\chi+\gamma_\chi\ 0<\beta_\chi\leq 1-\frac{\lambda_1}{\log D} \\ (1+v)(\log D)^{-1}<|\gamma_\chi|\leq(2+v)(\log D)^{-1}}} |H(\rho_\chi-1)|^2$$

$$\leq \sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{(1+v)^2}\int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-164\lambda} dN(\lambda, 1+v, 2+v)$$

$$\leq (164)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{2}{(1+v)^2}\int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-(164-83)\lambda} d\lambda$$

$$\leq 20e^{-81\lambda_1} \tag{65}$$

由 (63) - (65) 式可知，(45) 式成立，故定理 1 得证.

定理 2. 当 $0.05 < \lambda \leq \log D$, $|t_0| \leq D^{\varepsilon}$ 时，我们有

$$Q(\lambda) \leq e^{80.7\lambda},$$

证. 由引理 6, 9, 14 和 15, 可知定理 2 得证.

定理 3. 设存在一个模 D 的实特征 χ_1, 而它的 $L(s,\chi_1)$ 有一个除外零点 $\rho_1 = 1-\delta_1$, 又设在正方形

$$1-\frac{\lambda}{\log D} \leq \sigma \leq 1, \quad |t| \leq D^{\varepsilon}$$

内有一个模 D 的 L 函数的零点，则当 $0.05 < \lambda \leq \log D$ 时，我们有

$$\delta_1 > (200)^{-1}e^{-81\lambda}(\log D)^{-1}.$$

证. 由引理 21 - 引理 23 可知，定理 3 成立.

作者对潘承洞同志详细看过本文，并提出宝贵意见，表示衷心的感谢.

参考文献

[1] 潘承洞. 北京大学学报, 1958: 1 ~ 35

[2] 陈景润. *Scientia Sinica*, 1964, **14**: 1868 ~ 1871

[3] Jutila M. *Proc. of Sym. in Pure Math.*. AMS, 1971. 370

[4] Jutila M. *Annales Acad. Scien. Fennicae*, 1970, **471**: 1 ~ 8

[5] Jutila M. *Annales Acad. Scien. Fennicae*, 1969, **458**: 1 ~ 32

关于华罗庚教授的指数和估计 *†

摘　要

本文将证明关于下列形式的指数和的两个定理:

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi if(x)/q},$$

其中 $f(x)$ 是一整系数多项式.

I. 引　言

我们关心下述形式的指数和 $S(q,f(x))=\sum\limits_{x=1}^{q}e^{2\pi if(x)/q}$, 其中 $q>1$ 是整数, $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$ 是一整系数多项式, 且 $(a_1,\ldots,a_k,q)=1$.

在解析数论中的许多问题, 例如推广到多项式值的华林问题, 都希望对于大的 q 能得到 $S(q,f(x))$ 的精确估计. 由于 $k=1$ 时 $S(q,f(x))=0$, $k=2$ 的情形已由高斯和理论所解决, 故我们假定 $k\geq 3$.

对于多项式 $f(x)=x^k$, Hardy 和 Littlewood[1] 证明了:

$$|S(q,f(x))|\leq c(k)q^{1-\frac{1}{k}}, \tag{1}$$

其中常数 $c(k)>0$ 只依赖于 k. 而且他们的结果也表明: 除了常数 $c(k)$ 的具体值之外, 估计式 (1) 是最好可能的, 即若对 q 没有限制, 对每一 k 有无限多个 q 使 $S(q,f(x))=q^{1-\frac{1}{k}}$. 许多作者对不同的多项式作了许多尝试. 因此就产生了一个问题: 是否对于一般的 $f(x)$, (1) 式仍然成立. 最终由我的老师华罗庚教授对这个问题给出一个证明. 对一般的 $f(x)$ 他 [2–3] 解决了这一历史性工作, 得到了关于 q 最好的阶:

$$\left|S(p^l,f(x))\right|\leq k^3p^{l(1-\frac{1}{k})},$$

* 1977 年 2 月 23 日收到.

† 原载 *Sci. Sin.*, **20**(1977), no. 6, pp. 711 – 719.

其中 p 是素数， l 是一正整数. 用 [2] 中第一章估计 $|S(q,f(x))|$ 的方法，很容易得到

$$|S(q,f(x))| \leq c_1(k)q^{1-\frac{1}{k}},$$

其中

$$c_1(k) = \begin{cases} e^{3^k}, & \text{当 } k \geq 8 \text{ 时}, \\ k^{3\sum\limits_{2\leq p\leq k^{3k/(k-2)}} 1}, & \text{当 } 3 \leq k < 8 \text{ 时}. \end{cases}$$

在文 [4] 中我们证明了:

$$\left|S(p^l,f(x))\right| \leq p^{l(1-\frac{1}{k})}, \quad p > k^{2+\frac{6}{k}} \text{ 且 } k \geq 12 \text{ 时},$$

及 $|S(q,f(x))| \leq c_2(k)q^{1-\frac{1}{k}}$, $c_2(k) = k^{2\sum\limits_{2\leq p\leq k^{2+6/k}} 1}$, $k \geq 12$ 时.

根据华先生的方法，本文将证明:

定理 1 设 $k \geq 3$ 是整数， $f(x) = a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0$ 是一整系数多项式， $(a_1,\ldots,a_k,p) = 1$, p 是素数， l 是正整数，则:

$$\left|\sum_{1\leq x\leq p^l} e^{2\pi i f(x)/p^l}\right| \leq c_3(k)p^{l(1-\frac{1}{k})},$$

其中

$$c_3(k) = \begin{cases} 1, & \text{对 } p \geq (k-1)^{\frac{2k}{k-2}}, \\ k^{\frac{2}{k}}, & \text{对 } (k-1)^{\frac{2k}{k-2}} > p \geq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}, \\ k^{\frac{3}{k}}, & \text{对 } (k-1)^{\frac{k}{k-2}} > p > k, \\ (k-1)k^{\frac{3}{k}}, & \text{对 } p \leq k. \end{cases}$$

定理 2 设 $k \geq 3$ 是整数， $f(x) = a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0$ 是一整系数多项式， $(a_1,\ldots,a_k,q) = 1$, 其中 q 是正整数. 则:

$$|S(q,f(x))| \leq c_4(k)q^{1-\frac{1}{k}},$$

其中

$$c_4(k) = \begin{cases} e^{4k}, & \text{对 } k \geq 10, \\ e^{c_5(k)k}, & \text{对 } 3 \leq k \leq 9, \end{cases}$$

而 $c_5(3) = 6.1$, $c_5(4) = 5.5$, $c_5(5) = 5$, $c_5(6) = 4.7$, $c_5(7) = 4.4$, $c_5(8) = 4.2$, $c_5(9) = 4.05$.

II. 一些引理

引理 1 设 $f(0)=0$, 则对任意互素的正整数 q_1,q_2, 有

$$S(q_1q_2,f(x))=S(q_1,f(q_2x)/q_2)S(q_2,f(q_1x)/q_1).$$

证 见 [2] 中引理 1.3.

令 $e_q(x)=e^{2\pi ix/q}$. 对非负整数 σ 和整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$, 符号 $p^\sigma\|g(x)$ 表示:

$$p^\sigma|(b_0,b_1,\ldots,b_n),\quad p^{\sigma+1}\nmid(b_0,b_1,\ldots,b_n).$$

引理 2 设 $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$, $p\nmid(a_k,\ldots,a_1)$, 假定

$$p^\sigma\|(f(\mu+py)-f(\mu)),\text{ 则 }1\le\sigma\le k.$$

证 见 [2] 中引理 1.5.

引理 3 设 $S(x)$ 是一整系数多项式, a 是 $S(x)\equiv0\,(\operatorname{mod}p)$ 的 m 重根, $p^u\|S(px+a)$, 则 $p^{-u}S(px+a)$ 的所有零点 $(\operatorname{mod}p)$ 的个数 (按重数计算) 不超过 m.

证 见 [2] 中引理 1.4.

引理 4 假定 $a>1$, r,k 是整数, $1\le r\le k$, 令

$$M(r)=\max_{m_1+\cdots+m_r=k}\sum_{j=1}^{r}a^{m_j},\qquad m_1,\ldots,m_r\text{为正整数},$$

则 $M(r)\le\max(ka,a^k)$.

证 当 $m\ge n=1$ 时,

$$a^m+a^n\le a^{m+n-1}+a. \tag{2}$$

当 $m\ge n\ge2$ 时, 由 $a^m(a-1)\ge a^{n-1}(a-1)$ 得

$$a^m+a^n\le a^{m+1}+a^{n-1}\le\cdots\le a^{m+n-1}+a.$$

因此当 $m\ge n\ge1$ 时, (2) 式成立.

当 $1\le r\le2$ 时, 由 (2),

$$M(r)\le(r-1)a+a^{k-r+1}. \tag{3}$$

由 (2) 式,

$$\sum_{j=1}^{r} a^{m_j} \le a^{m_1+m_2-1} + \sum_{j=3}^{r} a^{m_j} + a \le \cdots \le a^{m_1+\cdots+m_r-1} + (r-1)a,$$

其中 $r, m_1, \ldots, m_r$ 是整数，且满足条件

$$r \ge 3, \quad m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_r \ge 1.$$

因而当 $r \ge 3$ 时，有 $M(r) \le (r-1)a + a^{k-r-1}$.

由 (3), 我们得到

$$M(r) \le g(r), \tag{4}$$

其中 $g(r) = (r-1)a + a^{k-r+1}, 1 \le r \le k$. 注意到 $1 \le r \le k, g'(r) = a - a^{k-r+1}\log a, g''(r) = a^{k-r+1}(\log a)^2 > 0$, 及 (4) 式，得

$$M(r) \le \max(g(1), g(k)) = \max(ka, a^k).$$

于是引理得证.

引理 5 设整数 $k \ge 3$, $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，$(a_1, \ldots, a_k, p) = 1$, 其中 $p > k$ 是素数. 若 $p \ge (k-1)^{\frac{k}{k-2}}, l \ge 1$, 则 $\left|S(p^l, f(x))\right| \le \mathrm{Max}\{1, \mathrm{Min}(p^{\frac{1}{k}}, (k-1)p^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}})\}p^{l(1-\frac{1}{k})}$.

若 $k < p \le (k-1)^{\frac{k}{k-2}}, l \ge 1$, 则

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \le k^{\frac{3}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})}.$$

证 由 [3] 中引理 1 得

$$|S(p, f(x))| \le \min\{p^{\frac{1}{k}}, (k-1)p^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}}\}p^{1-\frac{1}{k}},$$

因此当 $l = 1$ 时引理成立.

假定 $l \ge 2$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ 是 $f'(x) \equiv 0 \pmod p$ 的不同零点， $m_1, \ldots m_r$ 为其重数. 设 $m_1 + \cdots + m_r = m$, 显然有 $0 \le m \le k-1$. 于是有:

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \le \sum_{1 \le v \le p} \left|S_v, p^l\right|, \tag{5}$$

其中

$$S_{v,p^l} = \sum_{\substack{1 \le x \le p^l \\ x \equiv v \pmod p}} e_{p^l}(f(x)).$$

在和式 S_{v,p^l} 中作变换 $x = y + p^{l-1}z$, 其中 y, z 各自独立地通过下列各值：$y = 1, \ldots, p^{l-1}$; $z = 0, \ldots, p-1$. 因此对 $l \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} S_{v,p^l} &= \sum_{\substack{0<y\leq p^{l-1} \\ y\equiv v \pmod p}} \sum_{0\leq z<p} e_{p^l}(f(y+p^{l-1}z)) \\ &= \sum_{\substack{0<y\leq p^{l-1} \\ y\equiv v \pmod p}} e_{p^l}(f(y)) \sum_{0\leq z<p} e_p(f'(y)z). \end{aligned}$$

这表明，若 $v \neq \mu_j$, $j = 1, \ldots, r$, 则

$$S_{v,p^l} = 0. \tag{6}$$

若 $1 \leq j \leq r$, $l \geq 2$, 则

$$S_{\mu_j,p^l} = p \sum_{\substack{0<y\leq p^{l-1} \\ y\equiv \mu_j \pmod p}} e_{p^l}(f(y)) = p \sum_{0\leq y_1<p^{l-2}} e_{p^l}(f(\mu_j + py_1)). \tag{7}$$

设 $p^{\sigma_j} \| (f(py+\mu_j) - f(\mu_j))$. 由于

$$f(py+\mu_j) - f(\mu_j) = pyf'(\mu_j) + \frac{(py)^2 f''(\mu_j)}{2} + \cdots + \frac{(py)^{m_j} f^{(m_j)}(\mu_j)}{m_j!} + \cdots,$$

故 $2 \leq \sigma_j \leq m_j + 1$. 令 $p^{-\sigma_j}(f(py+\mu_j) - f(\mu_j)) = g_{\mu_j}(y)$.

若 $l > \sigma_j$, 对 S_{μ_j,p^l} 运用归纳法. 我们得到

$$\begin{aligned} \left|S_{\mu_j,p^l}\right| &= \left|\sum_{0\leq y_1<p^{l-2}} e_{p^{l-\sigma_j}}(g_{\mu_j}(y))\right| p = p^{\sigma_j-1}\left|S(p^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))\right| \\ &\leq p^{\sigma_j-1+(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{k})} \max\{1, \min(p^{\frac{1}{k}}, (k-1)p^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}})\} \\ &= p^{l(1-\frac{1}{k})+\frac{\sigma_j}{k}-1} \max\{1, \min(p^{\frac{1}{k}}, (k-1)p^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}})\}. \end{aligned} \tag{8}$$

若 $l \leq \sigma_j$, 由 (7) 式得 $\left|S_{\mu_j,p^l}\right| \leq p^{l-1}$, 因此 (8) 式对 $l \leq \sigma_j$ 仍成立. 由 (5), (6), (8) 式得到：

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \leq \max\{1, \min(p^{\frac{1}{k}}, (k-1)p^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}})\} p^{l(1-\frac{1}{k})} \sum_{j=1}^{r} p^{\frac{\sigma_j}{k}-1}. \tag{9}$$

当 $p \geq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$ 时，由 $\sigma_j \leq m_j + 1$, $m_1 + \cdots + m_r = m \leq k-1$ 及引理 4, 有

$$\sum_{j=1}^{r} p^{\frac{\sigma_j}{k}-1} \leq p^{\frac{1}{k}-1} \sum_{j=1}^{r} p^{\frac{m_j}{k}} \leq p^{\frac{1}{k}-1} \max((k-1)p^{\frac{1}{k}}, p^{\frac{k-1}{k}}) \leq 1.$$

由这一不等式及 (9) 式即得，当 $p \geq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$ 时引理 5 成立.

当 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$, $l \geq 2$ 时，我们将证明:

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \leq mp^{-1+\frac{3}{k}+l(1-\frac{1}{k})} \tag{10}$$

由 (5)-(7) 式知当 $l = 2$ 时 (10) 式成立. 下面我们用归纳法.

假设 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$, $2 \leq l \leq L$ 时 (10) 式成立. 当 $p > k$ 时，由 $2 \leq \sigma_j \leq m_j + 1$, 得 $g'_{\mu_j}(y) \equiv p^{-\sigma_j}\left(pf'(\mu_j) + \cdots + \frac{p^{m_j}y^{m_j-1}f^{(m_j)}(\mu_j)}{(m_j-1)!} + \frac{p^{m_j+1}y^{m_j}f^{(m_j+1)}(\mu_j)}{m_j!}\right) (\bmod p)$. 因此 $g'_{\mu_j}(y) \equiv 0 (\bmod p)$ 的零点个数不超过 m_j. 若 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$, $\sigma_j < L$. 由 (8) 式， $\sigma_j \leq m_j + 1$, 并对 (10) 式用归纳法得

$$\begin{aligned}\left|S_{\mu_j, p^{L+1}}\right| &= p^{\sigma_j-1}\left|S(p^{L+1-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))\right| \\ &\leq m_j p^{\sigma_j-2+\frac{3}{k}+(L+1-\sigma_j)(1-\frac{1}{k})} \\ &\leq m_j p^{-2+\frac{m_j+1}{k}+\frac{3}{k}} p^{(L+1)(1-\frac{1}{k})}.\end{aligned} \tag{11}$$

当 $\sigma_j \geq L$ 时，由 (7) 式

$$\left|S_{\mu_j, p^{L+1}}\right| \leq p^L. \tag{12}$$

令 $f_1(y) = yp^{\frac{1}{k}} - p^{\frac{y}{k}}$, 则 $f_1'(y) = p^{\frac{1}{k}} - (p^{\frac{y}{k}} \log p)/k$, $f_1''(y) \leq 0$, $f_1(1) = 0$. 若 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$, 则 $f_1'(1) \geq 0$, $f_1(k-1) \geq 0$. 因此对 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$ 及 $1 \leq y \leq k-1$, 易得 $f_1(y) \geq 0$. 当 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$ 时，由 $1 \leq m_j \leq k-1$ 有

$$m_j p^{\frac{1}{k}} \geq p^{\frac{m_j}{k}}. \tag{13}$$

1) $L > \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r$: 由 (5), (6), (11) 和 $1 \leq m_j \leq k-1$, 我们有

$$\left|S(P^{L+1}, f(x))\right| \leq p^{-2+\frac{3}{k}+(L+1)(1-\frac{1}{k})} \sum_{j=1}^{r} m_j p^{\frac{m_j+1}{k}} \leq mp^{-1+\frac{3}{k}+(L+1)(1-\frac{1}{k})}.$$

这表明当 $L > \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r$ 时 (10) 式成立.

2) $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{r_1} \geq L > \sigma_{r_1+1} \geq \cdots \geq \sigma_r$：由 (5), (6), (11), (12) 式我们有

$$\left|S(P^{L+1}, f(x))\right| \leq r_1 p^L + \sum_{j=r_1+1}^{r} m_j p^{\frac{m_j+1}{k}} p^{-2+\frac{3}{k}+(L+1)(1-\frac{1}{k})}. \tag{14}$$

令 $m_1 + \cdots + m_{r_1} = M_1$, $m_{r_1+1} + \cdots + m_r = M_2$, 则 $M_1 + M_2 = m$. 当 $1 \leq j \leq r_1$ 时, 由 $m_j + 1 \geq \sigma_j \geq L$ 得到 $M_1 + r_1 \geq r_1 L$, $L \leq 1 + \dfrac{M_1}{r_1}$. 于是

$$\begin{aligned} L &= (L+1)\left(1-\frac{1}{k}\right) - 1 + \frac{2}{k} + \frac{L-1}{k} \\ &\leq (L+1)\left(1-\frac{1}{k}\right) - 1 + \frac{2}{k} + \frac{M_1}{r_1 k}. \end{aligned} \tag{15}$$

令 $f_2(y) = y p^{\frac{M_1}{yk}}$, 则

$$f_2'(y) = p^{\frac{M_1}{yk}}\left(1 - \frac{M_1 \log p}{yk}\right),$$

$$f_2''(y) = p^{\frac{M_1}{yk}}\left(\frac{M_1 \log p}{y^2 k} - \frac{M_1 \log p}{y^2 k} + \frac{M_1^2 (\log p)^2}{y^3 k^2}\right) \geq 0.$$

当 $1 \leq r_1 \leq M_1$ 时, 由 (13) 式,

$$r_1 p^{\frac{M_1}{r_1 k}} \leq \max\left(p^{\frac{M_1}{k}}, M_1 p^{\frac{1}{k}}\right) \leq M_1 p^{\frac{1}{k}}. \tag{16}$$

由 (14)–(16) 式得到

$$\begin{aligned} \left|S(p^{L+1}, f(x))\right| &\leq \left(r_1 p^{\frac{M_1}{r_1 k}} + \sum_{j=r_1+1}^{r} m_j p^{\frac{m_j+1}{k}-1+\frac{1}{k}}\right) p^{(L+1)(1-\frac{1}{k})-1+\frac{2}{k}} \\ &\leq \left(M_1 p^{\frac{1}{k}} + M_2 p^{\frac{1}{k}}\right) p^{(L+1)(1-\frac{1}{k})-1+\frac{2}{k}}. \end{aligned} \tag{17}$$

当 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$ 时, 由 (17) 式及 $M_1 + M_2 = m$ 知当 $l = L+1$ 时 (10) 式成立.

于是我们证明了当 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$, $l \geq 2$ 时 (10) 式成立. 由 $m \leq k-1$, $p > k$ 和 (10) 式即可得到当 $k < p \leq (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$ 时引理 5 成立.

引理 6 设整数 $k \geq 3$. $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一整系数的多项式，$(a_1, \ldots, a_k, p) = 1$, $p \leq k$ 是素数. 则当 $l \geq 1$ 时有

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \leq (k-1) k^{\frac{3}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})}.$$

证 定义 t, 使得 $p^t | (ka_k, \ldots, 2a_2, a_1)$, $p^{t+1} \nmid (ka_k, \ldots, 2a_2, a_1)$. 由 $(a_1, \ldots, a_k, p) = 1$ 我们得到 $p^t \leq k$. 设 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ 是

$$f'(x) \equiv 0 (\bmod p^{t+1}), \quad 0 \leq x < p,$$

的不同零点 $(\bmod p)$, $m_1, \ldots, m_r$ 为其重数，设 $m_1 + \cdots + m_r = m$, 易得 $m \leq k-1$.

对于 $p \leq k$, $l \geq 1$, 我们将证明

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \leq k^{\frac{3}{k}} \max(1, m) p^{l(1-\frac{1}{k})}. \tag{18}$$

由这一不等式即可得引理 6.

1) $l < 2(t+1)$: 由 $p^t \leq k$ 我们有

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \leq p^l = p^{l(1-\frac{1}{k})} p^{\frac{l}{k}} \leq p^{\frac{2(t+1)}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})} \leq k^{\frac{3}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})}$$

于是当 $l < 2(t+1)$ 时 (18) 式成立.

2) $l \geq 2(t+1)$: 若 $v \neq \mu_j$, $j = 1, \ldots, r$, 对 (5) 中和式 S_{v,p^l} 作变换 $x = y + p^{l-t+1} z$, 其中 y, z 各自独立地取遍下列值：$y = 1, 2, \ldots, p^{l-t-1}$, $z = 0, \ldots, p^{t+1} - 1$. 于是对 $l \geq 2(t+1)$, 我们有

$$\begin{aligned} S_{v,p^l} &= \sum_{\substack{0<y\leq p^{l-t-1} \\ y\equiv v(\bmod p)}} \sum_{0\leq z<p^{t+1}} e_{p^l}(f(y) + p^{l-t-1} z f'(y)) \\ &= \sum_{\substack{0<y\leq p^{l-t-1} \\ y\equiv v(\bmod p)}} e_{p^l}(f(y)) \sum_{z=0}^{p^{t+1}-1} e_{p^{t+1}}(z f'(y)) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $v \neq \mu_j (j = 1, 2, \ldots, r)$.

若 $p^{\sigma_j} \| (f(py + \mu_j) - f(\mu_j))$, 则令 $g_{\mu_j}(y) = p^{-\sigma_j}(f(py + \mu_j) - f(\mu_j))$. 由引理 2, 我们有 $1 \leq \sigma_j \leq k$.

若 $\sigma_j < l$, 对 (18) 式应用归纳法. 由引理 3 得

$$\begin{aligned}\left|S_{\mu_j,p^l}\right| &= \left|\sum_{\substack{x=1\\x\equiv\mu_j(\bmod p)}}^{p^l} e_{p^l}(f(x))\right| = \left|\sum_{y=0}^{p^{l-1}-1} e_{p^l}(f(\mu_j+py))\right| \\
&= \left|e_{p^l}(f(\mu_j))\sum_{y=0}^{p^{l-1}-1} e_{p^{l-\sigma_j}}(g_{\mu_j}(y))\right| = p^{\sigma_j-1}\left|S(p^{l-\sigma_j}, g_{\mu_j}(y))\right| \\
&\le m_j k^{\frac{3}{k}} p^{\sigma_j-1+(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{k})} = m_j k^{\frac{3}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})+\frac{\sigma_j}{k}-1} \\
&\le m_j k^{\frac{3}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})}. \qquad (20)\end{aligned}$$

若 $\sigma_j \ge l$, 则 $\left|S_{\mu_j,p^l}\right| \le p^{l-1} = p^{l(1-\frac{1}{k})+\frac{l}{k}-1} \le p^{l(1-\frac{1}{k})+\frac{\sigma_j}{k}-1} \le p^{l(1-\frac{1}{k})}$. 于是 $\sigma_j \ge l$ 时 (20) 仍成立.

由 (15), (19), (20) 式，得到

$$\left|S(p^l, f(x))\right| \le \sum_{j=1}^{r} m_j k^{\frac{3}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})} = mk^{\frac{3}{k}} p^{l(1-\frac{1}{k})}.$$

因此对 $p \le k$, $l \ge 1$(18) 式成立. 由 (18) 式，引理 6 得证.

III. 定理的证明

若 $p \ge (k-1)^{\frac{2k}{k-2}}$, $l \ge 1$. 由引理 5, $\left|S(p^l, f(x))\right| \le p^{l(1-\frac{1}{k})}$.

若 $(k-1)^{\frac{2k}{k-2}} > p \ge (k-1)^2$, 则 $(k-1)p^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} \le (k-1)^{\frac{2}{k}}$.

若 $(k-1)^2 > p \ge (k-1)^{\frac{k}{k-2}}$, 则 $p^{\frac{1}{k}} \le (k-1)^{\frac{2}{k}}$. 因此由引理 5, 6, 即可得定理 1.

令 $h(x) = \dfrac{x}{\log x}$. 则 $h'(x) = \dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{(\log x)^2} = \dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2} \ge 0$ (对 $x \ge e$). 因而 $h(x)$ 单调增加. 令 $\pi(x) = \sum_{p\le x} 1$. 我们经计算已经得到：

$$\pi(x) \le \frac{x}{\log x}, \quad 对 2 \le x < 7; \quad \pi(x) \le \frac{1.25x}{\log x}, \quad 对 x > 7.$$

由定理 1 及引理 1 我们有

$$|S(q, f(x))| \le (k-1)^{\pi(k)} (k^{\frac{1}{k}})^{\pi((k-1)^{\frac{k}{k-2}})} (k^{\frac{2}{k}})^{\pi((k-1)^{\frac{2k}{k-2}})} q^{1-\frac{1}{k}} \le e^{F(k)} q^{1-\frac{1}{k}},$$

其中

$$F(k) = 1.25k\left(\frac{\log(k-1)}{\log k} + \frac{(k-1)^{1+\frac{2}{k-2}}(k-2)\log k}{k^3\log(k-1)} + \frac{(k-1)^{2+\frac{4}{k-2}}(k-2)\log k}{k^3\log(k-1)}\right).$$

经计算得： $F(k) \le 4k$, 对 $k \ge 10$; $F(9) \le (4.05)(9)$; $F(8) \le (4.2)(8)$; $F(7) \le (4.4)(7)$; $F(6) \le (4.7)(6)$; $F(5) \le 25$; $F(4) \le 22$; $F(3) \le 18.3$. 于是定理 2 得证.

作者感谢王元教授仔细审看了本文.

参考文献

[1] Hardy G H, Littlewood J E. Some problems of "Partitio Numerorum" IV, The singular series in Waring's problem and the value of the number $G(k)$. *Math. Z.*, 1922: 161 ~ 188

[2] Hua L K. The Additive Prime Number Theory. Peking: Academia Sinica, 1957. 1 ~ 158

[3] Hua L K. *Science Record*, 1957, **1**: 1 ~ 4

[4] Chen Jingrun. On the representation of natural number as a sum of terms of the form $x(x+1)\cdots(x+k-1)/k!$. *Acta Mathematica Sinica*, 1959: 264 ~ 270

* * * *

附注: 本文付印前, 我们在 *Mathematical Reviews*, **53**(1977), no. 3 上看到了如下结果:

В. И. Нечаев:

完全有理三角和的估计. (俄文) *Mat. Zametki.* **17**(1975), no. 6, 839 - 849. (英译文见 *Math. Notes*, **17**(1975), No. 6, 504 - 511.)

作者证明了下述定理: 设 $f(x)$ 为 $k \ge 3$ 次整系数多项式, 系数 $a_0, a_1, \ldots, a_k$ 满足 $(a_1, \ldots, a_k, q) = 1$, q 为正整数, $f(0) = 0$; 那么

$$\left|\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i f(x)/q}\right| < e^{5k^2/\log k} q^{1-\frac{1}{k}}.$$

此不等式改进了我的一个结果 (见数学学报, **9**(1959), 264 -270; MR22, #4691), 在那里我得到 $e^{O(k^2)} q^{1-\frac{1}{k}}$ 型之估计. Нечаев 的文章用到华罗庚与我的方法.

关于哥德巴赫问题和筛法 *†

摘 要

设 $P_x(1,1)$ 表示满足条件 $x-p=p_1$ 的素数 p 的个数，其中 x 是一大偶数，p_1 是一素数. 本文将证明:

$$P_x(1,1)\le\frac{7.8342xC_x}{(\log x)^2},\quad \text{其中}\ C_x=\prod_{p|x}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

I. 引 言

设 x 是一大偶数. h 是任一偶数，$C_{xq}=\prod_{\substack{p|xq\\ p\ge 2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$. 设 $P_x(1,1)$ 表示满足 $x-p=p_1$ 的素数 p 的个数，p_1 是素数. $x_h(1,1)$ 表示满足 $p\le x$, $p+h=p_1$ 的素数 p 的个数. 本文将证明:

$$P_x(1,1)\le\frac{7.8342xC_x}{(\log x)^2}.$$

对正整数 q, 设 $P(x,q,z)$ 表示满足下列条件的素数 p 的个数: $p\le x$, $p\equiv x\,(\mathrm{mod}\,q)$, $p\not\equiv x\,(\mathrm{mod}\,p_i)\,(1\le i\le j)$, 其中 $p_i\nmid q$, $3=p_1<p_2<\cdots<p_j\le z$ 是不超过 z 的奇素数. 设 $\underline{q}=\dfrac{x^{1/2-\epsilon}}{q}$, $1\le q\le x^{1/2-\epsilon}$. 令 $z\ge x^{\epsilon}$, $P_{y,z}=\prod_{\substack{2\le p\le z\\ p\nmid y}}p$. 令

$$A(s)=\begin{cases}0, & \text{当}\ 1\le s\le 3\ \text{时},\\ \displaystyle\int_2^{s-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt, & \text{当}\ 3\le s\le 5\ \text{时}.\end{cases}$$

当 $0<\alpha\le\dfrac{1}{2}-\epsilon$ 时，设 U_α 表示由一些满足下列条件的不同正整数 q 组成的集合:

$$q\le x^{\frac{1}{2}-\alpha},\quad |\mu(q)|=1,\quad (q,x)=1,\quad \text{若}\ p|q,\quad \text{则}\ p\ge x^{\epsilon}.$$

* 1978 年 2 月 15 日收到.

† 原载 *Sci. Sin.*, **21**(1978), no. 6, pp. 701 – 739.

对 $1 \leq s \leq 5$, 令 $H(s)$ 为满足下列条件的最大实数:

$$\sum_{q \in U_{2\epsilon}} P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{s}}) \leq \sum_{q \in U_{2\epsilon}} \left\{ \frac{4xC_x}{(\varphi(q))(\log x)(\log \underline{q})} \right\} \left(1 + A(s) - H(s) + \left| O\left(\frac{(\log \log x)^7}{(\log \underline{q})^{\frac{1}{14}}} \right) \right| \right) + \left| O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}} \right) \right|.$$

对 $2 \leq s \leq 4$. 令 $G(s)$ 为满足下列条件的最大实数:

$$\sum_{q \in U_{2\epsilon}} P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{s}}) \leq \sum_{q \in U_{2\epsilon}} \left\{ \frac{4xC_x}{(\varphi(q))(\log x)(\log \underline{q})} \right\} \cdot \left\{ \log(s-1) + G(s) - \left| O\left(\frac{(\log \log x)^7}{(\log \underline{q})^{\frac{1}{14}}} \right) \right| \right\} - \left| O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}} \right) \right|.$$

我们的结果叙述如下:

定理 1. $H(2,2) \geq 0.02073$.

定理 2. $P_x(1,1) \leq \dfrac{7.8342xC_x}{(\log x)^2}$.

定理 3. $x_h(1,1) \leq \dfrac{7.8342xC_x}{(\log x)^2}$.

设 $U_{2\epsilon}$ 为只含 1 的一个整数集合. 由 x 为一大偶数及定理 1 我们得到

$$\begin{aligned} P_x(1,1) &\leq P(x, 1, (x^{\frac{1}{2}-\epsilon})^{\frac{1}{2.2}}) + x^{1-\epsilon} \\ &\leq \left(\frac{4xC_x}{\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)(\log x)^2} \right)(1 - H(2.2) + \epsilon) + 2x^{1-\epsilon} \\ &\leq \frac{7.8342xC_x}{(\log x)^2}, \end{aligned}$$

由此得定理 2.

用类似于估计 $P_x(1,1) \leq \dfrac{7.8342xC_x}{(\log x)^2}$ 的方法. 容易得到

$$x_h(1,1) \leq \frac{7.8342xC_x}{(\log x)^2}.$$

于是得定理 3.

下面我们将给出定理 1 的证明.

II. 一些引理

当 $0<\alpha_1<\alpha\le 1-\epsilon$ 时，设 S_α 表示由一些满足下面条件的不同正整数 m 组成集合： $m\le x^{1-\alpha}$, 若 $p|m$, 那么 $p>x^\epsilon$. 设 $\tau(a)$ 为方程 $a=mn$ 的解 (m,n) 的个数，其中 $m\in S_\alpha$, $1\le n\le x^{1-\alpha}m^{-1}$, $(n,P_{1,z})=1$, 若对于满足条件的 (m,n) 的方程 $a=mn$ 不存在，则令 $\tau(a)=0$.

设 $w(a)$ 为方程 $a=mn$ 的解 (m,n) 的个数. 其中 $m\in S_\alpha$, $x^{1-\alpha}m^{-1}<n\le x^{1-\alpha_1}m^{-1}$, $(n,P_{1,z})=1$, 若对于满足条件的 (m,n) 方程 $a=mn$ 不存在，则令 $w(a)=0$.

设

$$D_1=(\log x)^{1000},\quad D=x^{\frac14-\frac{\epsilon}{2}},\quad H_j=2^{2j}D_1^2,$$
$$T=e^{(\log x)^2},\quad \sigma=1+\frac{1}{\log x},$$

及

$$\tau_d(a)=w_d(a)=0,\quad 当\ \mu(d)=0\ 时,$$

$$\tau_d(a)=w_d(a)=0,\quad 当\ (a,d)>1\ 时,$$

$$\tau_d(a)=\tau(a),\quad w_d(a)=w(a),\quad 当\ (a,d)=1\ 和\ \mu(d)\ne 0\ 时,$$

$$I_1=\sum_{\substack{d\le D^2\\(d,x)=1}}\left|\sum_{1\le a\le x^{1-\alpha}}\tau_d(a)\Bigg(\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha}\\ ap\equiv x\,(\mathrm{mod}\,d)}}1-\frac{\int_{x^{\alpha_1}}^{x^{\alpha}}\frac{dt}{\log t}}{\varphi(d)}\Bigg)\right|,$$

$$I_2=\sum_{\substack{d\le D^2\\(d,x)=1}}\left|\sum_{x^{1-\alpha}<a\le x^{1-\alpha_1}}w_d(a)\Bigg(\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\le p\le xa^{-1}\\ ap\equiv x\,(\mathrm{mod}\,d)}}1-\frac{\int_{x^{\alpha_1}}^{xa^{-1}}\frac{dt}{\log t}}{\varphi(d)}\Bigg)\right|.$$

引理 1. 我们有

$$I_1\ll\frac{x}{(\log x)^{980}},\quad I_2\ll\frac{x}{(\log x)^{980}}$$

证. 可用 [4] 和 [5] 中同样的证明方法.

设 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_d = 0$, $d > D$. 令 $g(k) = \dfrac{1}{\varphi(k)}$, $f(k) = \varphi(k)\prod_{p|k}\dfrac{p-2}{p-1}$, $\lambda_d = \dfrac{\mu(d)}{f(d)g(d)}\left\{\sum_{\substack{1\le k\le D/d\\(k,xd)=1}}\dfrac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}\left\{\sum_{\substack{1\le k\le D\\(k,x)=1}}\dfrac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}^{-1}$, $1 < d \le D$, $(d,x)=1$. 如果 $5\epsilon < \alpha_1 < \alpha \le \dfrac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in S_\alpha}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha} P(x,mp,z)\\
&\le \sum_{m\in S_\alpha}\sum_{\substack{1\le n\le x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(k,P_{1,z})=1}}\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\le p\le \min(x^\alpha,x/mn)\\(x-mnp,P_{1,D})=1}} 1 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{400}}\right)\\
&\le M_1 + M_2 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{400}}\right). \qquad (1)
\end{aligned}$$

其中

$$M_1 = \sum_{m\in S_\alpha}\sum_{\substack{1\le n\le x^{1-\alpha}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha}\left\{\sum_{d|(x-mnp,P_{x,D})}\lambda_d\right\}^2,$$

$$M_2 = \sum_{m\in S_\alpha}\sum_{\substack{x^{1-\alpha}m^{-1}<n\le x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x/mn}\left\{\sum_{d|(x-mnp,P_{x,D})}\lambda_d\right\}^2.$$

我们有：

$$\begin{aligned}
M_1 + M_2 = &\sum_{d_1|P_{x,D}}\sum_{d_2|P_{x,D}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{m\in S_\alpha}\left\{\sum_{\substack{1\le n\le x^{1-\alpha}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha\\x\equiv mnp\,(\mathrm{mod}\,\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)})}} 1\right.\\
&\left.+\sum_{\substack{x^{1-\alpha}m^{-1}<n\le x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\le p\le x/mn\\x\equiv mnp\,(\mathrm{mod}\,\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)})}} 1\right\}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

设 $\nu(d)$ 表示 d 的素因子个数. 由 (2) 及 $|\lambda_d| \ll \log x$, $d \le x$, 我们有

$$|M_1 + M_2 - M_3M_4| \ll (M_1^* + M_2^*)(\log x)^2, \qquad (3)$$

其中

$$M_3 = \sum_{d_1|P_{x,D}}\sum_{d_2|P_{x,D}}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\dfrac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)},$$

$$M_4=\sum_{m\in S_\alpha}\left\{\sum_{\substack{1\le n\le x^{1-\alpha}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha}1+\sum_{\substack{x^{1-\alpha}m^{-1}<n\le x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x/mn}1\right\},$$

$$M_1^*=\sum_{d\le D^2,(d,x)=1}3^{\nu(d)}\left\{\left|\sum_{1\le a\le x^{1-\alpha}}\tau_d(a)\left(\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha\\x\equiv ap\,(\mathrm{mod}\,d)}}1-\frac{\sum\limits_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha}1}{\varphi(d)}\right)\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{x^{1-\alpha}<a\le x^{1-\alpha_1}}w_d(a)\left(\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\le p\le xa^{-1}\\x\equiv ap\,(\mathrm{mod}\,d)}}1-\frac{\sum\limits_{x^{\alpha_1}\le p\le xa^{-1}}1}{\varphi(d)}\right)\right|\right\},$$

$$M_2^*=\sum_{d\le D^2,(d,x)=1}\frac{3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\left\{\sum_{\substack{1\le a\le x^{1-\alpha}\\(a,d)>1}}\tau(a)x^\alpha+\sum_{\substack{x^{1-\alpha}<a\le x^{1-\alpha_1}\\(a,d)>1}}\frac{w(a)x}{a}\right\}.$$

若 x 是一大整数，由 [4], 123 – 124 页得

$$M_3\le\frac{(8+24\epsilon)C_x}{\log x}. \tag{4}$$

我们有

$$M_4=\sum_{m\in S_\alpha}\left\{\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha}\left(\sum_{\substack{1\le n\le x^{1-\alpha}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}1+\sum_{\substack{x^{1-\alpha}m^{-1}<n\le x/pm\\(n,P_{1,z})=1}}1\right)\right\}$$

$$=\sum_{m\in S_\alpha}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha}\sum_{\substack{1\le n\le x/pm\\(n,P_{1,z})=1}}1. \tag{5}$$

当 $1\le a\le x^{1-\alpha}$ 时，$\tau(a)\ll\log x$; 当 $x^{1-\alpha}<a\le x^{1-\alpha_1}$ 时，$w(a)\ll\log x$. 设 $\sum\limits_d{}'$ 表示对满足不等式 $3^{\nu(d)}\ge(\log x)^{580}$, $\mu(d)\ne0$ 的所有正整数 d 求和. 由 [8] 引理 3, 及引理 1, 得

$$M_1^*\ll(\log x)^{580}(I_1+I_2)+(\log x)^{-570}\sum_{d\le D^2}{}'3^{2\nu(d)}\left(\sum_{\substack{1\le n\le x\\n\equiv x\,(\mathrm{mod}\,d)}}1+\frac{x}{\varphi(d)}\right)$$

$$\ll\frac{x}{(\log x)^{400}}. \tag{6}$$

我们有

$$M_2^*\ll(\log x)^{580}\sum_{d\le D^2}\frac{1}{\varphi(d)}\left\{\sum_{\substack{1\le a\le x^{1-\alpha}\\(a,d)>1}}\tau(a)x^\alpha+\sum_{\substack{1\le a\le x^{1-\alpha_1}\\(a,d)>1}}\frac{xw(a)}{a}\right\}$$

$$+(\log x)^{-570}\Big(\sum_{d\le D^2}{}' \frac{3^{2\nu(d)}x}{\varphi(d)}\Big)$$

$$\ll (\log x)^{595}\sum_{x^{\epsilon}\le d_1\le D^2}\frac{x}{d_1^2}+\frac{x}{(\log x)^{400}}$$

$$\ll \frac{x}{(\log x)^{400}}. \tag{7}$$

由 (3) - (7) 式，得

$$\sum_{m\in S_\alpha}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha}P(x,mp,z)$$

$$\le \Big(\frac{(8+30\epsilon)C_x}{\log x}\Big)\sum_{m\in S_\alpha}\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^\alpha}\sum_{\substack{1\le n\le x/mp\\(n,P_{1,z})=1}}1+O\Big(\frac{x}{(\log x)^{398}}\Big). \tag{8}$$

令

$$Z_1(t)=1/t,\qquad 1\le t\le 2.$$

$$(tZ_1(t))'=Z_1(t-1),\qquad t>2.$$

当 $2\le t\le 3$ 时，由 $tZ_1(t)=1+\int_2^t Z_1(s-1)ds$ 得

$$Z_1(t)=(1+\log(t-1))/t,\quad Z_1'(t)=\frac{1-(t-1)\log(t-1)}{t^2(t-1)}.$$

设 s 为满足 $\log(s-1)=\frac{1}{s-1}$ 的正实数. 由于 $\log 1.77>\frac{1}{1.77}$, $\log 1.763<\frac{1}{1.763}$, 故 $2.763<s<2.77$. 因而 $Z_1(s)=\frac{1}{s-1}<\frac{1}{1.763}$. 当 $2\le t\le s$ 时 $Z_1'(t)\ge 0$. 当 $s\le t\le 3$ 时 $Z_1'(t)\le 0$. 因此, $Z_1(t)\le\frac{1}{1.763}$, $2\le t\le 3$. 设 $n\ge 3$. 假定 $Z_1(t)\le\frac{1}{1.763}$, $1.763\le t\le n$, 则容易证明 $Z_1(t)\le\frac{1}{1.763}$, $n<t\le n+1$. 因此 $Z_1(t)\le\frac{1}{1.763}$, $t\ge 1.763$.

设 $\epsilon<\delta<\frac{2}{5}$. 令 Q_1 表示只含整数 1 的集合. 令 Q_2 表示由满足下面条件的一些不同正整数 q 构成的集合:

$$\mu(q)\ne 0,\quad (q,x)=1,\quad x^\delta<q\le x^\delta+\frac{x^\delta}{(\log x)^3}.$$

若 $p|q$, 则 $p>x^\epsilon$, Q_2 中 q 的个数 $\gg x^\delta(\log x)^{-4}$. 令 $a_1=0$, $a_2=\delta$, $s\ge 1$, $1\le m\le 15$. 令 $l_{2j+1}>l_{2j+2}$, $j=0,1,\ldots,m$.

引理 2. 当 $s\left(\frac{1-a_i}{1/2-a_i-\epsilon}-\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{l_{2j+2}}\right)\geq 1+\epsilon$ 时，有

$$\sum_{q\in Q_i}\prod_{j=0}^{m}\Bigg(\sum_{q^{1/l_{2j+1}}<p_{j+1}\leq q^{1/l_{2j+2}}}P(x,qp_1\dots p_{m+1},\underline{q}^{\frac{1}{s}})\Bigg)$$
$$\leq\left(\frac{(8+95\epsilon)C_x}{\log x}\right)\Big(\sum_{q\in Q_i}1\Big)\left(\frac{sx^{1-a_i}}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)\int_{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_1}}^{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_2}}\frac{dt_1}{t_1\log t_1}$$
$$\cdots\int_{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2m+1}}}^{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2m+2}}}\frac{dt_{m+1}}{t_{m+1}\log t_{m+1}}\cdot Z_1\left(\frac{s\log\frac{x^{1-a_i}}{t_1\cdots t_{m+1}}}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)$$

成立.

证. 由 [6]167 页可得

$$\sum_{\substack{1\leq n\leq x\\ p|n\to p>y}}1=\left(\frac{x}{\log y}\right)Z_1\left(\frac{\log x}{\log y}\right)+O\left(\frac{x}{(\log y)^2}\right),\tag{9}$$

其中 $x\leq y\leq x^{\epsilon}$. 由 (8), (9) 式，得

$$\sum_{q\in Q_i}\prod_{j=0}^{m}\Bigg(\sum_{q^{1/l_{2j+1}}<p_{j+1}\leq q^{1/l_{2j+2}}}P(x,qp_1\cdots p_{m+1},\underline{q}^{\frac{1}{s}})\Bigg)$$
$$\leq\left(\frac{(8+90\epsilon)C_x}{\log x}\right)\Big(\sum_{q\in Q_i}1\Big)$$
$$\cdot\prod_{j=0}^{m}\Bigg(\sum_{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2j+1}}<p_{j+1}\leq(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2j+2}}}\left(\frac{x^{1-a_i}}{p_1\cdots p_{m+1}}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{s}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)Z_1\left(\frac{s\log\frac{x^{1-a_i}}{p_1\cdots p_{m+1}}}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)\Bigg),$$

于是引理得证.

我们有

$$\sum_{q\in U_{2\epsilon}}P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{s}})\geq\sum_{q\in U_{2\epsilon}}\Bigg\{P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4}})-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leq\underline{q}^{\frac{1}{s}}}P(x,qp,p)\Bigg\}$$
$$-\left|O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}}\right)\right|.\tag{10}$$

其中 $2 \le s \le 4$. 当 $q \in U_{2\epsilon}$, $p \le \underline{q}^{\frac{1}{2}}$ 时, $pq \le \left(\frac{x^{\frac{1}{2}-\epsilon}}{q}\right)^{\frac{1}{2}} q \le q^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}-\frac{\epsilon}{2}} \le x^{\frac{1}{2}-1.5\epsilon}$. 取 $\epsilon_1 = \frac{3\epsilon}{4}$, 则

$$\sum_{q\in U_{2\epsilon}} P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{s}}) \ge \sum_{q\in U_{2\epsilon}} \left\{\frac{4xC_x}{\varphi(q)\log x}\right\}\left\{\frac{\log 3 + G(4) - \epsilon}{\log \underline{q}} - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}} < p \le \underline{q}^{\frac{1}{s}}} \left(\frac{1}{p\log \underline{q}/p}\right)\left(1 - H\frac{\log \underline{q}/p}{\log p}\right) + O\left|\left(\frac{(\log\log x)^7}{(\log \underline{q})^{\frac{1}{14}}}\right)\right|\right\} - \left|O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}}\right)\right|,$$

其中 $2 \le s \le 4$. 由

$$\int_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}}^{\underline{q}^{\frac{1}{s}}} \frac{H\left(\frac{\log \underline{q}}{\log t} - 1\right)}{t(\log t)(\log \underline{q}/t)} dt = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{s}} \frac{H\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) d\alpha}{\alpha(1-\alpha)\log \underline{q}} = \int_{s-1}^{3} \frac{H(t)dt}{t\log \underline{q}}$$

及

$$\int_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}}^{\underline{q}^{\frac{1}{s}}} \frac{dt}{t(\log t)(\log \underline{q}/t)} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{s}} \frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)\log \underline{q}} = \frac{\log 3 - \log(s-1)}{\log \underline{q}}$$

我们有

$$G(s) \ge G(4) + \int_{s-1}^{3} \frac{H(t)}{t} dt - \epsilon, \tag{11}$$

其中 $2 \le s \le 4$. 类似可以证得

$$G(4) \ge \int_{3}^{4} \frac{H(t)}{t} dt - \epsilon, \tag{12}$$

$$H(s) \ge \int_{s-1}^{4} \frac{G(t)}{t} dt - \epsilon, \tag{13}$$

其中 $3 \le s \le 5$.

引理 3.

$$H(2.5) \ge 0.01018 + (0.2044)(H(2.2)) + (0.03637)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.05724)(H(2.7)) + (0.05812)(H(2.9)) + (0.02925)(H(3));$$

$$H(2.7) \geq 0.00541 + (0.202)(H(2.2)) + (0.03526)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$+(0.04537)(H(2.5)) + (0.05682)(H(2.9)) + (0.02865)(H(3));$$

$$H(2.9) \geq 0.000786 + (0.20029)(H(2.2)) + (0.03458)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$+(0.04456)(H(2.5)) + (0.0549)(H(2.7)) + (0.02823)(H(3)).$$

证. 我们有

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dt}{t\log t} \int_{t}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{ds}{s(\log s)^2} \int_{s}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dr}{r\log r}$$

$$= \frac{2(\beta-\alpha)+(\alpha+\beta)\log(\alpha/\beta)}{\log y}; \tag{14}$$

$$\int_2^{2.1} \frac{\log(t-1)}{t}dt \leq \left(\frac{1}{2.05}\right)(1.1\log 1.1 - 0.1 + \Delta) \leq 0.0023432; \tag{15}$$

其中 $\Delta = 2\int_1^{1.1} \frac{(1.05-t)(t-1)}{(1+t)^2}dt \leq -0.0000377.$

$$\int_{2.1}^{2.3} \frac{\log(t-1)}{t}dt \leq \left(\frac{1}{2.2}\right)(1.3\log 1.3 - 1.1\log 1.1 - 0.2 + \Delta) \leq 0.0163666,$$

其中 $\Delta = 2\int_{1.1}^{1.3} \frac{(1.2-t)(t-1)}{(1+t)^2}dt \leq -0.000226.$

$$\int_{2.3}^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t}dt \leq \left(\frac{1}{2.4}\right)(1.5\log 1.5 - 1.3\log 1.3 - 0.2 + \Delta) \leq 0.0279039,$$

而 $\Delta = 2\int_{1.3}^{1.5} \frac{(1.4-t)(t-1)}{(1+t)^2}dt \leq -0.0001548$. 于是可得：

$$\int_2^{2.3} \frac{\log(t-1)}{t}dt \leq 0.01871, \tag{16}$$

$$\int_2^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t}dt \leq 0.046614. \tag{17}$$

我们有

$$\int_{1.5}^{2.5} \frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt \geq 0.027419 + \Delta_1 + 0.064194 + \Delta_2$$

$$\geq 0.134054, \tag{18}$$

其中

$$\Delta_1 = 2\int_{1.5}^{2} \frac{14t-21}{t(36t+1)}dt \geq 0.028865;$$

$$\Delta_2 = 2\int_{2}^{2.5} \frac{3.5t-7}{t(11.5t+1)}dt \geq 0.013577.$$

$$\int_{1.7}^{2.3} \frac{\log\left(2.3-\frac{3.3}{t+1}\right)}{t}dt \geq 0.022641 + \Delta \geq 0.052279, \tag{19}$$

其中

$$\Delta = 2\int_{1.7}^{2.5} \frac{110t-187}{t(304t+7)}dt \geq 0.029638;$$

$$\int_{1.9}^{2.1} \frac{\log\left(2.1-\frac{3.1}{t+1}\right)}{t}dt \geq 0.006349. \tag{20}$$

令 $s = 6-r-\frac{6-r}{t+1}$, 由 $t+1 = \frac{6-r}{6-r-s}$, $\frac{dt}{t} = \frac{ds}{s\left(1-\frac{s}{6-r}\right)}$ 可得

$$\int_{r-1}^{5-r} \frac{G\left(6-r-\frac{6-r}{t+1}\right)}{t}dt = \int_{7-r-\frac{6}{r}}^{5-r} \frac{G(s)ds}{s\left(1-\frac{s}{6-r}\right)}, \tag{21}$$

其中 $2 \leq r \leq 3$.

由 (11) 式可得

$$\begin{aligned}\int_{2.1}^{2.5} \frac{G(t)}{2t\left(1-\frac{t}{3.5}\right)}dt \geq\ & (0.255412)(G(4)) + (0.09782)(H(2.2))) \\ & +(0.01502)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.01762)(H(2.5)) \\ & +(0.019655)(H(2.7)) + (0.01825)(H(2.9)) \\ & +(0.00865)(H(3)) + \Delta,\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\Delta = \{H(2)\}\int_{2.1}^{2.5} \frac{2.5-t}{t\left(1-\frac{t}{3.5}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)}dt \geq 0.036365H(2.2)$. 若 $2.5 \leq r \leq 3$, 则有

$$2\sum_{q\in Q_i} P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{r}}) \leq \sum_{q\in Q_i}(M_{q,1}+M_{q,2}), \tag{23}$$

其中 $i=1$ 或 $i=2$,

$$M_{q,1}=2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{6-r}})-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{r}}}P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}),$$

$$M_{q,2}=\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{r}}}P(x,p_1p_2q,p_1)-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}<p<\underline{q}^{\frac{1}{r}}}P(x,pq,p).$$

我们有

$$M_{q,2}\le\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}<p_1<p_2<p_3<\underline{q}^{\frac{1}{r}}}P(x,p_1p_2p_3q,p_2).$$

由 $r\ge 2.5$ 得 $\left(\frac{1}{2r}\right)^{-1}\left(1-\frac{3}{2r}\right)\ge 2$. 于是由 (14) 式及引理 2 可得

$$\sum_{q\in Q_i}M_{q,2}\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log\underline{q}}\right)\left(\frac{2}{1.763}\right)\cdot\left(4r-12+6\log\frac{6-r}{r}\right),\tag{24}$$

又

$$\sum_{q\in Q_i}M_{q,1}\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left\{\left(\frac{1}{\log\underline{q}}\right)\cdot\left(2+2\int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\epsilon-2H(6-r)\right)-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{1}{p\log\underline{q}/p}\right)\left(\log\left(5-r-\frac{(6-r)\log p}{\log\underline{q}}\right)+G\left(6-r-\frac{(6-r)\log p}{\log\underline{q}}\right)\right)\right\}.$$

由

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{r}}}\frac{\log\left(5-r-\frac{(6-r)\log p}{\log\underline{q}}\right)+G\left(6-r-\frac{(6-r)\log p}{\log\underline{q}}\right)}{p\log\underline{q}/p}\ge\left(\frac{1-\epsilon}{\log\underline{q}}\right)\left(\int_{r-1}^{5-r}\frac{\log\left(5-r-\frac{6-r}{t+1}\right)+G\left(6-r-\frac{6-r}{t+1}\right)}{t}dt\right),$$

知，成立

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,1} \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log \underline{q}}\right)$$

$$\cdot\Bigg(2+2\int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}dt+2\epsilon-2H(6-r)$$

$$-\int_{r-1}^{5-r}\frac{\log\left(5-r-\frac{6-r}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{r-1}^{5-r}\frac{G\left(6-r-\frac{6-r}{t+1}\right)}{t}dt\Bigg). \qquad (25)$$

由 (23) - (25) 式得：

$$\sum_{q\in Q_i} P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{r}}) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\Bigg\{1+\int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$+\left(\frac{1}{1.763}\right)\left(4r-12+6\log\frac{6-r}{r}\right)$$

$$-\int_{r-1}^{5-r}\frac{\log\left(5-r-\frac{6-r}{t+1}\right)+G\left(6-r-\frac{6-r}{t+1}\right)}{2t}dt$$

$$-H(6-r)+\epsilon\Bigg\}.$$

因而我们得到

$$H(r)\ge H(6-r)+\sum(r)+\int_{r-1}^{5-r}\frac{G\left(6-r-\frac{6-r}{t+1}\right)}{2t}dt-2\epsilon, \qquad (26)$$

其中 $2.5\le r\le 3$,

$$\sum(r)=\int_{r-1}^{5-r}\frac{\log\left(5-r-\frac{6-r}{t+1}\right)}{2t}dt$$

$$-\int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{4r-12+6\log\frac{6-r}{r}}{1.763}.$$

由 (17),(18) 式，注意到

$$\sum(2.5)\ge\int_{1.5}^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{2t}dt-\int_2^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{6\log\frac{3.5}{2.5}-2}{1.763}$$

$$\ge 0.00973; \qquad (27)$$

由 (16),(19) 式，注意到

$$\sum(2.7) \geq \int_{1.7}^{2.3} \frac{\log\left(2.3-\dfrac{3.3}{t+1}\right)}{2t}dt - \int_{2}^{2.3}\frac{\log(t-1)}{t}dt - \frac{6\log\dfrac{3.3}{2.7}-1.2}{1.763}$$
$$\geq 0.00513; \qquad (28)$$

由于 (15),(20) 式，我们得

$$\sum(2.9) \geq \int_{1.9}^{2.1} \frac{\log\left(2.1-\dfrac{3.1}{t+1}\right)}{2t}dt - \int_{2}^{2.1}\frac{\log(t-1)}{t}dt - \frac{6\log\dfrac{3.1}{2.9}-0.4}{1.763}$$
$$\geq 0.000745. \qquad (29)$$

由于 (12) 及 (13) 式，得：

$$G(4) \geq \int_3^4 \frac{H(t)}{t}dt - \epsilon \geq \int_3^4 \frac{dt}{t}\int_{t-1}^4 \frac{G(s)}{s}ds - 2\epsilon \geq (G(4))M_1 + M_2 - 3\epsilon.$$

其中

$$M_1 = \int_3^4 \frac{\log\dfrac{4}{t-1}}{t}dt \geq \left(\log\frac{4}{3}\right)^2 + 2\int_3^4 \frac{4-t}{t(2+t)}dt \geq 0.13955,$$

$$M_2 = \int_3^4 \frac{dt}{t}\int_{t-1}^4 \frac{ds}{s}\int_{s-1}^3 \frac{H(r)}{r}dr$$
$$= \int_1^2 \frac{H(r)}{r}dr\int_3^{r+2}\frac{\log\dfrac{r+1}{t-1}}{t}dt + \int_2^3 \frac{H(r)}{r}dr\int_3^4\frac{\log\dfrac{r+1}{t-1}}{t}dt$$
$$= M_3 + M_4,$$

$$M_3 \geq (H(2))\int_1^2 \frac{dr}{r}\int_3^{r+2}\frac{2(r-t+2)}{t(r+t)}dt$$
$$\geq \left(\frac{H(2)}{3}\right)\int_1^2 \left\{\frac{(r-1)^2}{r(r+3)}\right\}\left(1-\frac{r-1}{9}-\frac{r-1}{9+3r}\right)dr.$$

由

$$\int_1^2 \frac{(r-1)^2}{r(r+3)}dr = \frac{1}{30} + \left(\frac{1}{3}\right)\int_1^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+3}\right)\left\{\frac{(r-1)^3}{r(r+3)}\right\}dr,$$

得到

$$M_3 \geq \left(\frac{H(2)}{3}\right)\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{720}\right) \geq 0.01157H(2),$$

$$M_4=\int_2^3\frac{H(r)}{r}dr\int_3^4\frac{\log\frac{r+1}{3}}{t}dt+\int_2^3\frac{H(r)}{r}dr\int_3^4\frac{\log\frac{3}{t-1}}{t}dt$$

$$\geq\left(\log\frac{4}{3}\right)\int_2^3\frac{2(r-2)H(r)}{r(r+4)}dr+2\int_2^3\frac{H(r)}{r}dr\int_3^4\frac{4-t}{t(2+t)}dt$$

$$\geq 0.00629H(2.2)+0.00477H\left(\frac{7}{3}\right)+0.00648H(2.5)$$

$$+0.00838H(2.7)+0.00888H(2.9)+0.00459H(3).$$

因此我们得到

$$G(4)\geq\left(\frac{1}{0.8605}\right)\Big\{0.01786H(2.2)+0.00477H\left(\frac{7}{3}\right)+0.00648H(2.5)$$

$$+0.00838H(2.7)+0.00888H(2.9)+0.00459H(3)\Big\}. \tag{30}$$

由 (11) 式得:

$$\int_3^4\frac{G(t)}{t}dt\geq\left(\log\frac{4}{3}\right)(G(4))+\int_3^4\frac{dt}{t}\int_{t-1}^3\frac{H(s)}{s}ds-\epsilon$$

$$=\left(\log\frac{4}{3}\right)(G(4))+\int_2^3\frac{H(s)}{s}ds\int_3^{s+1}\frac{dt}{t}-\epsilon$$

$$\geq\left(\log\frac{4}{3}\right)(G(4))+(0.003059)(H(2.2))+(0.004991)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$+(0.00893)(H(2.5))+(0.01395)(H(2.7))$$

$$+(0.01678)(H(2.9))+(0.00926)(H(3)). \tag{31}$$

$$\int_{2.5}^3\frac{G(t)}{t}dt\geq\left(\log\frac{3}{2.5}\right)(G(4))+\int_{2.5}^3\frac{dt}{t}\int_{t-1}^3\frac{H(s)}{s}ds-\epsilon$$

$$\geq\left(\log\frac{3}{2.5}\right)(G(4))+\int_{2.5}^3\frac{dt}{t}\int_2^3\frac{H(s)}{s}ds$$

$$+(H(2))\int_{2.5}^3\frac{\log\frac{2}{t-1}}{t}dt-\epsilon$$

$$\geq(\log 1.2)(G(4))+(0.01737)(H(2.2))+(0.01072)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$+(0.01257)(H(2.5))+(0.01403)(H(2.7))$$

$$+(0.01302)(H(2.9))+(0.00618)(H(3))+\Delta, \tag{32}$$

其中

$$\Delta=(H(2))\left(-2\log\frac{4}{3.5}+6\log 1.2-6\log\frac{4}{3.5}\right)\geq(0.025671)(H(2)).$$

当 $3.1 \le r \le 3.5$ 时，我们有：

$$H(r) \ge \int_{2.5}^{4} \frac{G(t)}{t} dt + \int_{r-1}^{2.5} \frac{G(t)}{t} dt - \epsilon. \tag{33}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{2.3}^{2.5} \frac{G(t)}{t} dt + \int_{2\frac{7}{90}}^{2.3} \frac{G(t)}{2t\left(1-\frac{t}{3.3}\right)} dt \\
&\ge \left\{ \log \frac{2.5}{2.3} + \int_{\frac{187}{90}}^{2.3} \frac{dt}{2t\left(1-\frac{t}{3.3}\right)} \right\} \left\{ G(4) + \int_{1.5}^{3} \frac{H(t)}{t} dt \right\} \\
&\quad + \{H(2)\} \left\{ \int_{2.3}^{2.5} \frac{2(2.5-t)}{t(t+\frac{1}{2})} dt + \int_{\frac{187}{90}}^{2.3} \frac{(5-2t)dt}{2t\left(1-\frac{t}{3.3}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)} \right\} - \epsilon \\
&\ge (0.23452)(G(4)) + (0.08982)(H(2.2)) + (0.01379)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) \\
&\quad + (0.01618)(H(2.5)) + (0.01804)(H(2.7)) + (0.01675)(H(2.9)) \\
&\quad + (0.00795)(H(3)) + \Delta,
\end{aligned} \tag{34}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Delta &= \{H(2)\}\left\{ 10 \log \frac{2.5}{2.3} - 12 \log \frac{3}{2.8} + 5 \log \frac{(23)(9)}{187} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{4}{19}\right)\left(\log \frac{11}{9}\right) - \left(\frac{99}{19}\right)\left(\log \frac{63}{58}\right) \right\} \\
&\ge 0.04083 H(2).
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{2.1}^{2.5} \frac{G(t)}{t} dt + \int_{2\frac{9}{290}}^{2.1} \frac{G(t)}{2t\left(1-\frac{t}{3.1}\right)} dt \\
&\ge \left(\log \frac{2.5}{2.1} + \frac{\log \frac{2.1}{1.9}}{2} \right) \left(G(4) + \int_{1.5}^{3} \frac{H(t)}{t} dt \right) \\
&\quad + (H(2)) \left\{ \int_{2.1}^{2.5} \frac{5-2t}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)} dt + \int_{2\frac{9}{290}}^{2.1} \frac{2.5-t}{t\left(1-\frac{t}{3.1}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)} dt \right\} - \epsilon
\end{aligned}$$

$$\geq (0.22439)(G(4)) + (0.08594)(H(2.2)) + (0.0132)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.01548)(H(2.5)) + (0.01726)(H(2.7)) + (0.01603)(H(2.9))$$
$$+(0.0076)(H(3)) + \Delta, \quad (35)$$

其中

$$\Delta = \{H(2)\}\left\{10\log\frac{2.5}{2.1} - 12\log\frac{3}{2.6} + \int_{2\frac{9}{290}}^{2.1}\left(\frac{5}{t} - \frac{1}{18.6\left(1-\frac{t}{3.1}\right)} - \frac{31}{6\left(t+\frac{1}{2}\right)}\right)dt\right\}$$
$$\geq 0.04327H(2).$$

由于 (31) 及 (32), 有

$$\int_{2.5}^{4}\frac{G(t)}{t}dt \geq (\log 1.6)(G(4)) + (0.04609)(H(2.2)) + (0.01571)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.0215)(H(2.5)) + (0.02798)(H(2.7)) + (0.0298)(H(2.9))$$
$$+(0.01544)(H(3)). \quad (36)$$

由 (26),(27),(21),(22),(36),(33) 及 (30), 我们得到

$$H(2.5) \geq 0.00973 + \int_{2.5}^{4}\frac{G(t)}{t}dt + \int_{2.1}^{2.5}\frac{G(t)}{2t\left(1-\frac{t}{3.5}\right)}dt - 3\epsilon$$
$$\geq 0.00973 + (0.19529)(H(2.2)) + (0.03475)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.04458)(H(2.5)) + (0.05469)(H(2.7))$$
$$+(0.05553)(H(2.9)) + (0.02795)(H(3)).$$

于是引理 3 第一式得证.

由 (26),(28),(21),(33),(36),(34) 及 (30) 得

$$H(2.7) \geq 0.00513 + (0.19132)(H(2.2)) + (0.0334)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.04298)(H(2.5)) + (0.05288)(H(2.7))$$
$$+(0.05382)(H(2.9)) + (0.02714)(H(3)).$$

于是第二式得证.

由 (26),(29),(21),(33),(35),(36) 及 (30) 得:

$$H(2.9) \geq 0.000745 + (0.18968)(H(2.2)) + (0.03275)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.0422)(H(2.5)) + (0.052)(H(2.7)) + (0.05299)(H(2.9))$$
$$+(0.02674)(H(3)).$$

于是第 3 式得证.

引理 4.

$$H\left(\frac{7}{3}\right) \geq 0.01411 + (0.15847)(H(2.2)) + (0.04353)(H(2.5))$$
$$+(0.05365)(H(2.7)) + (0.05468)(H(2.9)) + (0.02759)(H(3)).$$

证. 有

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dt}{t(\log t)^2} \int_t^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{ds}{s \log s} = (\log y)^{-1}\left(\beta - \alpha + a \log \frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{37}$$

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dt}{t \log t} \int_t^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{ds}{s(\log s)^2} = \frac{\alpha - \beta - \beta \log \frac{\alpha}{\beta}}{\log y}. \tag{38}$$

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dt}{t \log t} \int_t^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{ds}{s \log s} \int_s^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dr}{r(\log r)^2} \int_r^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{du}{u \log u}$$
$$= \left(\frac{1}{\log y}\right)\left\{3(\beta - \alpha) + (\alpha + 2\beta)\left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\}. \tag{39}$$

若 $m > n$, 则

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{du}{u} \int_u^{\frac{1}{n}} \frac{dv}{v(1-u-v)} = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{dv}{v} \int_{\frac{1}{m}}^{v} \frac{du}{u(1-u-v)}$$
$$= \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{\log(m-1-mv) - \log \frac{1-2v}{v}}{v(1-v)} dv,$$

其中 m, n 是正整数. 令 $v = \frac{1}{s+1}$, 则 $\frac{dv}{v(1-v)} = -\frac{ds}{s}$, $\frac{1-2v}{v} = s - 1$. 因而

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{dv}{v} \int_v^{\frac{1}{n}} \frac{du}{u(1-u-v)}$$
$$= \int_{n-1}^{m-1} \frac{\log\left(m - 1 - \frac{m}{s+1}\right) - \log(s-1)}{s} ds. \tag{40}$$

若 $5 \geq w > u,\ m > n > 2$, 则

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{dr}{r} \int_{\frac{1}{w}}^{\frac{1}{u}} \frac{ds}{s(1-r-s)}$$

$$= \int_{n-1}^{m-1} \frac{\log\left(m-1-\frac{w}{t+1}\right) - \log\left(u-1-\frac{u}{t+1}\right)}{t} dt. \tag{41}$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{2.5}^{2.75} \frac{\log(t-1)}{t} dt &= \left(\frac{1}{2.625}\right)\left\{\int_{1.5}^{1.75} \log t dt\right. \\ &\quad \left. + \int_{1.5}^{1.75} \frac{(1.625-t)\left(\log 1.5 + \log \frac{t}{1.5}\right)}{1+t} dt\right\} \\ &\leq \left(\frac{1}{2.625}\right)\left\{1.75 \log \frac{1.75}{1.5} - 0.75 + 11.25 \log \frac{3.25}{3}\right. \\ &\quad \left. -26.25\left(\log \frac{2.75}{2.5} - \log \frac{3.25}{3}\right)\right\} + (\log 1.5)(\log 1.1) \\ &\leq 0.0460634.\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\int_{2.75}^{3} \frac{\log(t-1)}{t} dt &= \left(\frac{1}{2.875}\right)\left\{\int_{1.75}^{2} \log t dt + \int_{1.75}^{2} \frac{(1.875-t)(\log t) dt}{1+t}\right\} \\ &\leq \left(\frac{1}{2.875}\right)\left\{2 \log \frac{2}{1.75} - 0.75 + 12.75 \log \frac{3.75}{3.5}\right. \\ &\quad \left. -\left(\frac{15.8125}{0.75}\right)\left(\log \frac{3}{2.75} - \log \frac{3.75}{3.5}\right)\right\} \\ &\quad +(\log 1.75)\left(\log \frac{3}{2.75}\right) \\ &\leq 0.0545477.\end{aligned} \tag{43}$$

由 (17),(42),(43) 我们有

$$\int_{2}^{3} \frac{\log(t-1)}{t} dt \leq 0.1472251. \tag{44}$$

$$\int_{2}^{3} \frac{\log\left(3 - \frac{4}{t+1}\right)}{t} dt \geq 0.2071219 + \Delta \geq 0.246191, \tag{45}$$

其中

$$\Delta = 2\int_2^3 \frac{4t-8}{t(14t+2)}dt \geq 0.0390691.$$

我们有

$$\int_{1.6}^2 \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt = \left(\log\frac{19}{13}\right)\left(\log\frac{5}{4}\right) + \int_{1.6}^2 \frac{\log\frac{39t-13}{19t+19}}{t}dt$$

$$\geq 0.0846806 + \Delta \geq 0.099797, \tag{46}$$

其中

$$\Delta = 2\int_{1.6}^2 \frac{20t-32}{t(58t+6)}dt \geq 0.1454644 - 0.130348.$$

当 $i = 1$ 或 2 时我们有

$$3\sum_{q\in Q_i} P(x, q, \underline{q}^{\frac{3}{7}}) \leq \sum_{q\in Q_i}(M_{q,3} + M_{q,4}), \tag{47}$$

其中

$$M_{q,3} = 3P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{4}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, pq, \underline{q}^{\frac{1}{4}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leq \underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x, pq, \underline{q}^{\frac{1}{4}})$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, p_1p_2q, \underline{q}^{\frac{1}{4}});$$

$$M_{q,4} = \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, p_1p_2q, p_1) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, pq, p)$$

$$- \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\leq \underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x, p_1p_2p_3q, p_1) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, pq, p).$$

我们有

$$M_{q,4} \leq \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leq \underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, p_1p_2p_3q, p_2)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\leq \underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2<p_3\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, p_1p_2p_3q, p_2)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2<p_3<p_4\leq \underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x, p_1p_2p_3p_4q, p_3).$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,3} \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left(3+3\int_2^3 \frac{\log(t-1)}{t}dt+2\epsilon\right.$$

$$-\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-\int_2^3\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{1-H(2)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta-3H(4)$$

$$\left.-\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-\int_2^3\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\right).$$

由 (40) 式我们有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}=\int_2^3\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)-\log(t-1)}{t}dt.$$

因而有

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,3} \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left(3+2\int_2^3 \frac{\log(t-1)}{t}dt+2\epsilon\right.$$

$$-\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-(H(2))\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}$$

$$\left.-3H(4)-\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-\int_2^3\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\right).$$

由 $\left(\frac{14}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}-\frac{3}{7}\right)=\frac{17}{9}$, 引理 2 及 (37) - (39) 式，得

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,4} \le \left(\frac{8x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left\{\left(\frac{1}{1.763}\right)\left(\int_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}}^{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{du}{u\log u}\int_u^{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{dv}{v(\log v)^2}\right.\right.$$

$$\left.\int_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dw}{w\log w}+\int_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}}^{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{du}{u\log u}\int_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dv}{v(\log v)^2}\int_v^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dw}{w\log w}\right)$$

$$\left.+\int_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{du}{u\log u}\int_u^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dv}{v\log v}\int_v^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dw}{w(\log w)^2}\int_w^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dt}{t\log t}\right\}$$

$$\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\frac{0.06839}{\log \underline{q}}.$$

又有

$$\int_{\frac{4}{3}}^{1.6}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\geq 0.04582+\Delta\geq 0.057811, \tag{48}$$

其中

$$\Delta=2\int_{\frac{4}{3}}^{1.6}\frac{12t-16}{t(30t+2)}dt\geq 0.011991.$$

由 (47),(44),(45),(46) 及 (48) 式，得

$$\sum_{q\in Q_i}P(x,q,\underline{q}^{\frac{3}{7}})\leq\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\underline{q}}\right)$$
$$\cdot\left(1-0.013652-H(4)-\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}dt-\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}dt\right.$$
$$\left.-(H(2))\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{3\beta(1-\alpha-\beta)}\right).$$

因此我们有

$$H\left(\frac{7}{3}\right)\geq 0.013652+H(4)+(H(2))\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{3\beta(1-\alpha-\beta)}$$
$$+\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}dt+\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}dt.$$

令 $y=4-\frac{4}{t+1}$, 则 $dy=\frac{y(4-y)}{4t}dt$, 由 (11) 式我们有

$$\int_{\frac{4}{3}}^{2}\frac{G\left(4-\frac{4}{t-1}\right)}{t}dt=\int_{\frac{16}{7}}^{\frac{8}{3}}\frac{G(y)dy}{y\left(1-\frac{y}{4}\right)}$$
$$\geq\left(\log\frac{3}{2}\right)\left\{G(4)+\int_{2}^{3}\frac{H(t)}{t}dt+(H(2))\left(\log\frac{6}{5}\right)\right\}+\Delta$$
$$\geq\left(\log\frac{3}{2}\right)(G(4))+(0.02385)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)+(0.02797)(H(2.5))$$
$$+(0.0312)(H(2.7))+(0.02897)(H(2.9))+(0.01374)(H(3))$$
$$+(0.16193)(H(2.2)), \tag{49}$$

其中

$$\Delta = 2\{H(2)\}\int_{\frac{16}{7}}^{\frac{8}{3}} \frac{8-3t}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)(3t+2)}dt \geq (0.049361)(H(2)).$$

我们有

$$\int_2^3 \frac{G\left(4-\frac{4}{t-1}\right)}{t}dt = \int_{\frac{8}{3}}^3 \frac{G(y)}{y\left(1-\frac{y}{4}\right)}dy$$

$$\geq \left(\log\frac{3}{2}\right)\{G(4)\} + \int_{\frac{8}{3}}^3 \frac{H(2)\log\frac{2}{t-1}}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)}dt + \int_{\frac{8}{3}}^3 \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{4}\right)}$$

$$\cdot\left\{(\log 1.1)(H(2.2)) + \left(\log\frac{7}{6.6}\right)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + \left(\log\frac{7.5}{7}\right)(H(2.5))\right.$$

$$\left. + \left(\log\frac{2.7}{2.5}\right)(H(2.7)) + \left(\log\frac{2.9}{2.7}\right)(H(2.9)) + \left(\log\frac{3}{2.9}\right)(H(3))\right\} - \epsilon,$$

$$\int_{\frac{8}{3}}^3 \frac{\log\frac{2}{t-1}}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)}dt \geq 2\int_{\frac{8}{3}}^3 \frac{3-t}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)(t+1)}dt \geq 0.034751.$$

因而

$$\int_2^3 \frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt \geq \left(\log\frac{3}{2}\right)(G(4)) + (0.07339)(H(2.2))$$

$$+ (0.02385)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.02797)(H(2.5)) + (0.0312)(H(2.7))$$

$$+ (0.02897)(H(2.9)) + (0.01374)(H(3)). \tag{50}$$

由 (40),(44) 及 (45) 式有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} = \int_2^3 \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right) - \log(t-1)}{t}dt$$

$$\geq 0.0989659. \tag{51}$$

由 (49) - (51), (13), (31), 及 (30) 式有

$$H\left(\frac{7}{3}\right) \geq 0.013652 + (0.1533)(H(2.2)) + (0.03268)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.04211)(H(2.5)) + (0.0519)(H(2.7)) + (0.0529)(H(2.9))$$
$$+(0.02669)(H(3)).$$

于是引理 4 得证.

III. 定理 1 的证明

我们有

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dt}{t\log t}\int_{t}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{ds}{s\log s}\int_{s}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{dr}{r(\log r)^2}$$
$$= \frac{\alpha-\beta-\beta\log\frac{\alpha}{\beta}-\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\log\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}{\log y}, \tag{52}$$

$$\int_{1.2}^{1.6} \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt \geq 0.0480584 + \Delta \geq 0.0798696, \tag{53}$$

其中

$$\Delta = 2\int_{1.2}^{1.6} \frac{20t-24}{t(46t+2)}dt \geq 0.0318112.$$

由 (46) 和 (53) 式，我们有

$$\int_{1.2}^{2} \frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt \geq 0.1796665 + \Delta \geq 0.2784415, \tag{54}$$

其中

$$\Delta = \int_{1.2}^{2} \frac{\log\frac{3.5t-1}{3t-1}}{t}dt \geq 0.0931345 + 2\int_{1.2}^{2} \frac{2-t}{t(71t-22)}dt \geq 0.098775.$$

我们有

$$\int_{\frac{13}{8}}^{2} \frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt \geq 0.03877 + \Delta \geq 0.046314, \tag{55}$$

其中

$$\Delta = 2\int_{\frac{13}{8}}^{\frac{14}{8}} \frac{8t-13}{t(22t+1)}dt + 2\int_{\frac{14}{8}}^{2} \frac{28t-49}{t(82t+5)}dt \geq 0.007544.$$

若 $m \geq 2$, $l \geq 4$, 则

$$\int_2^m \frac{(t-2)^{l-1}}{t^l} dt = \sum_{i=l}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^i. \tag{56}$$

由 (56) 式得

$$\int_2^{2.5} \frac{(t-2)^3}{t^4} dt \leq \frac{48}{10^5}; \quad \int_2^{2.5} \frac{(t-2)^5}{t^6} dt \leq \frac{4}{(3)(10^5)}.$$

因此:

$$\int_2^{2.5} \frac{\log \dfrac{2t-1}{t+1}}{t} dt \leq 2\int_2^{2.5} \left\{\frac{t-2}{3t^2} + \frac{(t-2)^3}{81t^4} + \frac{(t-2)^5}{243t^6}\right\} dt$$
$$\leq 0.015442. \tag{57}$$

由 (56) 有

$$\int_2^3 \frac{(t-2)^3 dt}{t^4} \leq \sum_{i=4}^{7} \frac{1}{3^i i} + \frac{1}{(8)(3^8)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)} \leq 0.00424,$$
$$\int_2^3 \frac{(t-2)^5 dt}{t^6} \leq 0.00033.$$

因而

$$\int_2^3 \frac{\log \dfrac{2t-1}{t+1}}{t} dt \leq 2\int_2^3 \left(\frac{t-2}{3t^2} + \frac{(t-2)^3}{81t^4} + \frac{(t-2)^5}{243t^6}\right) dt$$
$$\leq 0.048196. \tag{58}$$

我们有

$$\int_3^{3.5} \frac{t-3}{t(13t+1)} dt \leq 0.0008491.$$

由

$$\int_3^{3.5} \frac{(t-3)^3}{t(13t+1)^3} dt \leq \left(\frac{1}{28}\right)\left(\frac{1}{93}\right)^3 + \int_3^{3.5} \frac{(t-3)^3 dt}{7t(13t+1)^3},$$

得

$$\int_3^{3.5} \frac{(t-3)^3}{t(13t+1)^3} dt \leq \left(\frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{93}\right)^3.$$

进而

$$\int_3^{3.5}\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{t}dt \le 0.034398+2\int_3^{3.5}\left\{\frac{3(t-3)}{t(13t+1)}+\frac{28(t-3)^3}{3(13t+1)^3t}\right\}dt$$
$$\le 0.039496. \tag{59}$$

令

$$f(n)=\int_2^n\frac{\log(t-1)}{t}dt-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{\log\left(n-\dfrac{n+1}{t+1}\right)}{t}dt$$
$$-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{t}dt.$$

当 $n\ge 2$ 时，我们有

$$f'(n)=\frac{\log(n-1)}{n}-\frac{\log(n-1)}{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{t}{t(nt-1)}dt$$
$$-\left(\frac{1}{2n}\right)\left(\log\frac{2n-1}{n+1}\right)$$
$$=0.$$

当 $n\ge 2$ 时，由 $f(2)=0$, 得

$$\int_2^n\frac{\log(t-1)}{t}dt-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{\log\left(n-\dfrac{n+1}{t+1}\right)}{t}dt=\int_2^n\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{2t}dt. \tag{60}$$

设 $q\in Q_i$ $(i=1$ 或 $2)$, 则

$$3P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}})\le 2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4}})-\sum_{\underline{q}^{\frac14}<p\le\underline{q}^{\frac13}}P(x,pq,p)-\sum_{\underline{q}^{\frac14}<p\le\underline{q}^{\frac13}}P(x,pq,\underline{q}^{\frac14})$$
$$+\sum_{\underline{q}^{\frac14}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac13}}P(x,p_1p_2q,p_1)+P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{3.5}})$$
$$-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p\le\underline{q}^{\frac13}}P(x,pq,p)-3\sum_{\underline{q}^{\frac13}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}}P(x,pq,p). \tag{61}$$

$$P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}})\le P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p<\underline{q}^{\frac14}}P(x,pq,p)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p<\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,qp_1p_2,p_1)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p<\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4}})+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}} P\left(x,qp_1p_2,\left(\frac{x^{\frac{1}{2}-\epsilon}}{qp_1p_2}\right)^{\frac{1}{2.2}}\right)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}>\underline{q}^{\frac{1}{4}}>p_3\ge\left(\frac{x^{\frac{1}{2}-\epsilon}}{qp_1p_2}\right)^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_3)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_1)\\
&+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,qp_1p_2,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_1)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_1)+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,qp_1p_2,p_1)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp_1p_2,p_1)\\
&+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp_1p_2,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_1)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_1)\\
&+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp_1p_2,p_1)+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp_1p_2,p_1)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp,p). \qquad (62)
\end{aligned}
$$

我们有:

$$P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}) \le P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p<\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) + \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2,p_1).$$

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,p_1) &= \frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,p_1p_2q,p_1)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,p_1)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)\\
&+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)\\
&-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_1) + \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,p_1)\\
&+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2,p_1). \qquad (63)\end{aligned}$$

对 $i=1$ 或 $i=2$, 由 (61) – (63) 式有

$$5\sum_{q\in Q_i} P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}) \le \sum_{q\in Q_i}(S_q^{(1)}+S_q^{(2)}+S_q^{(3)}+S_q^{(4)}), \qquad (64)$$

其中

$$S_q^{(1)} = 2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,qp,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p<\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})$$

$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) + \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,p_1p_2q,p_1) + \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,p_1p_2q,p_1).$$

$$S_q^{(2)} = 2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4}}) + P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}) - 2\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p<\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4}})$$

$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})$$

$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}} P(x,p_1p_2q,(\underline{q}/p_1p_2)^{\frac{1}{2.2}}).$$

$$S_q^{(3)} = \frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,p_1p_2q,p_1) + \frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,p_1)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,qp,p) - \frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)$$

$$-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)$$

$$-\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le q^{\frac{1}{4}}<p_2\le q^{\frac{1}{3.5}}<p_3\le q^{\frac{8}{21}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)$$

$$-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}>\underline{q}^{\frac{1}{4}}>p_3\ge(\underline{q}/p_1p_2)^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_3).$$

$$S_q^{(4)}=\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,p_1)+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2q,p_1)$$

$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,p_1p_2q,p_1)+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,p_1p_2q,p_1)$$

$$-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,pq,p)-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,pq,p)$$

$$-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)$$

$$-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1)-3\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,pq,p)$$

$$-\sum_{\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,pq,p).$$

对 $i=1$ 或 $i=2$, 由 (64) 式有

$$\sum_{q\in Q_i} S_q^{(1)}\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left\{\left(\frac{2}{\log\underline{q}}\right)\left(1+\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\epsilon\right.\right.$$

$$\left.-H(4.5)\right)-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}}\left(\frac{1}{p\log\underline{q}/p}\right)\left(\log(3.5-\frac{4.5\log p}{\log\underline{q}}\right)$$

$$\left.+G\left(4.5-\frac{4.5\log p}{\log\underline{q}}\right)\right)-\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{p\log\underline{q}/p}\right)\left(\log\left(3.5-\frac{4.5\log p}{\log\underline{q}}\right)\right.$$

$$\left.+G\left(4.5-\frac{4.5\log p}{\log\underline{q}}\right)\right)-\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}}\left(\frac{1}{p\log\underline{q}/p}\right)\left(\log\left(3.5-\frac{4.5\log p}{\log\underline{q}}\right)\right.$$

$$\left.+G\left(4.5-\frac{4.5\log p}{\log\underline{q}}\right)\right)+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}}\frac{1-H(2.2)}{p_1p_2\log\dfrac{\underline{q}}{p_1p_2}}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{p_1p_2\log\dfrac{\underline{q}}{p_1p_2}}\right)\left(2-H\left(4.5-\frac{4.5\log p_1p_2}{\log\underline{q}}\right)\right.$$

$$-H\left(\frac{\log \underline{q}/p_2}{\log p_1}-1\right)\right)+\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le \underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}}\left(\frac{1}{p_1p_2\log\frac{\underline{q}}{p_1p_2}}\right)$$

$$\cdot\left(1-H\left(4.5-\frac{4.5\log p_1p_2}{\log \underline{q}}\right)\right)$$

$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le \underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{1-H\left(4.5-\frac{4.5\log p_1p_2}{\log \underline{q}}\right)}{p_1p_2\log\frac{\underline{q}}{p_1p_2}}\Bigg\}.$$

若 $5\ge l>m\ge 2.2,\ 2\le n\le 5$, 则

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{l}}<p\le \underline{q}^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{p\log \underline{q}/p}\right)\left\{\log\left(n-1-\frac{n\log p}{\log \underline{q}}\right)+G\left(n-\frac{n\log p}{\log \underline{q}}\right)\right\}$$

$$\ge\int_{\underline{q}^{\frac{1}{l}}}^{\underline{q}^{\frac{1}{m}}}\frac{(1-\epsilon)dt}{t(\log t)(\log \underline{q}/t)}\left\{\log\left(n-1-\frac{n\log t}{\log \underline{q}}\right)+G\left(n-\frac{n\log t}{\log \underline{q}}\right)\right\}$$

$$\ge(1-\epsilon)\int_{m-1}^{l-1}\frac{\log\left(n-1-\frac{n}{t+1}\right)+G\left(n-\frac{n}{t+1}\right)}{t\log \underline{q}}dt. \tag{65}$$

由 (65) 式，我们有

$$\sum_{q\in Q_i}S_q^{(1)}\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left\{2+2\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+2\epsilon\right.$$

$$-\int_{1.2}^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_3^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}$$

$$+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}$$

$$+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}-2H(4.5)-\int_{1.2}^{3.5}\frac{G\left(4.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{3}^{3.5}\frac{G\left(4.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{G\left(4.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$-\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{H(2.2)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\Big(H(4.5-4.5\alpha$$

$$-4.5\beta)+H\left(\frac{1-\beta}{\alpha}-1\right)\Big)\left(\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta$$

$$-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta\Big\}. \tag{66}$$

当 $i=1$ 或 $i=2$ 时，由 (64) 式我们有

$$\sum_{q\in Q_i}S_q^{(2)}\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\Big\{\left(\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\Big(3+2\int_{2}^{3}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$+\int_{2}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\epsilon-2H(4)-H(3.5)\Big)$$

$$-2\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{p\log \underline{q}/p}\right)\left(\log\left(3-\frac{4\log p}{\log \underline{q}}\right)+G\left(4-\frac{4\log p}{\log \underline{q}}\right)\right)$$

$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{1-H(2.2)}{p_1p_2\log\frac{\underline{q}}{p_1p_2}}+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}}\frac{1-H(2.2)}{p_1p_2\log\frac{\underline{q}}{p_1p_2}}\Big\}$$

$$\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\Big(3+\int_{2}^{3}\frac{2\log(t-1)}{t}dt+\int_{2}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}$$

$$+\epsilon-2H(4)-H(3.5)-2\int_{2}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$-2\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{H(2.2)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta$$

$$-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}}\frac{H(2.2)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta\Big). \tag{67}$$

当 $i=1$ 或 $i=2$ 时，由 (66) 及 (67) 式有

$$\sum_{q\in Q_i}(S_q^{(1)}+S_q^{(2)})\le\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)(N_1-N_2), \tag{68}$$

其中

$$\begin{aligned}N_1 =& 5+2\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+2\int_2^{3}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\int_2^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt\\ &+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\\ &+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\\ &+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+3\epsilon\\ &-\int_{1.2}^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_3^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt\\ &-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(3.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-2\int_2^{3}\frac{\log\left(3-\dfrac{4}{t+1}\right)}{t}dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_2 =& 2H(4.5)+2H(4)+H(3.5)+\int_{1.2}^{3.5}\frac{G\left(4.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt\\ &+\frac{1}{2}\int_3^{3.5}\frac{G\left(4.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{G\left(4.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt\\ &+2\int_2^{3}\frac{G\left(4-\dfrac{4}{t+1}\right)}{t}dt+\{H(2.2)\}\left\{\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right.\\ &\left.+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)+H\left(\frac{1-\beta}{\alpha}-1\right)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta$$

$$+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta.$$

我们有

$$N_1=5+\int_3^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+2\int_2^3\frac{\log(t-1)}{t}dt+2\int_2^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

$$+3\epsilon-\left(\frac{1}{2}\right)\int_{1.2}^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-\left(\frac{1}{2}\right)\int_{1.2}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$-\int_2^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt+N_1^*, \quad (69)$$

其中

$$N_1^*=\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\int_{2.5}^{3}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_{1.2}^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_3^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$-2\int_2^3\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{1.2}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$+\int_2^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt$$

$$+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}.$$

$$+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}.$$

由 (40) 及 (41) 式得

$$\begin{aligned}
N_1^* =& \left(\int_3^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\int_3^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right)+\left(\int_2^3\frac{\log(t-1)-\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right)+\left(\int_{2.5}^3\frac{\log(t-1)-\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right)\\
&+\left(\int_{1.2}^3\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)-\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{2t}dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\beta}{2\beta(1-\alpha-\beta)}\right)\\
&+\left(\int_2^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)-\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right)\\
&+\left(\int_{\frac{13}{8}}^2\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)-\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right)\\
=& 0. \qquad (70)
\end{aligned}$$

由 (60) 式我们有

$$\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_2^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_2^{3.5}\frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt.$$

$$\int_2^3 \frac{\log(t-1)}{t}dt - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt.$$

$$2\int_2^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t}dt - \int_2^{2.5} \frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt = \int_2^{2.5} \frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt.$$

因此由 (69) 及 (70) 式，我们有

$$\begin{aligned} N_1 &= 5 + \int_2^{2.5} \frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt \\ &+\frac{1}{2}\int_2^{3.5} \frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt - \frac{1}{2}\int_{1.2}^2 \frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt \\ &-\frac{1}{2}\int_{1.2}^2 \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt - \int_{\frac{13}{8}}^2 \frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt. \end{aligned}$$

由 (57), (58), (59), (54),(46), (53) 及 (55) 式得

$$\begin{aligned} N_1 &\le 5 + 0.015442 + 0.048196 + 0.019748 \\ &-\left(\frac{1}{2}\right)(0.2784415 + 0.1796666) - 0.046314 \\ &\le 5 - 0.191982. \end{aligned} \tag{71}$$

令 $y_1 = 4.5 - \frac{4.5}{t+1}$, 则 $t+1 = \frac{4.5}{4.5-y}$, $\frac{dt}{t} = \frac{4.5(4.5-y)dy}{y(4.5-y)^2}$. 由 (11) 式有

$$\begin{aligned} \int_3^{3.5} \frac{G\left(4.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt &= \int_{\frac{27}{8}}^{3.5} \frac{4.5G(y)}{y(4.5-y)}dy \ge \{G(4)\}\left(\log\frac{28}{27} + \log\frac{9}{8}\right) \\ &+\left(\log\frac{7}{6}\right)\int_{2.5}^3 \frac{H(t)}{t}dt + (H(2.5))\int_{\frac{19}{8}}^{2.5} \frac{\log\frac{8(t+1)}{27} + \log\frac{9/8}{3.5-t}}{t}dt. \end{aligned}$$

因

$$\int_{\frac{19}{8}}^{2.5} \frac{\log\frac{t+1}{10.5-3t}}{t}dt \ge 2\int_{\frac{19}{8}}^{2.5} \frac{4t-9.5}{t(11.5-2t)}dt \ge 0.003862,$$

故

$$\int_3^{3.5}\frac{G\left(4.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt \geq (0.15415)(G(4)) + (0.00386)(H(2.5))$$
$$+ (0.01186)(H(2.7)) + (0.01101)(H(2.9)) + (0.00522)(H(3)). \quad (72)$$

我们有

$$\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{G\left(4.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt = \int_{\frac{39}{14}}^{3}\frac{4.5G(y)}{y(4.5-y)}dy$$
$$\geq \{G(4)\}\int_{\frac{39}{14}}^{3}\frac{4.5dy}{y(4.5-y)} + \int_{\frac{39}{14}}^{3}\frac{4.5dy}{y(4.5-y)}\int_{y-1}^{3}\frac{H(t)}{t}dt - \epsilon$$
$$= \left(\log\frac{16}{13}\right)\left(G(4) + \int_2^3\frac{H(t)}{t}dt\right) + \Delta - \epsilon$$
$$\geq (0.207639)(G(4)) + (0.03119)(H(2.2)) + (0.01221)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.01432)(H(2.5)) + (0.01598)(H(2.7)) + (0.01483)(H(2.9))$$
$$+(0.00703)(H(3)), \quad (73)$$

其中

$$\Delta = (H(2))\int_{\frac{25}{14}}^{2}\left(\log\frac{8(t+1)}{45.5-13t}\right)\left(\frac{dt}{t}\right)$$
$$\geq (H(2))(2)\int_{\frac{25}{14}}^{2}\frac{21t-37.5}{t(53.5-5t)}dt \geq 0.011407H(2.2).$$

我们有

$$\int_2^3\frac{G\left(4.5-\dfrac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt = \int_3^{\frac{27}{8}}\frac{4.5G(y)dy}{y(4.5-y)}$$
$$\geq \{G(4)\}\int_3^{\frac{27}{8}}\frac{4.5}{y(4.5-y)}dy + \int_3^{\frac{27}{8}}\frac{4.5dy}{y(4.5-y)}\int_{y-1}^{3}\frac{H(t)}{t}dt - \epsilon$$
$$\geq \left(\log\frac{3}{2}\right)\left(G(4) + \int_{\frac{19}{8}}^{3}\frac{H(t)}{t}dt\right) + \Delta - \epsilon$$
$$\geq (0.40546)(G(4)) + (0.00959)(H(2.2)) + (0.0165)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+ (0.02753)(H(2.5)) + (0.0312)(H(2.7)) + (0.02897)(H(2.9))$$
$$+ (0.01374)(H(3)), \quad (74)$$

其中

$$\Delta \geq (H(2.2)) \int_{2}^{2.2} \frac{\log \frac{t+1}{7-2t}}{t} dt + \left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) \int_{2.2}^{\frac{7}{3}} \frac{\log \frac{t+1}{7-2t}}{t} dt$$

$$+\left(H\left(\frac{19}{8}\right)\right) \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{19}{8}} \frac{\log \frac{t+1}{7-2t}}{t} dt$$

$$\geq 0.009591 H(2.2) + (0.0165)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + ((0.00674) H(2.5)).$$

我们有

$$\int_{1.2}^{\frac{13}{8}} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt$$

$$\geq \{G(4)\} + \int_{\frac{27}{11}}^{\frac{39}{14}} \frac{4.5dy}{y(4.5-y)} + \int_{\frac{27}{11}}^{\frac{39}{14}} \frac{4.5dy}{y(4.5-y)} \int_{y-1}^{3} \frac{H(t)}{t} dt - \epsilon$$

$$\geq \left(\log \frac{65}{48}\right) \left\{G(4) + \left(\log \frac{7}{6.6}\right)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + \left(\log \frac{7.5}{7}\right)(H(2.5))\right.$$

$$\left. + \left(\log \frac{27}{25}\right)(H(2.7)) + \left(\log \frac{29}{27}\right)(H(2.9)) + (\log \frac{3}{2.9})(H(3))\right\}$$

$$+ \left\{\left(\log \frac{3.08}{2.5}\right)\left(\log \frac{65}{48}\right) + \Delta\right\}(H(2.2)) - \epsilon$$

$$\geq (0.30318)(G(4)) + (0.0929)(H(2.2)) + (0.01783)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$+ (0.02091)(H(2.5)) + (0.02333)(H(2.7)) + (0.02166)(H(2.9))$$

$$+ (0.01027)(H(3)), \tag{75}$$

其中

$$\Delta = \int_{\frac{16}{11}}^{\frac{25}{14}} \frac{\log \frac{5t+5}{21-6t}}{t} dt \geq 2 \int_{\frac{16}{11}}^{\frac{25}{14}} \frac{11t-16}{t(26-t)} dt \geq 0.02965.$$

由 (72) – (75) 式得

$$\int_{1.2}^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt + \left(\frac{1}{2}\right) \int_{3}^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt$$

$$+ \int_{\frac{13}{8}}^{2} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt \geq (0.135513)(G(4)) + (0.16487)(H(2.2))$$

$$+ (0.05875)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.08287)(H(2.5)) + (0.10428)(H(2.7))$$
$$+ (0.0968)(H(2.9)) + (0.0459)(H(3)). \tag{76}$$

由 (13), (11) 式得

$$\begin{aligned} H(4.5) &\geq \int_{3.5}^{4} \frac{G(t)}{t} dt - \epsilon \geq \left(\log \frac{8}{7}\right)(G(4)) + \Delta \\ &\geq \left(\log \frac{8}{7}\right)(G(4)) + (0.00213)(H(2.7)) \\ &\quad +(0.00584)(H(2.9)) + (0.00409)(H(3)), \end{aligned} \tag{77}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{2.5}^{3} \frac{H(s)}{s} ds \int_{3.5}^{s+1} \frac{dt}{t} - 2\epsilon \\ &\geq \{H(2.7)\} \int_{2.5}^{2.7} \frac{2(s-2.5)}{s(s+4.5)} ds + \{H(2.9)\} \int_{2.7}^{2.9} \frac{2(s-2.5)}{s(s+4.5)} ds \\ &\quad +\{H(3)\} \int_{2.9}^{3} \frac{2(s-2.5)}{s(s+4.5)} ds. \end{aligned}$$

由 (13),(31),(32) 及 (77) 式得

$$\begin{aligned} 2H(4.5) + 2H(4) + H(3.5) &\geq (1.31242)(G(4)) + (0.0522)(H(2.\dot{2})) \\ &+ (0.02569)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.03936)(H(2.5)) + (0.06014)(H(2.7)) \\ &+ (0.07504)(H(2.9)) + (0.04214)(H(3)). \end{aligned} \tag{78}$$

由 (41) 式有

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{dv}{v(1-u-v)} &= \int_{2.5}^{3.5} \frac{\log \dfrac{16t-8}{13t-8}}{t} dt \\ &\geq 0.083061 + \Delta \geq 0.08618, \end{aligned} \tag{79}$$

其中

$$\Delta = \int_{2.5}^{3.5} \frac{\log \dfrac{50t-25}{52t-32}}{t} dt \geq 2 \int_{2.5}^{3.5} \frac{7-2t}{t(102t-57)} dt \geq 0.003119.$$

由 (40) 式有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3.5}} \frac{dv}{v(1-u-v)} = \int_{2.5}^{3} \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)-\log(t-1)}{t} dt.$$

我们有

$$\int_{2.5}^{3} \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t} dt \geq \left(\log\frac{13}{7}\right)\left(\log\frac{6}{5}\right) + 2\int_{2.5}^{3} \frac{8t-20}{t(34t+6)} dt$$
$$\geq 0.1197969.$$

故由 (42) 及 (43) 式有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3.5}} \frac{dv}{v(1-u-v)} \geq 0.1197969 - 0.0460634 - 0.0545477$$
$$\geq 0.0191858. \tag{80}$$

由 (41) 式有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{dv}{v(1-u-v)} = \int_{2.5}^{3} \frac{\log\frac{2.5-(3.5/(t+1))}{2-(3/(t+1))}}{t} dt$$
$$= \left(\log\frac{6.5}{5}\right)\left(\log\frac{6}{5}\right) + \int_{2.5}^{3} \frac{\log\frac{25t-10}{26t-13}}{t} dt$$
$$\geq (\log 1.3)(\log 1.2) + 2\int_{2.5}^{3} \frac{3-t}{t(51t-23)} dt$$
$$\geq 0.0486699. \tag{81}$$

由 (79) – (81) 式得

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{dv}{v(1-u-v)} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3.5}} \frac{dv}{v(1-u-v)}$$
$$+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{dv}{v(1-u-v)} \geq 0.08618 + 0.019185 + 0.048669$$
$$\geq 0.154034. \tag{82}$$

我们有

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}} \frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)} dv$$

$$= \int_{\frac{117}{88}}^{\frac{19}{8}} \frac{H(s)}{s} ds \int_{\max(\frac{2}{9},\frac{6}{11}-\frac{2s}{9})}^{\min(\frac{1}{4},\frac{3}{4}-\frac{2s}{9})} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} = \sum_{i=1}^{5} M_i,$$

其中

$$M_1 = \int_{\frac{117}{88}}^{\frac{16}{11}} \frac{H(s)ds}{s} \int_{\frac{6}{11}-\frac{2s}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)}$$

$$\geq \{H(2)\} \int_{\frac{117}{88}}^{\frac{16}{11}} \frac{4\left(\frac{2s}{9}+\frac{1}{4}-\frac{6}{11}\right)}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{s}{4.5}\right)} ds \geq 0.011274H(2),$$

$$M_2 = \int_{\frac{16}{11}}^{2.2} \frac{H(s)ds}{s} \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)}$$

$$\geq \{H(2.2)\} \int_{\frac{16}{11}}^{2.2} \frac{ds}{s\left(1-\frac{s}{4.5}\right)} \left\{ \log\frac{9}{8} + \log\frac{\frac{7-2s}{9}}{\frac{27-8s}{(9)(4)}} \right\}$$

$$= \{H(2.2)\}\left\{(\log 1.2)\left(\log\frac{368.5}{184}\right) + \Delta\right\}$$

$$\geq (0.13645)(H(2.2)).$$

而

$$\Delta = 2\int_{\frac{16}{11}}^{2.2} \left\{\frac{2s-3}{213-62s}\right\}\left\{\frac{ds}{s\left(1-\frac{s}{4.5}\right)}\right\} \geq 0.00983.$$

$$M_3 = \int_{2.2}^{2.25} \frac{H(s)}{s} ds \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)}$$

$$\geq \{H(2.25)\} \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{0.05du}{(2.2)u\left(\frac{23}{45}-u\right)} \geq 0.00973H(2.25),$$

$$M_4 = \int_{2.25}^{\frac{7}{3}} \frac{H(s)ds}{s} \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)}$$

$$\geq \left\{H\left(\frac{7}{3}\right)\right\}\int_{2.25}^{\frac{7}{3}}\frac{4\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}-\frac{2}{9}\right)}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}\right)}ds \geq 0.01115H\left(\frac{7}{3}\right),$$

$$M_5 = \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{19}{8}}\frac{H(s)ds}{s}\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}}\frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)}$$

$$\geq \left\{H\left(\frac{19}{8}\right)\right\}\int_{\frac{7}{3}}^{\frac{19}{8}}\frac{3-\frac{8s}{9}-\frac{8}{9}}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}\right)}ds \geq 0.001439H\left(\frac{19}{8}\right).$$

因此

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}dv$$
$$\geq 0.147724H(2.2)+(0.02088)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)+(0.001439)(H(2.5)). \quad (83)$$

由 (51) 式有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{du}{u}\int_{u}^{\frac{1}{3}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}dv$$
$$=\int_{1.5}^{2.25}\frac{H(s)}{s}ds\int_{\max(\frac{1}{4},\frac{3-s}{4.5})}^{\min(\frac{1}{3},\frac{1}{2}-\frac{s}{9})}\frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)}$$
$$\geq \{H(2.2)\}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{du}{u}\int_{u}^{\frac{1}{3}}\frac{dv}{v(1-u-v)}-\Delta$$
$$\geq 0.097991H(2.2)+0.000974H\left(\frac{7}{3}\right), \quad (84)$$

其中

$$\Delta = \int_{2.2}^{2.25}\frac{H(2.2)-H(2.25)}{s}ds\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{9}}\frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)}$$
$$\leq 4\{H(2.2)-H(2.25)\}\int_{2.2}^{2.25}\frac{\frac{1}{4}-\frac{s}{9}}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}\right)}ds$$
$$\leq 0.000974\{H(2.2)-H(2.25)\}.$$

我们有

$$\int_3^{3.5} \frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt \geq \left(\log\frac{19}{8}\right)\left(\log\frac{7}{6}\right)+2\int_3^{3.5}\frac{9t-27}{t(47t+11)}dt$$
$$\geq 0.13738,$$

$$\int_3^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt=\left(\frac{1}{3.25}\right)\left(\int_2^{2.5}\log t dt+\int_2^{2.5}\frac{(2.25-t)\log t}{1+t}dt\right)$$
$$\leq\left(\frac{1}{3.25}\right)\left\{2.5\log 2.5-2\log 2-0.5+(\log 2)\left(-0.5+3.25\log\frac{3.5}{3}\right)\right.$$
$$\left.+2\int_2^{2.5}\frac{(2.25-t)(t-2)}{(1+t)(t+2)}dt\right\}$$
$$\leq 0.1242474.$$

由 (40) 式有

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{dv}{v(1-u-v)}\geq 0.13738-0.1242474=0.0131326. \tag{85}$$

由 (85) 得

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}dv\geq(0.0131326)(H(2.5)), \tag{86}$$

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{H\left(\frac{1-u-v}{u}\right)}{v(1-u-v)}dv=\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_{\frac{3}{4}-u}^{1-2u}\frac{H\left(\frac{s}{u}\right)}{s(1-u-s)}ds$$
$$=\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_{\frac{3}{4u}-1}^{\frac{1}{u}-2}\frac{H(y)dy}{uy\left(\frac{1}{u}-1-y\right)}$$
$$\geq\{H(2.2)\}\Delta+\{H(2.5)\}\left\{\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{dv}{v(1-u-v)}-\Delta\right\}$$
$$\geq(0.00302)(H(2.2))+(0.0131326-0.00302)(H(2.5)), \tag{87}$$

其中

$$\Delta=\int_2^{2.2}\frac{dy}{y}\int_{\frac{3}{4(y+1)}}^{\frac{1}{y+2}}\frac{du}{u^2\left(\frac{1}{u}-1-y\right)}$$
$$\geq\left(\frac{16}{3}\right)\int_2^{2.2}\left(\frac{y+1}{y}\right)\left(\frac{1}{y+2}-\frac{3}{4(y+1)}\right)dy\geq 0.00302.$$

由 (83), (84), (86), (87) 得

$$\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_{u}^{\frac{1}{4}}\frac{H\left(\frac{1-u-v}{u}\right)+H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}dv$$
$$+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{du}{u}\int_{u}^{\frac{1}{3}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}dv$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}}\frac{du}{u}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}dv$$
$$\geq (0.173363)(H(2.2))+(0.01141)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)+(0.0123)(H(2.5)). \quad (88)$$

由 (50),(76),(78),(82),(88) 和 (30) 得

$$N_2 \geq (3.47848)(G(4))+(0.69124)(H(2.2))+(0.14355)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.19047)(H(2.5))+(0.22682)(H(2.7))+(0.22978)(H(2.9))$$
$$+(0.11552)(H(3))$$
$$\geq (0.76328)(H(2.2))+(0.16283)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)+(0.21666)(H(2.5))$$
$$+(0.26069)(H(2.7))+(0.26567)(H(2.9))+(0.13407)(H(3)). \quad (89)$$

我们有

$$S_q^{(3)} \leq \sum_{i=1}^{3} M_q(i), \quad (90)$$

其中

$$M_q(1)=\left(\frac{1}{2}\right)\Bigg\{\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leq \underline{q}^{\frac{1}{4}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2<p_3\leq \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_2)$$
$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leq \underline{q}^{\frac{1}{4}}<\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2\leq \underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\leq \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, \underline{q}^{\frac{1}{3}})$$
$$+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leq \underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\leq \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_3\leq \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, \underline{q}^{\frac{8}{21}})\Bigg\},$$

$$M_q(3)=\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\cdot\left\{\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_4<p_5<p_6<p_7\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7,p_3)\right.$$

$$\left.+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4.4}}<\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_4<p_5\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3p_4p_5,p_4)\right\},$$

$$M_q(2)=\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\cdot\left\{\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_4<p_5\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}}\left(\left(\frac{9}{10}\right)P(x,qp_1p_2p_3p_4p_5,p_4)\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{10}\right)P(x,qp_1p_2p_3p_4p_5,p_3)\right)$$

$$\left.+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_4<p_5\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3p_4p_5,p_3)\right\}.$$

我们有

$$S_q^{(4)}\le\sum_{i=4}^{8}M_q(i),\tag{91}$$

其中

$$\begin{aligned}M_q(4)=&\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_2)\\ &+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2<p_3\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_2)\\ &+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3,p_2)\\ &+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3,\underline{q}^{\frac{1}{3}})\\ &+\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<p_2\le\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\le\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x,qp_1p_2p_3,\underline{q}^{\frac{1}{3}})\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_3\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, \underline{q}^{\frac{1}{3}})$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<p_2<p_3\le \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_2).$$

$$M_q(5) = \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<p_2<p_3\le \underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_4\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, \underline{q}^{\frac{1}{3}})$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2<p_3\le \underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_4\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, \underline{q}^{\frac{1}{3}}),$$

$$M_q(6) = \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2<p_3<p_4\le \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2<p_3\le \underline{q}^{\frac{8}{21}}<p\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3),$$

$$M_q(7) = \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1\le \underline{q}^{\frac{1}{3}}<\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_2<p_3<p_4\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<p_2<p_3<p_4\le \underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_5<p_6\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5p_6, p_3)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\le \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2<p_3<p_4\le \underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_5\le p_6\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5p_6, p_4)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_4<p_5\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right) P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, \underline{q}^{\frac{1}{3}}) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{6}\right) P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_3) \right\}$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\le \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_4<p_5\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_3)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le \underline{q}^{\frac{8}{21}}<p_3<p_4\le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3),$$

$$M_q(8) = \sum_{\underline{q}^{\frac{8}{21}} < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 \le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5p_6, p_5)$$

$$+ \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}} < p_1 \le \underline{q}^{\frac{8}{21}} < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 \le \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_4).$$

由 $Z_1(t) \le \frac{1}{1.763}$(当 $t \ge 1.763$ 时), (4.4)$\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2.2}\right) > 1.77$,(14) 式及 (37) – (39) 式得

$$\sum_{q \in Q_i} (M_q(1) + M_q(4)) \le \frac{4x^{1-a_i}C_x}{1.763 \log x}\left(\sum_{q \in Q_i} \frac{1}{\log \underline{q}}\right)\Bigg\{\left(\log \frac{9}{8}\right)\Bigg(- 0.8$$

$$+3 \log \frac{15}{11} + 3\left(\log \frac{7}{6}\right)\left(\log \frac{15}{11}\right) + \left(\frac{21}{8}\right)\left(\log \frac{8}{7}\right)\left(\log \frac{21}{17.6}\right)\Bigg)$$

$$+\left(\log \frac{8}{7}\right)\left(6 \log \frac{15}{11} - 1.6 + 6\left(\log \frac{7}{6}\right)\left(\log \frac{15}{11}\right)\right)$$

$$+\left(\log \frac{7}{6}\right)\left(- 0.75 + 6 \log \frac{8}{7} + 0.75 \log \frac{21}{17.6}\right)$$

$$+3\left(\log \frac{15}{11}\right)\left(\log \frac{7}{6}\right)^2 + 3\left(\log \frac{8}{7}\right)^2\left(\log \frac{21}{17.6}\right) + 10.5 - 14$$

$$+\left(7 + \frac{21}{4}\right)\left(\log \frac{4}{3}\right)\Bigg\}$$

$$\le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q \in Q_i} \frac{0.111571}{\log \underline{q}}\right),$$

这里 $i = 1$ 或 2. 对于 $i = 1$ 或 $i = 2$, 我们有

$$\sum_{q \in Q_i} M_q(2) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q \in Q_i} \frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log \frac{9}{8}\right)\Bigg\{\left(\log \frac{7}{6}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$\cdot\left(- 0.8 + 3 \log \frac{15}{11}\right) + \left(\log \frac{15}{11}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)\left(0.5 - 3 \log \frac{7}{6}\right)$$

$$+\left(\log \frac{8}{7}\right)\left(\log \frac{21}{17.6}\right)^2\left(3 - \frac{21}{8}\right)\Bigg\}$$

$$\le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q \in Q_i} \frac{0.000278}{\log \underline{q}}\right),$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(5) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left\{\left(\frac{1}{1.636}\right)\left(\log\frac{7}{6}\right)^3\left(\log\frac{2.45}{2.2}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{1}{1.763}\right)\left(\log\frac{7}{6}\right)^3\left(\log\frac{3}{2.45}\right)+\left(\frac{3}{1.763}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)$$
$$\left.\cdot\left(\log\frac{7}{6}\right)^2\left(\log\frac{15}{11}\right)\right\}$$
$$\le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.002337}{\log \underline{q}}\right),$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(6) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left\{\left(\frac{2}{1.25}\right)\left(3\left(\frac{21}{8}-3\right)\right.\right.$$
$$+\left(3+\frac{21}{4}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)+\left(\frac{21}{16}\right)\left(\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\right)+\left(\frac{2\log\frac{21}{17.6}}{1.056}\right)$$
$$\left.\cdot\left(3-\frac{21}{8}-\frac{21}{8}\log\frac{8}{7}-\left(\frac{21}{16}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\right)\right\}$$
$$\le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.00042}{\log \underline{q}}\right),$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(7) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left\{2\left(\log\frac{7}{6}\right)\left(2\left(2.2-\frac{21}{8}\right)\right.\right.$$
$$+\left(2.2+\frac{21}{8}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)\Big)+\left(\log\frac{15}{11}\right)^2\Big(3(3-3.5)$$
$$+(3.5+6)\left(\log\frac{7}{6}\right)+1.5\left(\log\frac{7}{6}\right)^2\Big)+\left(\log\frac{8}{7}\right)\left(\log\frac{15}{11}\right)^2$$
$$\cdot\left(3.5-3-3\log\frac{7}{6}-1.5\left(\log\frac{7}{6}\right)^2\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^2\left(2.5\log\frac{7}{6}+\frac{0.5}{6}\right)$$
$$+\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^2\left(0.5-3.5\log\frac{8}{7}-1.75\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\right)$$
$$\left.+\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\left(2.2-\frac{21}{8}+\frac{21}{8}\log\frac{21}{17.6}\right)\right\}$$
$$\le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.001579}{\log \underline{q}}\right),$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(3) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left\{\left(\log\frac{9}{8}\right)\left(1-3\log\frac{4}{3}\right)\right.$$
$$\cdot\left(\frac{1}{24}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^4+\left(\log\frac{45}{44}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)^2$$
$$\left.\cdot\left(2.2-\frac{21}{8}+\frac{21}{8}\log\frac{21}{17.6}\right)\right\}$$
$$\le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.000009}{\log \underline{q}}\right),$$
$$\sum_{q\in Q_i} M_q(8) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left\{\left(\frac{21}{8}\right)\left(\frac{1}{360}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^6\right.$$
$$+2\left(\log\frac{8}{7}\right)\left(6.6-\frac{63}{8}+\left(4.4+\frac{21}{8}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)\right.$$
$$\left.\left.+1.1\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^2\right)\right\}$$
$$\le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.000026}{\log \underline{q}}\right).$$

对 $i=1$ 或 $i=2$, 由 (90), (91) 式有

$$\sum_{q\in Q_i}(S_q^{(3)}+S_q^{(4)}) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.11622}{\log \underline{q}}\right). \qquad (92)$$

由 (64),(68),(71),(89) 及 (92) 式，得

$$5\sum_{q\in Q_i} P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}) \le \left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\left(5-0.075762\right.$$
$$-(0.76328)(H(2.2))-(0.16283)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)-(0.21666)(H(2.5))$$
$$\left.-(0.26069)(H(2.7))-(0.26567)(H(2.9))-(0.13407)(H(3))\right).$$

因此

$$H(2.2) \ge 0.0151524+(0.15265)(H(2.2))+(0.03256)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$+(0.04333)(H(2.5))+(0.05213)(H(2.7))$$
$$+(0.05313)(H(2.9))+(0.02681)(H(3)).$$

$$H(2.2) \geq 0.017882 + (0.03482)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.05113)(H(2.5))$$
$$+(0.06152)(H(2.7)) + (0.0627)(H(2.9))$$
$$+(0.03163)(H(3)). \tag{93}$$

由 (13),(31),(32) 和 (11) 式得

$$\begin{aligned}
H(3) &\geq \int_2^4 \frac{G(t)}{t}dt - \epsilon \\
&\geq \left(\log\frac{4}{2.5}\right)(G(4)) + (0.0461)(H(2.2)) + (0.015711)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) \\
&\quad +(0.0215)(H(2.5)) + (0.02798)(H(2.7)) + (0.0298)(H(2.9)) \\
&\quad +(0.01544)(H(3)) + \Delta \\
&\geq \{G(4)\}(\log 2) + (0.17513)(H(2.2)) + (0.02884)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) \\
&\quad +(0.03689)(H(2.5)) + (0.04515)(H(2.7)) + (0.04574)(H(2.9)) \\
&\quad +(0.023)(H(3)),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_2^{2.5} \frac{G(t)}{t}dt - \epsilon \\
&\geq \int_2^{2.5}\left(G(4) + \int_{t-1}^{3}\frac{H(s)}{s}ds\right)\left(\frac{dt}{t}\right) - 2\epsilon \\
&\geq \{G(4)\}\left(\log\frac{2.5}{2}\right) + \int_2^{2.5}\frac{dt}{t}\int_{1.5}^{3}\frac{H(s)}{s}ds \\
&\quad +\{H(2.2)\}\int_2^{2.5}\frac{\log\frac{1.5}{t-1}}{t}dt - 2\epsilon \\
&\geq \left(\log\frac{2.5}{3}\right)(G(4)) + (H(2.2))(0.085462 + 0.043576) \\
&\quad +(0.013129)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.015395)(H(2.5)) + (0.017173)(H(2.7)) \\
&\quad +(0.015945)(H(2.9)) + (0.00756)(H(3)).
\end{aligned}$$

由 (30) 式有

$$H(3) \geq (0.18951)(H(2.2)) + (0.03268)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.0421)(H(2.5))$$

$$+(0.0519)(H(2.7)) + (0.05289)(H(2.9)) + (0.02669)(H(3)),$$

$$H(3) \geq (0.1947)(H(2.2)) + (0.03357)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.04325)(H(2.5))$$

$$+(0.05332)(H(2.7)) + (0.05434)(H(2.9)). \tag{94}$$

由 (93),(94) 及引理 3 与引理 4, 我们有

$$H(2.2) \geq 0.019326 + (0.04768)(H(2.2)) + (0.00725)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$+(0.00862)(H(2.5)) + (0.01011)(H(2.7))$$

$$+(0.01028)(H(2.9)) + (0.00608)(H(3)),$$

$$H(2.2) \geq 0.020293 + (0.00761)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) + (0.00905)(H(2.5))$$

$$+(0.010616)(H(2.7)) + (0.010794)(H(2.9)) + (0.00638)(H(3)).$$

由 (94) 式, 引理 3 及引理 4 有

$$H(2.2) \geq 0.020558 + 0.0086H(2.2)$$

及

$$H(2.2) \geq 0.02073.$$

因此在 [9] 中我们有 $E(x) \leq x^{0.989}$. 此即完成定理 1 的证明.

作者感谢华罗庚教授的鼓励, 感谢王元教授所给的帮助.

参考文献

[1] Wang Yuan. *Acta Math. Sin.*, 1956, **6**: 565 ~ 582
[2] Bombieri E. *Mathematatika*, 1965, **12**: 201 ~ 225
[3] Виноградов А И. *АН СССР, сер. мат.*, 1965, **29**: 903 ~ 934
[4] Chen Jingrun. *Sci. Sin.*, 1973, **16**: 157 ~ 176
[5] Pan Chengdong, Ding Xiaxi, Wang Yuan. *Sci. Sin.*, 1975, **18**: 599 ~ 610
[6] Левин Б Б, Файнлеев А С. *Успехи Математических Наук*, 1967, **22**: 119 ~ 196
[7] Prachar K. Primzahlverteilung. Springer - Verlag, 1957
[8] Richert H E. *Mathematika*, 1969, **16**: 1 ~ 22
[9] Montgomery H L, Vaughan R C. *Acta Arith.*, 1975, **27**: 353 ~ 370

关于区间中的殆素数的分布问题 (II) *†

摘　要

本文的目的在于证明对于大正数 x, 则在区间 $x-x^{0.477}<n\le x$ 中至少存在有两个整数，这两个整数的素因子的个数都不超过两个.

令 x 表示一个大的正数，寻求下界 α, 使得在区间 $x-x^{\alpha}<n\le x$ 中至少存在有两个数，这两个整数的素因子的个数都不超过两个. 关于这方面的工作可见文献 [1 - 5], 他们所得到的结果是

$$\alpha\le\frac{10}{17},\frac{14}{25},\frac{6}{11},\frac{1}{2}.$$

本文用筛法和三角和方法证明了 $\alpha\le 0.477$. 文中符号没有说明的则与文献 [5] 的符号相同.

一. 几 个 引 理

设 x 是一个大正数，而 ϵ 为一个充分小的正数， $\frac{1}{12}\le\alpha_1<\alpha_1+\epsilon=\alpha_2<\frac{1}{2}$. 令 $\Delta=x^{-\delta}$, 而

$$\delta=\begin{cases}\alpha_1-10\epsilon, & \text{当 } \dfrac{1}{12}\le\alpha_1\le\dfrac{0.431}{4} \text{ 时},\\[2ex] 0.1724-0.6\alpha_1-17\epsilon, & \text{当 } \dfrac{0.431}{4}\le\alpha_1\le\dfrac{1.293}{7}-7\epsilon \text{ 时}\end{cases}$$

令

$$\beta=\begin{cases}0.2385-6\epsilon, & \text{当 } \dfrac{1}{12}\le\alpha_1\le\dfrac{0.431}{4} \text{ 时},\\[2ex] 0.3247-0.8\alpha_1-10\epsilon, & \text{当 } \dfrac{0.431}{4}\le\alpha_1\le\dfrac{1.293}{7}-7\epsilon \text{ 时}\end{cases}$$

* 1977 年 10 月 18 日收到.

† 原载中国科学， **22**(1979), no. 1, pp. 12 - 32.

$$Z_m = \begin{cases} \dfrac{1}{m}, & \text{当}\, m \le \dfrac{1}{\Delta} = x^{\delta}\,\text{时}, \\ \dfrac{x^{2\delta}}{m^3}, & \text{当}\, m > \dfrac{1}{\Delta}\,\text{时}. \end{cases}$$

又令 $y = x^{0.477}$, $P(Z) = \prod\limits_{p<Z} p$, 我们使用 $\{a\}$ 表示 a 的分数部分.

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, Z) = \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \sum_{\substack{x-y<a<x,\, a\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p) \\ (a, P(Z))=1}} 1.$$

我们用符号 $\Delta(Z, x, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$ 来表示满足 $\left\{\frac{Z}{pd}\right\} \ge 1 - \Delta$ 的 (p, d) 的组数，其中 p 是素数满足 $x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}$, 而 d 是正整数 $d \le x^{2\beta}$. 当 $\frac{1}{12} \le \alpha_3 \le \alpha_1$ 时，则由文献 [5] 中的引理 2 和 (10) 式，有

$$\sum_{d \le x^{2\beta},\, d | P(x^{\alpha_3})} \eta(X, d) \ll x^{\alpha_2 + 2\beta}\Delta + \Delta(x, x, \alpha_1, \alpha_2, \beta) + \Delta(x-y, x, \alpha_1, \alpha_2, \beta) + \sum_{i=0}^{\infty} M_i, \tag{1}$$

其中

$$M_i = \sum_{d \le x^{2\beta}} \left(\left| \sum_{2^i \le m < 2^{i+1}} A_m \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left(e^{\frac{2\pi i m x}{p^d}} - e^{\frac{2\pi i m (x-y)}{p^d}} \right) \right| \right),$$

A_m 只和 m 和 Δ 有关，并有 $A_m \ll Z_m$. 由文献 [5] 中的引理 2 和文献 [6] 中的引理 1, 有

$$\begin{aligned} \Delta(x, x, \alpha_1, \alpha_2, \beta) &\le \sum_{1 \le d \le x^{2\beta}} \sum_{x^{\alpha_1} \le n \le x^{\alpha_2}} \psi\left(\frac{x}{nd}\right) \\ &\ll x^{\alpha_2 + 2\beta}\Delta + \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sum_{1 \le d \le x^{2\beta}} \sum_{x^{\alpha_1} \le n \le x^{\alpha_2}} e^{\frac{2\pi i m x}{dn}} \right| \\ &\ll x^{\alpha_1 + 2\beta}\Delta + x^{\frac{1}{2} - \beta + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\delta}{2} + 2\epsilon} + x^{-\frac{1}{2} + 1.5\alpha_1 + 3\beta + 2\epsilon}. \end{aligned} \tag{2}$$

当 $\frac{1}{12} \le \alpha_1 \le \frac{1.293}{7} - 7\epsilon$ 时，则由 $\Delta = x^{-\delta}$, (1) 和 (2) 式有

$$\sum_{d \le x^{2\beta},\, d | P(x^{\alpha_3})} \eta(X, d) \ll x^{0.477-\epsilon} + \sum_{i=0}^{\infty} M_i. \tag{3}$$

引理 1 当 $\frac{1}{12} \le \alpha_1 \le \frac{0.431}{4}$ 时，则有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\alpha_3}) \le \left(\frac{(1+\epsilon)e^{-\gamma}}{\alpha_3 \log x}\right)\left(\sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \frac{y}{p}\right) F\left(\frac{2\beta \log x}{\alpha_3 \log x}\right),$$

其中 $\frac{1}{12} \le \alpha_3 \le \alpha_1$, γ 为 Euler 常数， $F(u)$ 的定义见文献 [5].

证 令 D 表示一个满足 $\frac{1}{2\Delta} \le 2^D < \frac{1}{\Delta}$ 的正整数，则有

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i \le \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{D} M_{i,l} + x^{\alpha_2+2\beta}(\log x)^2 \Delta, \tag{4}$$

其中

$$M_{i,l} = \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \left(\left| \sum_{2^i \le m < 2^{i+1}} A_m \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left(e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} - e^{2\pi i \frac{m(x-y)}{pd}}\right)\right|\right).$$

令 $h(d) = \dfrac{mx(p_2 - p_1)}{p_1 p_2 d}$, 当 $0 \le l \le D$ 时，则

$$\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \left| \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right| \ll 2^{\frac{l}{2}} x^{\beta} \Delta^{\frac{1}{2}} \Big\{ 2^l x^{\alpha_2+2\beta} \Delta + \sum_{x^{\alpha_1} \le p_1 < p_2 \le x^{\alpha_2}} \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i h(d)} \Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

由文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i h(d)} \ll (2^l x^{2\beta}\Delta)\left(\frac{mx(p_2-p_1)}{2^{3l} x^{6\beta} p_1 p_2 \Delta^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2^{3l} x^{6\beta} p_1 p_2 \Delta^3}{mx(p_2-p_1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故当 $2^l \le x^{\alpha_1/2}$ 时，则

$$\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \left| \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right| \ll x^{\alpha_2+2\beta}\Delta + x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+\frac{3\alpha_2}{4}+\frac{\alpha_1}{8}} m^{\frac{1}{4}} \Delta^{\frac{1}{4}} + m^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{5\alpha_2}{4}+\frac{5\alpha_1}{8}} \Delta^{\frac{5}{4}}. \tag{5}$$

当 $\frac{1}{12} \le \alpha_1 \le \frac{0.431}{4}$ 时，则由 $\Delta = x^{-\delta}$ 和 (5) 式，我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{0 \le l \le \frac{\alpha_1 \log x}{2 \log 2}} M_{i,l} \ll x^{\alpha_2+2\beta}(\log x)^2 \Delta. \tag{6}$$

当 $\frac{\alpha_1 \log x}{2\log 2} < l \le D$, $2^i \ge 2^l x^{-3\epsilon}$ 时，我们将区间 $[2^i, 2^{i+1}]$ 分成为 $2^{i-l}x^{3\epsilon}$ 个小区间，其中每个小区间的长度 $\le 2^l x^{-3\epsilon}$. 故得

$$M_{i,l} \le \sum_{j=0}^{2^{i-l}x^{3\epsilon}} (M_{i,l,j}(x) + M_{i,l,j}(x-y)), \tag{7}$$

其中

$$M_{i,l,j}(Y) = \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta} \Bigg| \sum_{2^i + j\cdot 2^l x^{-3\epsilon} \le m < \min(2^{i+l}, 2^i+(j+1)\cdot 2^l x^{-3\epsilon})} A_m \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i \frac{mY}{pd}} \Bigg|.$$

又

$$M_{i,l,j}(x) \ll 2^{\frac{l}{2}} x^{\beta} \Delta^{0.5} \Bigg\{ \sum_{2^i + j\cdot 2^l x^{-3\epsilon} \le m_1 < m_2 < 2^i+(j+1)\cdot 2^l x^{-3\epsilon}} Z_{m_1} Z_{m_2} \sum_{\substack{x^{\alpha_1} \le p_1 < p_2 \le x^{\alpha_2} \\ m_1 p_2 \ne m_2 p_1}} \Bigg| \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i H(d)} \Bigg| + 2^{2l} x^{\alpha_1 + 2\beta - 1.9\epsilon} (z_{2^i})^2 \Delta \Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

其中 $H(d) = \frac{(m_1p_2 - m_2p_1)x}{p_1p_2d}$. 当 $m_1p_2 \ne m_2p_1$ 时，则由文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i H(d)} \ll (2^l x^{2\beta}\Delta) \left(\frac{x(m_1p_2 - m_2p_1)}{2^{3l}x^{6\beta}p_1p_2\Delta^3} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2^{3l}x^{6\beta}p_1p_2\Delta^3}{x(m_1p_2 - m_2p_1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $N = m_1p_2 - m_2p_1$, 则对于一个给定的 N 的整数值而满足 $N = m_1p_2 - m_2p_1$, $2^i + j2^l x^{-3\epsilon} \le m_1 < m_2 \le 2^i + (j+1)2^l x^{-3\epsilon}$, $x^{\alpha_1} \le p_1 < p_2 \le x^{\alpha_2}$ 的 (m_1, m_2, p_1, p_2) 的解的组数 $\ll 2^l x^{\alpha_1 - 1.9\epsilon}$. 故由 (8) 式和 $l \le D$, 我们有

$$M_{i,l,j}(x) \ll 2^l Z_2^i (x^{0.5\alpha_1 + 2\beta - 0.9\epsilon}\Delta^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+\frac{3\alpha_1}{4}-2\epsilon} 2^{\frac{i}{4}} + x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{5\alpha_1}{4}}\Delta^{\frac{1}{4}}).$$

对 $M_{i,l,j}(x-y)$ 进行估计，可得到同样的结果，因此

$$M_{i,l} \ll 2^i Z_{2^i} (x^{0.5\alpha_1 + 2\beta + 2.5\epsilon}\Delta^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+\frac{3\alpha_1}{4}+\epsilon} 2^{\frac{i}{4}} + x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{5\alpha_1}{4}+3\epsilon}\Delta^{\frac{1}{4}}). \tag{9}$$

当 $\frac{1}{12} \le \alpha_1 \le \frac{0.431}{4}$ 时，则由 $\Delta = x^{-\delta}$ 和 (9) 式，我们有

$$\sum_{\frac{\alpha_1 \log x}{2\log 2} < l \le D} \sum_{i \ge l - \frac{3\epsilon \log x}{\log 2}} M_{i,l} \ll x^{\alpha_2 + 2\beta} (\log x)^2 \Delta. \tag{10}$$

当 $\frac{1}{12} \le \alpha_1 \le \frac{0.431}{4}$, $2^l \ge x^{\alpha_1/2}$, $1 \le 2^i < 2^l x^{-3\epsilon}$ 时，我们有

$$\frac{2^i y}{2^l x^{\alpha_1 + 2\beta} \Delta} \le x^{0.477 - \alpha_1 - 2\beta + \delta - 3\epsilon} = x^{-\epsilon}. \tag{11}$$

由 (11) 式和 $e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} - e^{2\pi i \frac{m(x-y)}{pd}} = -e^{\frac{2\pi i m x}{pd}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(-\frac{2\pi i m y}{pd}\right)^n$ 而得

$$M_{i,l} \ll \sum_{n=1}^{\frac{1}{\epsilon}} M_{i,l}(n) + x^{\alpha_1 + 2\beta + \epsilon} 2^i Z_{2^i} \Delta, \tag{12}$$

其中

$$M_{i,l}(n) = \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \left| \sum_{2^i \le m < 2^{i+1}} A_m \sum_{x^{\alpha_1} \le p \le x^{\alpha_2}} \left(\frac{my}{pd}\right)^n e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right|.$$

又当 $n \ge 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} M_{i,l}(n) \ll 2^{\frac{l}{2}} x^{\beta} \Delta^{\frac{1}{2}} \Bigg\{ & \sum_{2^i \le m_1 < m_2 < 2^{i+1}} (m_1 m_2 y^2)^n Z_{m_1} Z_{m_2} \\ & \sum_{\substack{x^{\alpha_1} \le p_1 < p_2 \le x^{\alpha_2} \\ m_1 p_2 \ne m_2 p_1}} \left(\frac{1}{p_1 p_2}\right)^n \left| \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \frac{e^{2\pi i H(d)}}{d^{2n}} \right| \\ & + y \left(\frac{2^i y}{2^l x^{\alpha_1 + 2\beta} \Delta}\right)^{2n-1} 2^{2i} (Z_{2^i})^2 x^{2\epsilon} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $H(d) = \frac{x(m_1 p_2 - m_2 p_1)}{p_1 p_2 d}$. 当 $m_1 p_2 - m_2 p_1 \ne 0$ 时，则由文献 [6] 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \frac{e^{2\pi i H(d)}}{d^{2n}} \right| \ll & \; x^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha_1}{2}} (2^l x^{2\beta} \Delta)^{-(2n + \frac{1}{2}) 2^{\frac{i}{2}}} \\ & + x^{-\frac{1}{2} + \alpha_2} (2^l x^{2\beta} \Delta)^{-(2n - 1.5)} (m_1 p_2 - m_2 p_1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

令 $N = m_1 p_2 - m_2 p_1$, 则对于一个给定的 N 的整数值而满足 $N = m_1 p_2 - m_2 p_1$,

$$2^i \le m_1 < m_2 < 2^{i+1}, \quad x^{\alpha_1} \le p_1 < p_2 \le x^{\alpha_2}.$$

的 (m_1, m_2, p_1, p_2) 的解的组数 $\ll 2^i x^{\alpha_1+1.1\epsilon}$, 故当 $n \geq 1$ 时，则由 (11) 和 (13) 式我们有

$$M_{i,l}(n) \ll x^{\beta+\epsilon} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+\frac{3\alpha_1}{4}+\epsilon} 2^{\frac{i}{4}} + x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{5\alpha_2}{4}+\epsilon} 2^{\frac{3i}{4}-i+\frac{l}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2^i y}{2^l x^{\alpha_1+2\beta}\Delta} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{14}$$

当 $\frac{1}{12} \leq \alpha_1 \leq \frac{0.431}{4}$ 时，则由 $\Delta = x^{-\delta}$, (12) 和 (14) 式有

$$\sum_{\frac{\alpha_1 \log x}{2\log 2} < l \leq D} \sum_{0 \leq i < l - \frac{3\epsilon \log x}{\log 2}} M_{i,l} \ll x^{\alpha_2+2\beta} (\log x)^2 \Delta. \tag{15}$$

故由 (4), (6), (10) 和 (15) 式有

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i \ll x^{0.477-0.5\epsilon}.$$

由 (3) 式和文献 [4] 中，即知引理 1 成立.

引理 2 当 $\frac{0.431}{4} \leq \alpha_1 \leq \frac{1.293}{7} - 7\epsilon$ 时，我们有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\alpha_3}) \leq \left(\frac{(1+\epsilon)e^{-\gamma}}{\alpha_3 \log x} \right) \left(\sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \frac{y}{p} \right) F\left(\frac{2\beta}{\alpha_3} \right).$$

其中 $\frac{1}{12} \leq \alpha_3 \leq \alpha_1$.

证 令 $\delta_1 = 0.0431 + 0.1\alpha_1$ 则当 $\alpha_1 \geq \frac{0.431}{4}$ 时，我们有 $2\delta_1 \leq \alpha_1$. 令 $L = [x^{\alpha_2-2\delta_1} - x^{\alpha_1-2\delta_1}]$ 又令 D 表示一个满足 $\frac{1}{2\Delta} \leq 2^D < \frac{1}{\Delta}$ 的正整数，则当 $0 \leq l \leq D, 0 \leq S \leq L$ 时，我们有

$$\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \left| \sum_{x^{\alpha_1}+Sx^{2\delta_1} < p \leq x^{\alpha_1}+(S+1)x^{2\delta_1}} e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} \right| \ll 2^{\frac{l}{2}} x^{\beta} \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{x^{\alpha_1}+Sx^{2\delta_1} < p_1 < p_2 \leq x^{\alpha_1}+(S+1)x^{2\delta_1}} \left| \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i h(d)} \right| + 2^l x^{2\beta+2\delta_1} \Delta \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

其中 $h(d) = \frac{mx(p_2 - p_1)}{p_1 p_2 d}$. 由文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i h(d)} \ll 2^l x^{2\beta} \Delta \left(\frac{mx(p_2 - p_1)}{2^{3l} x^{6\beta} \Delta^3 p_1 p_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\frac{2^{3l}x^{6\beta}\Delta^3p_1p_2}{mx(p_2-p_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}}m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}-\beta-\alpha_1+\delta_1}\Delta^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{3l}{2}}x^{-\frac{1}{2}+3\beta+\alpha_2}\Delta^{\frac{3}{2}}(p_2-p_1)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

由 (16) 和 (17) 式，我们有

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{2^lx^{2\beta}\Delta\le d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}\left|\sum_{x^{\alpha_1}+Sx^{2\delta_1}<p\le x^{\alpha_1}+(S+1)x^{2\delta_1}}e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|$$

$$\ll 2^lx^{2\beta+\delta_1+\epsilon}\Delta+2^{\frac{l}{4}}x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+2.5\delta_1+\frac{\delta}{4}+\epsilon}\Delta^{\frac{1}{4}}$$

$$+2^{\frac{5l}{4}}x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{\alpha_2}{2}+1.5\delta_1+\epsilon}\Delta^{\frac{5}{4}}.$$

故当 $2^l\le x^{\delta_1}$ 时，我们有

$$\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\sum_{2^lx^{2\beta}\Delta\le d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|\ll x^{\alpha_1+2\beta+2\epsilon}\Delta$$

$$+x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\beta}{2}+0.75\delta_1+2\epsilon}+x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{3\alpha_1}{2}+0.75\delta_1-\frac{5\delta}{4}+3\epsilon}. \tag{18}$$

当 $\frac{0.431}{4}\le\alpha_1\le\frac{1.293}{7}-7\epsilon$ 时，则由 $\Delta=x^{-\delta}$, (4) 式中的 $M_{i,l}$ 的定义和 (18) 式有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{0\le l\le\frac{\delta_1\log x}{\log 2}}M_{i,l}\ll x^{0.477-0.5\epsilon}. \tag{19}$$

当 $2^i\ge\max(x^{\alpha_1-2\delta_1},2^lx^{-4\epsilon})$ 时，我们将区间 $[2^i,2^{i+1}]$ 分成为 $x^{\alpha_1-2\delta_1}$ 个小区间，其中每个小区间的长度 $\le 2^ix^{-\alpha_1+2\delta_1}$，故由 (4) 式中的 $M_{i,l}$ 的定义我们有

$$M_{i,l}\le\sum_{j=0}^{x^{\alpha_1-2\delta_1}}\sum_{S=0}^{L}(M_{i,l,j,S}(x)+M_{i,l,j,S}(x-y)),$$

其中

$$M_{i,l,j,S}(Y)$$

$$=\sum_{2^lx^{2\beta}\Delta\le d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}\left|\sum_{2^i+j\cdot 2^ix^{-\alpha_1+2\delta_1}\le m\le\min(2^{i+1},2^i+(j+1)2^ix^{-\alpha_1+2\delta_1})}A_m\right.$$

$$\left.\sum_{x^{\alpha_1}+Sx^{2\delta_1}<p\le x^{\alpha_1}+(S+1)x^{2\delta_1}}e^{2\pi i\frac{mY}{pd}}\right|.$$

又

$$M_{i,l,j,S}(x) \ll 2^{\frac{l}{2}} x^{\beta} \Delta^{\frac{1}{2}} \Bigg\{ \sum_{2^i + j\cdot 2^i x^{-\alpha_1+2\delta_1} \le m_1 < m_2 \le 2^i + (j+1)2^i x^{-\alpha_1+2\delta_1}} Z_{m_1} Z_{m_2}$$

$$\sum_{x^{\alpha_1}+Sx^{2\delta_1} < p_1 < p_2 \le x^{\alpha_1}+(S+1)x^{2\delta_1}} \Bigg| \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i H(d)} \Bigg|$$

$$+ 2^{i+l} x^{-\alpha_1+4\delta_1+2\beta+\epsilon} \Delta (Z_{2^i})^2 \Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

其中 $H(d) = \dfrac{(m_1p_2 - m_2p_1)x}{p_1p_2d}$. 又我们有 $m_1p_2 - m_2p_1 = (m_1 - m_2)p_1 + m_1(p_2 - p_1) \ll 2^i x^{2\delta_1+\epsilon}$. 故当 $m_1p_2 \ne m_2p_1$ 时，则由文献 [6] 中的引理 1 有

$$\Bigg| \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \le d < 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta} e^{2\pi i H(d)} \Bigg| \ll 2^{-\frac{l}{2}} x^{\frac{1}{2}-\beta-\alpha_1} (m_1p_2 - m_2p_1)^{\frac{1}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ 2^{\frac{3l}{2}} x^{-\frac{1}{2}+3\beta+\alpha_2} (m_1p_2 - m_2p_1)^{-\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{3}{2}}.$$

令 $N = m_1p_2 - m_2p_1$ 则对于一个给定的 N 的整数值而满足 $N = m_1p_2 - m_2p_1$,

$$2^i + j\cdot 2^i x^{-\alpha_1+2\delta_1} \le m_1 < m_2 \le 2^i + (j+1)\cdot 2^i x^{-\alpha_1+2\delta_1},$$

$x^{\alpha_1} + Sx^{2\delta_1} \le p_1 < p_2 \le x^{\alpha_1} + (S+1)x^{2\delta_1}$ 的 (m_1, m_2, p_1, p_2) 的解的组数 $\ll 2^i x^{-\alpha_1+4\delta_1+\epsilon}$, 故由 $2^l x^{-4\epsilon} \le 2^i$ 和 (20) 式我们有

$$M_{i,l,j,S}(x) \ll x^{-\frac{\alpha_1}{2}+2\beta+2\delta_1+3\epsilon} 2^i Z_{2^i} \Delta^{\frac{1}{2}}$$
$$+ x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}-\frac{3\alpha_1}{2}+\frac{9\delta_1}{2}+\epsilon} 2^{\frac{5i}{4}} Z_{2^i} + x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta-\frac{\alpha_1}{4}+3\delta_1+2\epsilon} 2^{\frac{3i}{4}+\frac{5l}{4}} \Delta^{\frac{1}{4}} Z_{2^i}.$$

故得

$$M_{i,l} \ll (x^{\frac{3\alpha_1}{2}+2\beta-2\delta_1+4\epsilon} \Delta^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\delta_1}{2}+3\epsilon} 2^{\frac{i}{4}}$$
$$+ x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{7\alpha_1}{4}-\delta_1+4\epsilon} \Delta^{\frac{1}{4}})(2^i Z_{2^i}).$$

令 $\sum\limits_i^{(l)}$ 表示一个和式，其中的 i 经过满足条件 $2^i \ge \max(x^{\alpha_1-2\delta_1}, 2^l x^{-4\epsilon})$ 的所有整数，则当

$$\frac{0.431}{4} \le \alpha_1 \le \frac{1.293}{7} - 7\epsilon$$

时，我们有

$$\sum_{\frac{\delta_1 \log x}{\log 2}<l\leq D}\sum_{i}^{(l)} M_{i,l} \ll (x^{\frac{3\alpha_1}{2}+2\beta-2\delta_1-\frac{\delta}{2}+4\epsilon}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta}{4}+3\epsilon}$$
$$+x^{-\frac{1}{4}+2.5\beta+\frac{7\alpha_1}{4}-\delta_1-\frac{\delta}{4}+4\epsilon})(\log x)^2$$
$$\ll x^{0.477-0.5\epsilon}. \tag{21}$$

当 $x^{\alpha_1-2\delta_1}\geq 2^l x^{-4\epsilon}$ 时，则由于当 $\frac{0.431}{4}\leq\alpha_1\leq\frac{1.293}{7}-7\epsilon$ 时，我们有 $\alpha_1\leq 3\delta_1-4\epsilon$, 而得

$$x^{\delta_1}\geq x^{\alpha_1-2\delta_1+4\epsilon}\geq 2^l,$$

故有 $l\leq\frac{\delta_1\log x}{\log 2}$. 当 $2^l x^{-4\epsilon}\geq 2^i\geq 1$ 及 $\frac{0.431}{4}\leq\alpha_1\leq\frac{1.293}{7}-7\epsilon$ 时，我们有

$$\frac{2^i x^{0.477}}{2^l x^{\alpha_1+2\beta}\Delta}\leq x^{0.477-\alpha_1-2\beta+\delta-4\epsilon}=x^{-\epsilon}. \tag{22}$$

此时由 $e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}-e^{2\pi i\frac{m(x-y)}{pd}}=-e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(-\frac{2\pi imy}{pd}\right)^n$ 和 (22) 式，而得

$$M_{i,l}\ll\sum_{n=1}^{\frac{1}{\epsilon}}M_{i,l}(n)+x^{\alpha_1+2\beta}\Delta 2^i Z_{2^i}, \tag{23}$$

其中

$$M_{i,l}(n)=\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta\leq d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}\left|\sum_{2^i\leq m<2^{i+1}}A_m\sum_{x^{\alpha_1}\leq p\leq x^{\alpha_2}}\left(\frac{my}{pd}\right)^n e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|.$$

当 $2^i x^{-4\epsilon}\geq 2^i\geq x^{\alpha_1-2\delta_1}$ 时，我们将区间 $[2^i,2^{i+1}]$ 分成为 $x^{\alpha_1-2\delta_1}$ 个小区间，其中每个小区间的长度 $\leq 2^i x^{-\alpha_1+2\delta_1}$. 故当 $n\geq 1$ 时，我们有

$$M_{i,l}(n)\ll\sum_{j=0}^{x^{\alpha_1-2\delta_1}}\sum_{S=0}^{L}M_{i,l}(j,S,n), \tag{24}$$

其中

$$M_{i,l}(j,S,n)=\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta\leq d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}$$
$$\cdot\left|\sum_{2^i+j\cdot 2^i x^{-\alpha_1+2\delta_1}\leq m\leq\min(2^{i+1},2^i+(j+1)2^i x^{-\alpha_1+2\delta_1})}A_m\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{x^{\alpha_1}+Sx^{2\delta_1}<p\leq x^{\alpha_1}+(S+1)x^{2\delta_1}}\left(\frac{my}{pd}\right)^n e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|.$$

又当 $n \geq 1$ 时，我们有

$$M_{i,l}(j,S,n) \ll 2^{\frac{l}{2}} x^{\beta} \Delta^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \Bigg\{ \sum_{2^i + j \cdot 2^i x^{-\alpha_1 + 2\delta_1} \leq m_1 < m_2 \leq 2^i + (j+1) 2^i x^{-\alpha_1 + 2\delta_1}} (m_1 m_2 y^2)^n Z_{m_1} Z_{m_2}$$

$$\sum_{\substack{x^{\alpha_1} + S x^{2\delta_1} < p_1 < p_2 \leq x^{\alpha_1} + (S+1) x^{2\delta_1} \\ m_1 p_2 \neq m_2 p_1}} \left(\frac{1}{p_1 p_2} \right)^n \left| \sum_{2^l x^{2\beta} \Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta} \Delta} \frac{e^{2\pi i H(d)}}{d^{2n}} \right|$$

$$+ 2^{2i} y x^{-2\alpha_1 + 4\delta_1 + \epsilon} (Z_{2^i})^2 \left(\frac{2^i y}{2^l x^{\alpha_1 + 2\beta} \Delta} \right)^{2n-1} \Bigg\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 $H(d) = \dfrac{x(m_1 p_2 - m_2 p_1)}{p_1 p_2 d}$, 当 $m_1 p_2 - m_2 p_1 \neq 0$ 时, 则由 $m_1 p_2 - m_2 p_1 \ll 2^i x^{2\delta_1 + \epsilon}$ 和文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{2^l x^{2\beta} \Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta} \Delta} \frac{e^{2\pi i H(d)}}{d^{2n}} \ll \frac{x^{\frac{1}{2} - \alpha_1 - 2(2n + \frac{1}{2})\beta + \delta_1 + \epsilon}}{2^{(2n+\frac{1}{2})l - \frac{i}{2}} \Delta^{(2n+\frac{1}{2})}}$$

$$+ 2^{-(2n - \frac{3}{2})l} x^{-\frac{1}{2} + \alpha_2 - 2(2n - \frac{3}{2})\beta} \Delta^{-(2n - \frac{3}{2})} (m_1 p_2 - m_2 p_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

令 $N = m_1 p_2 - m_2 p_1$, 则对于一个给定的 N 的整数值而满足 $N = m_1 p_2 - m_2 p_1$,

$$2^i + j \cdot 2^i x^{-\alpha_1 + 2\delta_1)} \leq m_1 < m_2 \leq 2^i + (j+1) \cdot 2^i x^{-\alpha_1 + 2\delta_1},$$

$x^{\alpha_1} + S x^{2\delta_1} < p_1 < p_2 \leq x^{\alpha_1} + (S+1) x^{2\delta_1}$ 的 (m_1, m_2, p_1, p_2) 的解的组数 $\ll 2^i x^{-\alpha_1 + 4\delta_1 + \epsilon}$, 故当 $n \geq 1$ 时，我们有

$$M_{i,l}(j,S,n)$$

$$\ll x^{-\alpha_1 + \beta + 2\delta_1 + \epsilon} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4} - \frac{3\alpha_1}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{9\delta_1}{2} + 2\epsilon} 2^{\frac{5i}{4}} Z_{2^i} \cdot (2^{i-l} y x^{-\alpha_1 - 2\beta} \Delta^{-1})^n$$

$$+ x^{-\frac{1}{4} - \frac{\alpha_1}{4} + 3\delta_1 + 2.5\beta + 2\epsilon - \frac{\alpha_1}{4} - \frac{\beta}{2}} 2^i Z_{2^i} (2^{i-l} y x^{-\alpha_1 - 2\beta} \Delta^{-1})^{n - \frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}. \qquad (25)$$

由 (22) – (25) 式，我们有

$$M_{i,l} \ll x^{\alpha_1 + 2\beta - \delta} + x^{\alpha_1 + \beta - 2\delta_1 + \frac{0.477}{2} + 2\epsilon}$$

$$+ x^{\frac{1}{4} + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta}{4} + 3\epsilon} + x^{-\frac{1}{4} + \frac{3\alpha_1}{2} + 2\beta - \delta_1 + \frac{0.477}{4} + 3\epsilon}. \qquad (26)$$

令 $\sum_{i}^{(l)}{}'$ 来表示一个和式，其中的 i 经过满足条件 $2^l x^{-4\epsilon} \geq 2^i \geq x^{\alpha_1 - 2\delta_1}$ 的所有整数. 当 $\frac{0.431}{4} \leq \alpha_1 \leq \frac{1.293}{7} - 7\epsilon$ 时，则由 $\Delta = x^{-\delta}$ 和 (26) 式我们有

$$\sum_{\frac{\delta_1 \log x}{\log 2} < l \leq D} \sum_{i}^{(l)}{}' M_{i,l} \ll x^{0.477-0.5\epsilon}. \tag{27}$$

当 $2^l x^{-4\epsilon} \geq x^{\alpha_1 - 2\delta_1} \geq 2^i$, 而 $n \geq 1$ 时，我们有

$$M_{i,l}(n) \ll \sum_{2^i \leq m < 2^{i+1}} (my)^n Z_m \sum_{S=0}^{L} M_{i,l,S}(n), \tag{28}$$

其中

$$M_{i,l,s}(n) = \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \left| \sum_{x^{\alpha_1} + Sx^{2\delta_1} < p \leq x^{\alpha_1} + (S+1)x^{2\delta_1}} \frac{e^{2\pi i \frac{mx}{pd}}}{(pd)^n} \right|$$

又当 $n \geq 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} M_{i,l,s}(n) \ll 2^{\frac{l}{2}} x^{\beta} \Delta^{\frac{1}{2}} \Bigg\{ & \sum_{x^{\alpha_1} + Sx^{2\delta_1} < p_1 < p_2 \leq x^{\alpha_1} + (S+1)x^{2\delta_1}} \left(\frac{1}{p_1 p_2} \right)^n \\ & \cdot \left| \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \cdot \frac{e^{2\pi i \frac{mx(p_2 - p_1)}{p_1 p_2 d}}}{d^{2n}} \right| \\ & + x^{-2\alpha_1 n - (2n-1)(2\beta) + 2\delta_1} (2^l \Delta)^{-2n+1} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta}\Delta} \frac{e^{2\pi i \frac{mx(p_2 - p_1)}{p_1 p_2 d}}}{d^{2n}} \ll & \, m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2} + \delta_1 - \alpha_1} (2^l x^{2\beta} \Delta)^{-(2n + \frac{1}{2})} \\ & + x^{-\frac{1}{2} + \alpha_1 + \epsilon} (2^l x^{2\beta} \Delta)^{\frac{3}{2} - 2n} (p_2 - p_1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

故当 $2^l x^{-4\epsilon} \geq x^{\alpha_1 - 2\delta_1} \geq 2^i$, 而 $n \geq 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} M_{i,l,S}(n) \ll \{ & x^{-\alpha_1 + \delta_1 + \epsilon} + x^{\frac{1}{4} + 2.5\delta_1 - \frac{\alpha_1}{2}} 2^{\frac{i}{4}} x^{-\alpha_1} (2^l x^{2\beta} \Delta)^{-\frac{3}{4}} \\ & + x^{-\frac{1}{4} + \frac{\alpha_1}{2} - \alpha_1 + 1.5\delta_1 + \epsilon} (2^l x^{2\beta} \Delta)^{\frac{1}{4}} \} (2^l x^{\alpha_1 + 2\beta} \Delta)^{-n+1}. \end{aligned}$$

而由 (28) 式，我们有

$$M_{i,l}(n) \ll \{2^i y x^{-\delta_1+2.5\epsilon} + x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+0.5\delta_1+2\epsilon}2^{0.5i}y^{\frac{1}{4}}(2^i y)^{\frac{3}{4}}(2^l x^{\alpha_1+2\beta}\Delta)^{-\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{2}-0.5\delta_1+\frac{\beta}{2}+3\epsilon}2^i y\}\{2^{i-l}yx^{-\alpha_1-2\beta}\Delta^{-1}\}^{n-1} \quad (29)$$

令 $\sum_i^{(l)}{}''$ 表示一个和式，其中的 i 经过满足条件 $2^l x^{-4\epsilon} \geq x^{\alpha_1-2\delta_1} \geq 2^i$ 的所有整数. 当 $\frac{0.431}{4} \leq \alpha_1 \leq \frac{1.293}{7} - 7\epsilon$ 时，则由 (22), (29) 式，$2^i \leq x^{\alpha_1-2\delta_1} \leq x^{\delta_1-4\epsilon}$ 和 $\Delta = x^{-\delta}$, 我们有

$$\sum_{\frac{\delta_1 \log x}{\log 2} \leq l \leq D} \sum_i^{(l)}{}'' M_{i,l} \ll x^{0.477-0.5\epsilon}. \quad (30)$$

由 (3), (4), (19), (21), (27), (30) 和文献 [4] 中的定理 A, 即知引理 2 成立.

引理 3 当 $\frac{2.431}{6} - \sqrt{\epsilon} \leq \alpha_1 \leq 0.476$ 时，我们有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\beta}) \leq \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \frac{(1+\epsilon)y}{\beta p \log x},$$

其中 $\beta = \frac{1.385}{8} - \frac{\alpha_1}{4} - \frac{19\epsilon}{4}$.

证 取 $\Delta = x^{-\delta}$, 而 $\delta = \frac{\alpha_1}{2} - \frac{0.523}{4} - 7.5\epsilon$. 令 $Q = \prod_{2 \leq p \leq x^{\beta}} p$, 则由文献 [5] 中的 (5) 式和文献 [5] 中的引理 2, 我们有

$$\Delta(x, x, \alpha_1, \alpha_2, Q, \beta) \leq \sum_{d_1|Q, d_1 \leq x^{\beta}} \sum_{d_2|Q, d_2 \leq x^{\beta}} \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \psi\left(\frac{x}{\frac{pd_1 d_2}{(d_1, d_2)}}\right)$$
$$\ll x^{\alpha_2+2\beta+\frac{\epsilon}{2}}\Delta + x^{\frac{\epsilon}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m \left| \sum_{1 \leq d \leq x^{2\beta}} \sum_{x^{\alpha_1} \leq n \leq x^{\alpha_2}} e^{2\pi i \frac{mx}{dn}} \right|. \quad (31)$$

由文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1} \leq n \leq x^{\alpha_2}} e^{2\pi i \frac{mx}{dn}} \ll x^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+\epsilon} m^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}+\frac{3\alpha_1}{2}+\beta+\frac{3\epsilon}{2}} m^{-\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

当 $\frac{2.431}{6} - \sqrt{\epsilon} \leq \alpha_1 \leq 0.476$ 时，则由于 (31), (32) 式和 $\Delta = x^{-\delta}$, 我们有

$$\Delta(x, x, \alpha_1, \alpha_2, Q, \beta) \ll x^{0.477-0.5\epsilon}.$$

同样我们有

$$\Delta(x, x-y, \alpha_1, \alpha_2, Q, \beta) \ll x^{0.477-0.5\epsilon}.$$

故由文献 [5] 中的 (3) 和 (4) 式，我们有

$$|R| \ll x^{0.477-0.5\epsilon} + \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \left\{ \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sum_{1 \leq d \leq x^{2\beta}} f(d)\left(e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} - e^{2\pi i \frac{m(x-y)}{pd}}\right) \right| \right.$$
$$\left. + \left| \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sum_{1 \leq d \leq x^{2\beta}} f(d)\left(e^{2\pi i \frac{mx}{pd}} - e^{2\pi i \frac{m(x-y)}{pd}}\right) \right| \right\}. \quad (33)$$

其中 $f(d)$ 的定义见文献 [5]. 当 $i \geq 0$ 和 $0 \leq l \leq \frac{\log \frac{1}{\Delta}}{\log 2}$ 时，我们令

$$M_{i,l}(Y) = \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \left| \sum_{2^i \leq m < 2^{i+1}} A_m \sum_{2^l x^{2\beta} \Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta} \Delta} f(d) e^{2\pi i \frac{mY}{pd}} \right|.$$

当 $x^{3\epsilon} \leq 2^l \leq 2^i x^{3\epsilon}$ 时，我们将区间 $[2^i, 2^{i+1}]$ 分成为 $2^{i-l} x^{3\epsilon}$ 个小区间，其中每个小区间的长度 $\leq x^l x^{-3\epsilon}$, 故得

$$M_{i,l}(Y) \leq \sum_{j=0}^{2^{i-l} x^{3\epsilon}} M_{i,l,j}(Y), \quad (34)$$

其中

$$M_{i,l,j}(Y) = \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \left| \sum_{2^i + j \cdot 2^l x^{-3\epsilon} \leq m < \min(2^{i+1}, 2^i + (j+1) 2^l x^{-3\epsilon})} A_m \right.$$
$$\left. \cdot \sum_{2^l x^{2\beta} \Delta \leq d < 2^{l+1} x^{2\beta} \Delta} f(d) e^{2\pi i \frac{mY}{pd}} \right|.$$

又

$$M_{i,l,j}(x) \ll x^{\frac{\alpha_1}{2}+\epsilon} \left\{ \sum_{2^i + j \cdot 2^l x^{-3\epsilon} \leq m_1 < m_2 \leq 2^i + (j+1) \cdot 2^l x^{-3\epsilon})} Z_{m_1} Z_{m_2} \right.$$
$$\cdot \sum_{\substack{2^l x^{2\beta} \Delta \leq d_1 < d_2 \leq 2^{l+1} x^{2\beta} \Delta \\ m_1 d_2 \neq m_2 d_1}} \left| \sum_{x^{\alpha_1} \leq n \leq x^{\alpha_2}} e^{2\pi i h(n)} \right|$$
$$\left. + 2^{2l} x^{\alpha_1 + 2\beta - \epsilon} (Z_{2^i})^2 \Delta \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (35)$$

其中 $h(n)=(\frac{x}{n})(\frac{m_1}{d_1}-\frac{m_2}{d_2})$. 由文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i h(n)} \ll x^{\alpha_2}\left(\frac{x(m_1d_2-m_2d_1)}{d_1d_2x^{3\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x^{3\alpha_2-1}d_1d_2}{m_1d_2-m_2d_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}-\beta+\epsilon}2^{\frac{i}{2}-\frac{l}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{3\alpha_1}{2}-\frac{1}{2}+2\beta+2\epsilon}2^l\Delta(m_1d_2-m_2d_1)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (36)$$

令 $L=m_1d_2-m_2d_1$, 则对于一个给定的 L 的整数值而满足 $L=m_1d_2-m_2d_1$,

$$2^i+j\cdot 2^l x^{-3\epsilon}\le m_1<m_2\le 2^i+(j+1)2^lx^{-3\epsilon},$$

$2^lx^{2\beta}\Delta\le d_1<d_2\le 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta$ 的 (m_1,m_2,d_1,d_2) 的解的组数 $\ll 2^{2l}x^{2\beta-2\epsilon}\Delta$, 故由 (35) 和 (36) 式, 我们有

$$M_{i,l,j}(x)\ll 2^lx^{\alpha_1+\beta+\frac{\epsilon}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}Z_{2^i}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\beta}{2}}2^{\frac{i}{4}+\frac{7l}{4}}\Delta^{\frac{3}{4}}Z_{2^i}$$
$$+x^{\frac{5\alpha_1}{4}-\frac{1}{4}+2.5\beta+\epsilon}2^{2l}\Delta^{\frac{5}{4}}Z_{2^i}. \qquad (37)$$

由 (34) 和 (37) 式, 我们有

$$M_{i,l,j}(x)\ll 2^ix^{\alpha_1+\beta+3.5\epsilon-\frac{\delta}{2}}Z_{2^i}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\beta}{2}+3\epsilon}2^{\frac{5i}{4}+\frac{3l}{4}}\Delta^{\frac{3}{4}}Z_{2^i}$$
$$+x^{\frac{5\alpha_1}{4}-\frac{1}{4}+2.5\beta-\frac{\delta}{4}+4\epsilon}2^iZ_{2^i}. \qquad (38)$$

当 $x^{3\epsilon}\le 2^l\le 2^ix^{3\epsilon}$, $\frac{2.431}{6}-\sqrt{\epsilon}\le\alpha_1\le 0.476$ 时, 则由 $\Delta=x^{-\delta}$ 和 (38) 式得

$$M_{i,l}(x)\ll x^{0.477-0.5\epsilon}2^iZ_{2^i}(1+(2^i\Delta)^{\frac{1}{4}}). \qquad (39)$$

当 $2^l\le x^{5\epsilon}$ 时, 则我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{2^lx^{2\beta}\Delta\le d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta} f(d)e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\right|$$
$$\ll x^{\frac{\alpha_1}{2}+\epsilon}\left(\sum_{2^lx^{2\beta}\Delta\le d_1<d_2\le 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}} e^{2\pi i\frac{mx(d_2-d_1)}{d_1d_2n}}\right|+2^lx^{\alpha_1+2\beta+2\epsilon}\Delta\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ll x^{\alpha_1+\beta-\frac{\delta}{2}+5\epsilon}+x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\beta}{2}+15\epsilon}\Delta^{\frac{3}{4}}m^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}+\frac{5\alpha_1}{4}+\frac{5\beta}{2}+15\epsilon}\Delta^{\frac{5}{4}}.$$

当 $2^l\le x^{5\epsilon}$, $\frac{2.431}{6}-\sqrt{\epsilon}\le\alpha_1\le 0.476$ 时, 由 $\Delta=x^{-\delta}$, 有

$$M_{i,l}(x)\ll x^{0.477-0.5\epsilon}2^iZ_{2^i}(1+(2^i\Delta)^{\frac{1}{4}}). \qquad (40)$$

当 $2^i x^{3\epsilon} < 2^l \le \frac{1}{\Delta}$ 时，有

$$\frac{2^i y}{2^l x^{\alpha_1+2\beta}\Delta} \le x^{0.477-\alpha_1-2\beta+\delta-3\epsilon} = x^{-\epsilon}. \tag{41}$$

由于 $e^{2\pi i\frac{mx}{pd}} - e^{2\pi i\frac{m(x-y)}{pd}} = -e^{2\pi i\frac{mx}{pd}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(-\frac{2\pi imy}{pd}\right)^n$ 和 (41) 式，我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{2^i\le m<2^{i+1}}A_m\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta\le d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}f(d)(e^{\frac{2\pi imx}{pd}}-e^{\frac{2\pi im(x-y)}{pd}})\right|$$
$$\ll \sum_{j=1}^{1/\epsilon}N_{i,l,j}(x)+x^{\alpha_1+2\beta}2^iZ_{2^i}\Delta, \tag{42}$$

其中

$$N_{i,l,j}(x)=\sum_{x^{\alpha_1}\le p\le x^{\alpha_2}}\left|\sum_{2^i\le m<2^{i+1}}A_m\sum_{2^l x^{2\beta}\Delta\le d<2^{l+1}x^{2\beta}\Delta}f(d)\left(\frac{my}{pd}\right)^j e^{\frac{2\pi imx}{pd}}\right|.$$

当 $j\ge 1$ 时有

$$N_{i,l,j}(x)\ll x^{\frac{\alpha_1}{2}+\epsilon}\Bigg\{\sum_{2^i\le m_1<m_2<2^{i+1}}(m_1m_2y^2)^jZ_{m_1}Z_{m_2}$$
$$\sum_{\substack{2^l x^{2\beta}\Delta\le d_1<d_2\le 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta\\ m_1d_2\ne m_2d_1}}\left(\frac{1}{d_1d_2}\right)^j\left|\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}}\frac{e^{2\pi ih(n)}}{n^{2j}}\right|$$
$$+2^{i+l}x^{\alpha_1+2\beta+2\epsilon}\Delta\left(\frac{2^{i-l}y}{x^{\alpha_1+2\beta}\Delta}\right)^{2j}(Z_{2^i})^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \tag{43}$$

其中 $h(n)=\frac{x(m_1d_2-m_2d_1)}{d_1d_2n}$. 由文献 [6] 中的引理 1, 我们有

$$\sum_{x^{\alpha_1}\le n\le x^{\alpha_2}}\frac{e^{2\pi ih(n)}}{n^{2j}}\ll x^{-2j\alpha_1}\Bigg\{x^{\alpha_2}\left(\frac{x(m_1d_2-m_2d_1)}{d_1d_2x^{3\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\frac{2^{2l}x^{3\alpha_1+4\beta+4\epsilon}\Delta^2}{x(m_1d_2-m_2d_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}. \tag{44}$$

令 $L=m_1d_2-m_2d_1$, 则对于一个给定的 L 的整数值且满足

$L=m_1d_2-m_2d_1$, $2^i\le m_1<m_2<2^{i+1}$, $2^lx^{2\beta}\Delta\le d_1<d_2\le 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta$

的 (m_1, m_2, d_1, d_2) 的解的组数 $\ll 2^{j+l}x^{2\beta+\epsilon}\Delta$. 故当 $j \geq 1$ 而 $2^i x^{3\epsilon} < 2^l \leq \frac{1}{\Delta}$ 时，由 (43) 和 (44) 式则有

$$N_{i,l,j}(x) \ll x^{\frac{\alpha_1+0.477}{2}+2\epsilon} + x^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\beta}{2}+3\epsilon}2^{\frac{i}{4}} + x^{\alpha_1-\frac{1}{4}+2\beta+\frac{0.477}{4}+4\epsilon}. \tag{45}$$

当 $2^i x^{3\epsilon} < 2^l \leq \frac{1}{\Delta}$, $\frac{2.431}{6} - \sqrt{\epsilon} \leq \alpha_1 \leq 0.476$ 时，则由 $\Delta = x^{-\delta}$, (42) 和 (45) 式，有

$$\sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \left| \sum_{m=2^i}^{2^{i+1}} A_m \sum_{2^l x^{2\beta}\Delta \leq d < 2^{l+1}x^{2\beta}\Delta} f(d)\left(e^{2\pi i\frac{mx}{pd}} - e^{2\pi i\frac{m(x-y)}{pd}}\right)\right| \ll x^{0.477-0.5\epsilon} \tag{46}$$

由 (33), (39), (40), (46) 和文献 [5] 中的 (2) 式，即知引理 3 成立.

引理 4 当 $\frac{1.293}{7} - 7\epsilon \leq \alpha_1 \leq \frac{5}{18}$ 时，则我们有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\alpha_3}) \leq \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \left(\frac{(1+\epsilon)e^{-\gamma}y}{\alpha_3 p \log x}\right) F\left(\frac{2\beta}{\alpha_3}\right)$$

其中 $\frac{1}{10} \leq \alpha_3 \leq \alpha_1$, 而 $\beta = \frac{2.339}{8} - \frac{5\alpha_1}{8} - \sqrt{\epsilon}$.

证 本引理的证明相似文献 [5] 中的引理 7.

引理 5 当 $\frac{5}{18} \leq \alpha_1 \leq \frac{2.431}{6} - \sqrt{\epsilon}$ 时，我们有

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, x^{\frac{1}{M_1}}) \leq \sum_{x^{\alpha_1} \leq p \leq x^{\alpha_2}} \frac{(1+\epsilon)y}{p\beta \log x},$$

其中

$$M_1 = \frac{4.25}{0.477}, 而\beta = 0.2339 - 0.4\alpha_1 - 2.1\epsilon.$$

证 本引理的证明相似于文献 [5] 中的引理 5.

令 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的整数 n 的个数

$$x - x^{0.477} \leq n \leq x, \ n = p_1 或 n = p_2 p_3.$$

其中 p_1, p_2 和 p_3 都是素数. 又令

$$S(x, y, p, Z) = \sum_{\substack{x - x^{0.477} \leq \alpha \leq x, (a, p(Z)) = 1 \\ a \equiv 0 \pmod p}} 1.$$

引理 6 令 $M_1 = \frac{4.25}{0.477}$, 则有

$$
\begin{aligned}
15P_x(1,2) \ge 15S(x,y,1,x^{\frac{1}{M_1}})
&- \sum_{x^{\frac{1}{M_1}} < p \le x^{\frac{17}{36}}} \left(3.4 - \frac{5.4\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{M_1}}) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{M_1}} < p \le x^{\frac{1}{8}}} \left(13.6 - \frac{30.6\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,p) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{8}} < p \le x^{\frac{1}{6.94}}} \left(12.5 - \frac{28.125\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,p) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{6.94}} < p \le x^{\frac{1}{6}}} \left(12.5 - \frac{28.125\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{6.94}}) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{6}} < p \le x^{\frac{1}{5.2}}} \left(12.1 - \frac{27.225\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{6.94}}) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{5.2}} < p \le x^{\frac{1}{4.9}}} \left(11.9 - \frac{26.775\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{6.94}}) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{8}} < p \le x^{\frac{1}{4.9}}} \left(1.1 - \frac{2.475\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{8}}) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{5.2}} < p \le x^{\frac{1}{4.9}}} \left(0.2 - \frac{0.45\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{7.2}}) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{6}} < p \le x^{\frac{1}{4.9}}} \left(0.4 - \frac{0.9\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{M_1}}) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{4.9}} < p \le x^{\frac{17}{36}}} \left(13.6 - \frac{3.06\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{M_1}}).
\end{aligned}
$$

证 我们先来证明下式成立

$$
\begin{aligned}
15P_x(1,2) \ge 15S(x,y,1,x^{\frac{1}{M_1}})
&- \sum_{x^{\frac{1}{M_1}} < p_1 \le x^{\frac{17}{36}}} \sum_{\substack{x-y<a\le x,\, p_1 | a \\ (a,\, \prod_{p\le x^{1/M_1}} p) = 1}} A_{p_1}\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right) \\
&- \sum_{x^{\frac{1}{M_1}} < p_1 \le x^{\frac{1}{6.94}}} \sum_{\substack{x-y<a\le x,\, p_1 | a \\ (a,\, \prod_{p<p_1} p) = 1}} B_{p_1}\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{x^{\frac{1}{6.94}}<p_1\le x^{\frac{1}{4.9}}}\ \sum_{\substack{x-y<a\le x,\, p_1|a\\ (a,\prod_{p\le x^{1/6.94}} p)=1}} B_{p_1}\left(1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\right)\\
&-0.2\sum_{x^{\frac{1}{5.2}}<p_1\le x^{\frac{1}{4.9}}}\ \sum_{\substack{x-y<a\le x,\, p_1|a\\ (a,\prod_{p\le x^{1/7.2}} p)=1}} \left(1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\right)\\
&-1.1\sum_{x^{\frac{1}{8}}<p_1\le x^{\frac{1}{4.9}}}\ \sum_{\substack{x-y<a\le x,\, p_1|a\\ (a,\prod_{p\le x^{1/8}} p)=1}} \left(1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\right)\\
&-\sum_{x^{\frac{1}{M_1}}<p\le x^{\frac{17}{36}}} S(x,y,p,x^{\frac{1}{M_1}}). \qquad (47)
\end{aligned}
$$

其中

$$
A_{p_1}=\begin{cases}2.4 & \text{当 } x^{\frac{1}{M_1}}<p_1\le x^{\frac{1}{6}} \text{ 时},\\ 2.8 & \text{当 } x^{\frac{1}{6}}<p_1\le x^{\frac{1}{4.9}} \text{ 时},\\ 16 & \text{当 } x^{\frac{1}{4.9}}<p_1\le x^{\frac{17}{36}} \text{ 时}.\end{cases}\quad
B_{p_1}=\begin{cases}13.6 & \text{当 } x^{\frac{1}{M_1}}<p_1\le x^{\frac{1}{8}} \text{ 时},\\ 12.5 & \text{当 } x^{\frac{1}{8}}<p_1\le x^{\frac{1}{6}} \text{ 时},\\ 12.1 & \text{当 } x^{\frac{1}{6}}<p_1\le x^{\frac{1}{5.2}} \text{ 时},\\ 11.9 & \text{当 } x^{\frac{1}{5.2}}<p_1\le x^{\frac{1}{4.9}} \text{ 时}.\end{cases}
$$

现设 $a=p_1p_2\cdots p_n$，其中 $n\ge 3$，而 $x^{\frac{1}{M_1}}\le p_1\le p_2\le\cdots\le p_n$. 当 $x^{\frac{1}{M_1}}<p_1<p_2\le x^{\frac{1}{8}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15-2.4\left(2-\frac{9\log p_1p_2}{4\log x}\right)-13.6\left(1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\right)-2\le 15-20.4+5.4=0.$$

当 $x^{\frac{1}{M_1}}<p_1\le x^{\frac{1}{8}}<p_2\le x^{\frac{1}{6}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15-(2.4+13.6)\left(1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\right)-2.4\left(1-\frac{9\log p_2}{4\log x}\right)-2\le 15-20.4+5.4=0.$$

当 $x^{\frac{1}{M_1}}<p_1\le x^{\frac{1}{8}}<x^{\frac{1}{6}}<p_2\le x^{\frac{1}{4.9}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15-16\left(1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\right)-2.8\left(1-\frac{9\log p_2}{4\log x}\right)-2\le 15-20.8+5.8=0.$$

当 $x^{\frac{1}{M_1}}<p_1\le x^{\frac{1}{8}}<x^{\frac{1}{4.9}}<p_2\le x^{\frac{17}{36}}<p_3$ 时，由于 $p_1p_2p_3\le x$，而得 $p_1p_2\le x^{\frac{36-17}{36}}$. 故 (47) 式右边有

$$15-16\left(2-\frac{9\log p_1p_2}{4\log x}\right)-2\le 15-34+19=0.$$

当 $x^{\frac{1}{M_1}} < p_1 \le x^{\frac{1}{8}} < x^{\frac{1}{4.9}} < p_2 < p_3 \le x^{\frac{17}{36}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15 - 16\left(3 - \frac{9\log p_1p_2p_3}{4\log x}\right) - 3 \le 15 - 51 + 36 = 0.$$

当 $x^{\frac{1}{8}} < p_1 < p_2 \le x^{\frac{1}{6.94}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15 - (1.1 + 12.5 + 2.4)\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right) - (2.4 + 1.1)\left(1 - \frac{9\log p_2}{4\log x}\right) - 2$$
$$\le 15 - 21.5 + 6.5 = 0.$$

当 $x^{\frac{1}{8}} < p_1 \le x^{\frac{1}{6.94}} < p_2 \le x^{\frac{1}{6}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15 - 16\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right) - (2.4 + 1.1)\left(1 - \frac{9\log p_2}{4\log x}\right) - 2$$
$$\le 15 - 21.5 + 6.5 = 0.$$

当 $x^{\frac{1}{8}} < p_1 \le x^{\frac{1}{6.94}} < x^{\frac{1}{6}} < p_2 \le x^{\frac{1}{5.2}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15 - 16\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right) - (2.8 + 1.1)\left(1 - \frac{9\log p_2}{4\log x}\right) - 2$$
$$\le 15 - 21.9 + 6.9 = 0.$$

当 $x^{\frac{1}{8}} < p_1 \le x^{\frac{1}{7.2}} < x^{\frac{1}{5.2}} < p_2 \le x^{\frac{1}{4.9}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15 - 16\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right) - (2.8 + 1.1)\left(1 - \frac{9\log p_2}{4\log x}\right) - 2$$
$$\le 15 - 21.9 + 6.9 = 0.$$

当 $x^{\frac{1}{7.2}} < p_1 \le x^{\frac{1}{6.94}} < x^{\frac{1}{5.2}} < p_2 \le x^{\frac{1}{4.9}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15 - 16\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right) - (2.8 + 1.3)\left(1 - \frac{9\log p_2}{4\log x}\right) - 2$$
$$\le 15 - 22.1 + 7.1 = 0.$$

当 $x^{\frac{1}{8}} < p_1 \le x^{\frac{1}{6.94}} < x^{\frac{1}{4.9}} < p_2 \le x^{\frac{17}{36}} < p_3$ 时，则由 $p_1p_2p_3 \le x$ 而得 $p_1p_2 \le x^{\frac{19}{36}}$, 故 (47) 式右边有

$$15 - 16\left(1 - \frac{9\log p_1}{4\log x}\right) - 16\left(1 - \frac{9\log p_2}{4\log x}\right) - 2$$
$$\le 15 - 34 + 19 = 0.$$

当 $x^{\frac{1}{8}}<p_1\le x^{\frac{1}{6.94}}<x^{\frac{1}{4.9}}<p_2<p_3\le x^{\frac{17}{36}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15-16\left(3-\frac{9\log p_1p_2p_3}{4\log x}\right)-3\le 15-51+36=0.$$

当 $x^{\frac{1}{6.94}}<p_1<p_2\le x^{\frac{1}{4.9}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15-16\left(2-\frac{9\log p_1p_2}{4\log x}\right)-2\le 15-34+15<0.$$

当 $x^{\frac{1}{6.94}}<p_1\le x^{\frac{1}{4.9}}<p_2\le x^{\frac{19}{36}}<p_3$ 时，则由 $p_1p_2p_3\le x$, 而得 $p_1p_2\le x^{\frac{36-17}{36}}=x^{\frac{19}{36}}$, 故 (47) 式右边有

$$15-16\left(2-\frac{9\log p_1p_2}{4\log x}\right)-2\le 15-34+19=0.$$

当 $x^{\frac{1}{6.94}}<p_1\le x^{\frac{1}{4.9}}<p_2<P_3\le x^{\frac{17}{36}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15-16\left(3-\frac{9\log p_1p_2p_3}{4\log x}\right)-3\le 15-51+36=0.$$

当 $x^{\frac{1}{4.9}}<p_1<p_2<p_3\le x^{\frac{17}{36}}$ 时，则 (47) 式右边有

$$15-16\left(3-\frac{9\log p_1p_2p_3}{4\log x}\right)-3\le 15-51+36=0.$$

当 $x^{\frac{1}{4.9}}<p_1<p_2\le x^{\frac{17}{36}}<p_3$ 时，则由 $p_1p_2p_3\le x$, 而得 $p_1p_2\le x^{\frac{19}{36}}$, 故 (47) 式右边有

$$15-16\left(2-\frac{9\log p_1p_2}{4\log x}\right)-2\le 15-34+19=0.$$

现设 $a=p_1p_2$, 而 $x^{\frac{1}{M_1}}<p_1<p_2$, 则由于 $x-y<a\le x$ 有 $p_2>x^{\frac{1}{2}-\epsilon}$. 当 $p_1\le x^{\frac{4}{9}}$ 时，则有

$$1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\ge 0,$$

而当 $x^{\frac{4}{9}}<p_1\le x^{\frac{17}{36}}$ 时，则有 $-16\left(1-\frac{9\log p_1}{4\log x}\right)-1\le 0$. 所以 (47) 式成立，即本引理成立.

三. 定　理

令 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的整数 n 的个数,

$$x - x^{0.477} \le n \le x,\ n = p_1 \text{ 或 } n = p_2 p_3,$$

其中 p_1, p_2, p_3 都是素数.

定理 我们有

$$p_x(1.2) \ge \frac{0.0049y}{\log x}.$$

证 令 $M_2 = \frac{5.5}{0.477}$. 当 $2 \le t \le 4$ 时, 由文献 [4] 有 $tf(t) = 2e^{\gamma} \log (t-1)$. 而当 $3 \le t \le 5$ 时, 则由文献 [4] 有 $3F(3) = 2e^{\gamma}$,

$$tF(t) - 3F(3) = \int_3^t f(u-1)du = 2e^{\gamma} \int_2^{t-1} \frac{\log (S-1)}{S} dS.$$

故当 $3 \le t \le 5$ 时, 我们有

$$F(t) = \left(\frac{2e^{\gamma}}{t}\right)\left(1 + \int_2^{t-1} \frac{\log (S-1)}{S} dS\right)$$

当 $4 \le t \le 6$ 时, 则由文献 [4], 我们有 $tf(t) - 4f(4) = \int_3^{t-1} F(S)dS$. 故当 $4 \le t \le 6$ 时, 则我们有 $tf(t) = 2e^{\gamma}\left(\log 3 + \int_3^{t-1} \frac{dS}{S} \int_2^{S-1} \frac{\log (u-1)}{u} du + \log \frac{t-1}{3}\right)$. 由文献 [4] 中的定理 B, 我们有

$$S(x, y, 1, x^{\frac{1}{M_2}}) \ge \left(\frac{2y}{0.477 \log x}\right) \cdot \left(\log 4.5 + \int_3^{4.5} \frac{dS}{S} \int_2^{S-1} \frac{\log (u-1)}{u} du - \sqrt{\epsilon}\right). \quad (48)$$

由引理 1, 引理 2 及文献 [4] 中, $F(t)$ 是 t 的单调减少函数, 故我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{x^{\frac{1}{M_2}} < p < x^{\frac{1}{M_1}}} S(x, y, p, p) \le{} & (1 + \sqrt{\epsilon})e^{-\gamma} y \Bigg\{ \sum_{x^{\frac{1}{M_2}} < p \le x^{\frac{0.431}{4}}} \left(\frac{1}{p \log p}\right) F \\
& \cdot \left(\frac{\log x^{0.477}}{\log p}\right) + \sum_{x^{\frac{0.431}{4}} < p \le x^{\frac{0.477}{4.25}}} \left(\frac{1}{p \log p}\right) F\left(\frac{\log x^{0.6494}/p^{1.6}}{\log p}\right) \Bigg\} \\
\le{} & \left(\frac{(2 + 5\sqrt{\epsilon})y}{0.477 \log x}\right) \Bigg\{ 0.1 + 0.1 \int_2^4 \frac{\log (t-1)}{t} dt + \log \frac{0.431}{0.3816} \\
& + \int_{0.0954}^{\frac{0.431}{4}} \frac{dr}{r} \int_2^{\frac{0.477}{r} - 1} \frac{\log (S-1)}{S} dS + \int_{\frac{0.431}{4}}^{\frac{0.477}{4.25}} \frac{0.477dr}{r(0.6494 - 1.6r)} \\
& + \int_{\frac{0.431}{4}}^{\frac{0.477}{4.25}} \frac{0.477dr}{r(0.6494 - 1.6r)} \int_2^{\frac{0.6494}{r} - 2.6} \frac{\log (S-1)}{S} dS \Bigg\}.
\end{aligned}$$

令 $\beta=\frac{0.477}{r}$, $\delta=\frac{0.6494}{r}-1.6$, 则我们有

$$\frac{dr}{r}=-\frac{d\beta}{\beta},\quad \frac{d\delta}{\delta}=-\frac{0.6494dr}{r(0.6494-1.6r)},$$

故得到

$$\sum_{x^{\frac{1}{M_2}}\le p\le x^{\frac{1}{M_1}}} S(x,y,p,p)\le\left(\frac{2y}{0.477\log x}\right)\left\{0.1+0.1\int_2^4\frac{\log(t-1)}{t}dt\right.$$
$$+\log\frac{4.31}{3.816}+\left(\frac{0.477}{0.6494}\right)\left(\log\frac{(3.816)(0.477)}{(0.862)(1.99675)}\right)$$
$$+\int_{\frac{1.908}{0.431}}^{5}\frac{d\beta}{\beta}\int_2^{\beta-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$
$$\left.+\left(\frac{0.477}{0.6494}\right)\int_{\frac{1.99675}{0.477}}^{\frac{1.908}{0.431}}\frac{d\beta}{\beta}\int_2^{\beta-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt+100\sqrt{\epsilon}\right\}. \quad (49)$$

由 (48) 和 (49) 式，我们有

$$S(x,y,1,x^{\frac{1}{M_1}})\ge\left(\frac{2y}{0.477\log x}\right)\left\{\log 4.5-0.1-0.1\int_2^4\frac{\log(t-1)}{t}dt\right.$$
$$-\log\frac{4.31}{3.816}-\left(\frac{0.477}{0.6494}\right)\left(\log\frac{(3.816)(0.477)}{(0.862)(1.99675)}\right)$$
$$+\int_3^{\frac{1.908}{0.431}}\frac{dS}{S}\int_2^{S-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\int_{4.5}^{5}\frac{dS}{S}\int_2^{S-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$
$$\left.-\left(\frac{0.477}{0.6494}\right)\int_{\frac{1.99675}{0.477}}^{\frac{1.908}{0.431}}\frac{dS}{S}\int_2^{S-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt-1000\sqrt{\epsilon}\right\}. \quad (50)$$

又

$$\int_2^{2.25}\frac{\log(t-1)}{t}dt\le\int_2^{2.25}\frac{t-2}{t}dt\le 0.014434,$$

$$\int_{2.25}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt\le 0.042721+2\int_{2.25}^{2.5}\frac{t-2.5}{t(t+0.5)}dt\le 0.033253,$$

$$\int_{2.5}^{2.75}\frac{\log(t-1)}{t}dt\le 0.046072,$$

$$\int_{2.75}^{3}\frac{\log(t-1)}{t}dt\le 0.060312+2\int_{2.75}^{3}\frac{t-3}{t(t+1)}dt\le 0.054552,$$

$$\int_3^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt\le 0.141247+2\int_3^{3.5}\frac{t-3.5}{t(t+1.5)}dt\le 0.124281,$$

$$\int_{3.5}^{4} \frac{\log(t-1)}{t}\,dt \le 0.135081 + 2\int_{3.5}^{4} \frac{t-3.75}{t(t+1.75)}\,dt$$
$$+(0.0013)\int_{3.75}^{4} \frac{t-3.75}{t(t+1.75)}\,dt$$
$$\le 0.134629,$$

故得

$$\int_{2}^{4} \frac{\log(t-1)}{t}dt \le 0.407221.$$

又

$$\int_{4.5}^{5} \frac{dt}{t}\int_{3.5}^{t-l} \frac{\log(u-1)}{u}\,du \le (\log 2.5)\int_{4.5}^{5} \frac{\log\frac{t-1}{3.5}}{t}\,dt$$
$$+\int_{4.5}^{5} \frac{dt}{t}\int_{3.5}^{t-1} \frac{\frac{u-3.5}{2.5}}{u}\,du$$
$$\le -2\left(\frac{7}{5}-\log 2.5\right)\int_{4.5}^{5} \frac{t-4.5}{t(t+2.5)}\,dt + \left(\frac{1}{2.5}\right)\left(\frac{1}{2} - 4.5\log\frac{5}{4.5}\right)$$
$$\le 0.00694,$$

$$\int_{4.5}^{5} \frac{dt}{t}\int_{2}^{t-1} \frac{\log(u-1)}{u}\,du \le \int_{4.5}^{5} \frac{dt}{t}\int_{2}^{3.5} \frac{\log(u-1)}{u}\,du + 0.00694$$
$$\le 0.035661.$$

故由 (50) 式，有

$$S(x,y,1,x^{\frac{1}{M_1}}) \ge \left(\frac{2y}{0.477\log x}\right)\Bigg\{1.164867$$
$$+\int_{3}^{\frac{1.908}{0.431}} \frac{dS}{S}\int_{2}^{S-1} \frac{\log(t-1)}{t}\,dt$$
$$-\left(\frac{0.477}{0.6494}\right)\int_{\frac{1.99675}{0.477}}^{\frac{1.908}{0.431}} \frac{dS}{S}\int_{2}^{S-1} \frac{\log(t-1)}{t}\,dt\Bigg\}. \quad (51)$$

令

$$\beta = \begin{cases} 0.3247 - 0.8\alpha_1 - 10\epsilon, & \text{当 } \frac{0.477}{4.25} \le \alpha_1 \le \frac{1.293}{7} - 7\epsilon \text{ 时}, \\ \frac{2.339}{8} - \frac{5\alpha_1}{8}, & \text{当 } \frac{1.293}{7} - 7\epsilon \le \alpha_1 \le \frac{5}{18} \text{ 时}, \end{cases}$$

则有

$$\frac{2\beta}{\frac{1}{M_1}}=\frac{8.5\beta}{0.477}$$

$$=\begin{cases}5.95-\dfrac{0.0782+6.8\alpha_1+85\epsilon}{0.477}, & \text{当 } \dfrac{0.477}{4.25}\le\alpha_1\le\dfrac{1.293}{7}-7\epsilon\text{ 时},\\ 5.3125-\dfrac{0.048875+5.3125\alpha_1}{0.477}, & \text{当 } \dfrac{1.293}{7}-7\epsilon\le\alpha_1\le\dfrac{5}{18}\text{ 时}.\end{cases}$$

由引理 2 – 引理 5, 有

$$\sum_{x^{\frac{1}{M_1}}\le p\le x^{\frac{17}{36}}}\left(3.4-\frac{5.4\log p}{\log x}\right)S(x,y,p,x^{\frac{1}{M_1}})\le\frac{(S_1+S_2)y}{\log x},\tag{52}$$

其中

$$S_1=\sum_{x^{\frac{1}{M_1}}\le p\le x^{\frac{1.293}{7}}}\frac{3.4\log x-5.4\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}}+\sum_{x^{\frac{1.293}{7}}\le p\le x^{\frac{5}{18}}}\frac{3.4\log x-5.4\log p}{p\log\frac{x^{2.339/8}}{p^{5/8}}}$$
$$+\sum_{x^{\frac{5}{18}}<p\le x^{\frac{2.431}{6}}}\frac{3.4\log x-5.4\log p}{p\log\frac{x^{0.2339}}{p^{0.4}}}+\sum_{x^{\frac{2.431}{6}}<p\le x^{\frac{17}{36}}}\frac{3.4\log x-5.4\log p}{p\log\frac{x^{1.385/8}}{p^{0.25}}},$$

$$S_2=\sum_{x^{\frac{1}{M_1}}\le p\le x^{\frac{1.293}{7}}}\left(\frac{3.4\log x-5.4\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}}\right)\int_2^{4.95-\frac{0.0782+\frac{6.8\log p}{\log x}}{0.477}}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt$$
$$+\sum_{x^{\frac{1.293}{7}}\le p\le x^{\frac{16.867}{85}}}\left(\frac{3.4\log x-5.4\log p}{p\log\frac{x^{2.339/8}}{p^{5/8}}}\right)$$
$$\cdot\int_2^{4.3125-\frac{0.048875+\frac{5.3125\log p}{\log x}}{0.477}}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt+100\epsilon.$$

又

$$S_2\le\left(\frac{3.4}{\frac{1}{M_1}}-5.4\right)\int_{\frac{1}{M_1}}^{\frac{1.293}{7}}\frac{du}{0.3247-0.8u}\int_2^{4.95-\frac{0.0782+6.8u}{0.477}}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt$$
$$+\left(\frac{3.4}{\frac{1.293}{7}}-5.4\right)\int_{\frac{1.293}{7}}^{\frac{16.867}{85}}\frac{8du}{2.339-5u}$$
$$\cdot\int_2^{4.3125-\frac{0.048875+5.3125u}{0.477}}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt.\tag{53}$$

令 $S_1 = 5.95 - \frac{0.0782+6.8u}{0.477}$, $S_2 = 5.3125 - \frac{0.048875+5.3125u}{0.477}$, 则有

$$\frac{dS_1}{S_1} = -\frac{0.8du}{0.3247-0.8u}, \quad \frac{dS_2}{S_2} = -\frac{du}{0.4678-u} = -\frac{5du}{2.339-5u}.$$

故由 (53) 式，我们有

$$S_2 \le 31.11688 \int_3^{4.35-\frac{0.0782}{0.477}} \frac{dS}{S} \int_2^{S-1} \frac{\log(t-1)}{t} dt. \tag{54}$$

由引理 2 - 引理 5, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{x^{\frac{1}{M_1}}<p\le x^{\frac{1}{8}}} \left(13.6 - \frac{30.6\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,p) \\
&\quad + \sum_{x^{\frac{1}{8}}<p\le x^{\frac{1}{6.94}}} \left(12.5 - \frac{28.125\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,p) \\
&\quad + \sum_{x^{\frac{1}{6.94}}<p\le x^{\frac{1}{6}}} \left(12.5 - \frac{28.125\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{6.94}}) \\
&\quad + \sum_{x^{\frac{1}{6}}<p\le x^{\frac{1}{5.2}}} \left(12.1 - \frac{27.225\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{6.94}}) \\
&\quad + \sum_{x^{\frac{1}{5.2}}<p\le x^{\frac{1}{4.9}}} \left(12.1 - \frac{27.225\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{7.2}}) \\
&\quad + \sum_{x^{\frac{1}{4.9}}<p\le x^{\frac{17}{36}}} \left(13.6 - \frac{30.6\log p}{\log x}\right) S(x,y,p,x^{\frac{1}{M_1}}) \\
&\le \frac{(S_3+S_4)y}{\log x},
\end{aligned} \tag{55}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_3 = &\sum_{x^{\frac{1}{M_1}}<p\le x^{\frac{1}{8}}} \frac{13.6\log x - 30.6\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}} + \sum_{x^{\frac{1}{8}}<p\le x^{\frac{1}{6}}} \frac{12.5\log x - 28.125\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}} \\
&+ \sum_{x^{\frac{1}{6}}<p\le x^{\frac{1.293}{7}}} \frac{12.1\log x - 27.225\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}} \\
&+ \sum_{x^{\frac{1.293}{7}}<p\le x^{\frac{1}{4.9}}} \frac{12.1\log x - 27.225\log p}{p\log\frac{x^{0.292375}}{p^{0.625}}}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{x^{\frac{1}{4.9}}<p\le x^{\frac{5}{18}}}\frac{13.6\log x-30.6\log p}{p\log\frac{x^{0.292375}}{p^{0.625}}}+\sum_{x^{\frac{5}{18}}<p\le x^{\frac{2.431}{6}}}\frac{13.6\log x-30.6\log p}{p\log\frac{x^{0.2339}}{p^{0.4}}}$$

$$+\sum_{x^{\frac{2.431}{6}}<p\le x^{\frac{17}{36}}}\frac{13.6\log x-30.6\log p}{p\log\frac{x^{0.173125}}{p^{0.25}}},$$

$$S_4=\sum_{x^{\frac{1}{M_1}}<p\le x^{\frac{1}{8}}}\frac{13.6\log x-30.6\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}}\int_2^{\frac{0.6494\log x}{\log p}-2.6}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt$$

$$+\sum_{x^{\frac{1}{8}}<p\le x^{\frac{0.6494}{4.6}}}\frac{12.5\log x-28.125\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}}\int_2^{\frac{0.6494\log x}{\log p}-2.6}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt$$

$$+100\epsilon.$$

又我们有

$$S_4\le\int_{\frac{1}{M_1}}^{\frac{1}{8}}\frac{13.6-30.6u}{u(0.3247-0.8u)}\,du\int_2^{\frac{0.6494}{u}-2.6}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt$$

$$+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{0.6494}{4.6}}\frac{12.5-28.125u}{u(0.3247-0.8u)}\,du\int_2^{\frac{0.6494}{u}-2.6}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt+200\epsilon$$

$$\le(10.1656)\int_{\frac{1}{M_1}}^{\frac{0.6494}{4.6}}\frac{du}{u(0.3247-0.8u)}\int_2^{\frac{0.6494}{u}-2.6}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt.$$

令 $S=\frac{0.6494}{u}-1.6$, 则有 $\frac{dS}{S}=-\frac{0.3247du}{u(0.3247-0.8u)}$, 故得

$$S_4\le\left(\frac{10.1656}{0.3247}\right)\int_3^{4.35-\frac{0.0782}{0.477}}\frac{dS}{S}\int_2^{S-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt. \tag{56}$$

由引理 2 - 引理 5, 我们有

$$\sum_{x^{\frac{1}{8}}<p\le x^{\frac{1}{4.9}}}\left(1.1-\frac{2.475\log p}{\log x}\right)S(x,y,p,x^{\frac{1}{8}})$$

$$+\sum_{x^{\frac{1}{6}}<p\le x^{\frac{1}{4.9}}}\left(0.4-\frac{0.9\log p}{\log x}\right)S(x,y,p,x^{\frac{1}{M_1}})\le\frac{(S_5+S_6)y}{\log x}, \tag{57}$$

其中

$$S_5=\sum_{x^{\frac{1}{8}}<p\le x^{\frac{1}{6}}}\frac{1.1\log x-2.475\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}}+\sum_{x^{\frac{1}{6}}<p\le x^{\frac{1.293}{7}}}\frac{1.5\log x-3.375\log p}{p\log\frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}}$$

$$+\sum_{x^{\frac{1.293}{7}}<p\le x^{\frac{1}{4.9}}}\frac{1.5\log x-3.375\log p}{p\log\frac{x^{0.292375}}{p^{0.625}}}.$$

$$S_6 = \sum_{x^{\frac{1}{8}} < p \le x^{\frac{2.744}{16}}} \frac{1.1 \log x - 2.475 \log p}{p \log \frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}} \int_2^{4.1952 - \frac{12.8 \log p}{\log x}} \frac{\log (t-1)}{t} dt$$

$$+ \sum_{x^{\frac{1}{6}} < p \le x^{\frac{1.293}{7}}} \frac{0.4 \log x - 0.9 \log p}{p \log \frac{x^{0.3247}}{p^{0.8}}} \int_2^{4.95 - \frac{0.0782 + \frac{6.8 \log p}{\log x}}{0.477}} \frac{\log (t-1)}{t} dt$$

$$+ \sum_{x^{\frac{1.293}{7}} < p \le x^{\frac{16.867}{85}}} \frac{0.4 \log x - 0.9 \log p}{p \log \frac{x^{0.292375}}{p^{0.625}}}$$

$$\cdot \int_2^{4.3125 - \frac{0.048875 + \frac{5.3125 \log p}{\log x}}{0.477}} \frac{\log (t-1)}{t} dt + 100\epsilon.$$

又

$$S_1 + S_3 + S_5$$

$$\le \int_{\frac{1}{M_1}}^{\frac{1.293}{7}} \frac{17 - 36\beta}{\beta(0.3247 - 0.8\beta)} d\beta + \int_{\frac{1.293}{7}}^{\frac{5}{18}} \frac{17 - 36\beta}{\beta(0.292375 - 0.625\beta)} d\beta$$

$$+ \int_{\frac{5}{18}}^{\frac{2.431}{6}} \frac{17 - 36\beta}{\beta(0.2339 - 0.4\beta)} d\beta + \int_{\frac{2.431}{6}}^{\frac{17}{36}} \frac{17 - 36\beta}{\beta(0.173125 - 0.25\beta)} d\beta$$

$$+\epsilon. \tag{58}$$

由于

$$\int_{\frac{1}{M_1}}^{\frac{1.293}{7}} \frac{d\beta}{\beta(0.3247 - 0.8\beta)} = \left(\frac{1}{0.3247}\right) \int_{\frac{1}{M_1}}^{\frac{1.293}{7}} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{0.8}{0.3247 - 0.8\beta}\right) d\beta$$

$$\le 2.407381.$$

$$\int_{\frac{1.293}{7}}^{\frac{5}{18}} \frac{d\beta}{\beta(0.292375 - 0.625\beta)} \le 2.758854.$$

$$\int_{\frac{5}{18}}^{\frac{2.431}{6}} \frac{d\beta}{\beta(0.2339 - 0.4\beta)} \le 3.905922.$$

$$\int_{\frac{2.431}{6}}^{\frac{17}{36}} \frac{d\beta}{\beta(0.173125 - 0.25\beta)} = \left(\frac{1}{0.173125}\right) \left(\log \frac{17}{14.586} + \log \frac{5.172}{3.965}\right)$$

$$\le 2.419667.$$

故由 (58) 式，则

$$S_1 + S_3 + S_5 \le 17(2.407381 + 2.758854 + 3.905922 + 2.419667)$$

$$-36\left(\frac{0.283463}{0.8}+\frac{(8)(0.398608)}{5}+\frac{0.536117}{0.4}+(4)(0.265753)\right)$$

$$\leq 73.1264. \tag{59}$$

$$S_6 \leq \int_{\frac{1}{8}}^{0.1713} \frac{1.1-2.475\beta}{\beta(0.3247-0.8\beta)}\, d\beta \int_2^{4.1952-12.8\beta} \frac{\log(t-1)}{t}\, dt$$

$$+\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1.293}{7}} \frac{0.4-0.9\beta}{\beta(0.3247-0.8\beta)}\, d\beta \int_2^{4.95-\frac{0.0782+6.8\beta}{0.477}} \frac{\log(t-1)}{t}\, dt$$

$$+\int_{\frac{1.293}{7}}^{\frac{16.867}{85}} \frac{0.4-0.9\beta}{\beta(0.292375-0.625\beta)}\, d\beta$$

$$\cdot\int_2^{4.3125-\frac{0.048875+5.3125\beta}{0.477}} \frac{\log(t-1)}{t}\, dt + 200\epsilon$$

$$\leq \left(\int_2^{2.6} \frac{\log(t-1)}{t}\, dt\right)\left(\frac{1.1}{\frac{1}{8}}-2.475\right)\left(\frac{1}{0.8}\right)\left(\log\frac{0.2247}{0.2183}\right)$$

$$+\left(\int_2^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t}\, dt\right)\left(\left(\frac{1.1}{0.133}-2.475\right)\left(\frac{1}{0.8}\right)\left(\log\frac{0.2183}{0.2031}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{0.4}{\frac{1}{6}}-0.9\right)\left(\frac{1}{0.8}\right)\left(\log\frac{0.1914}{0.1823}\right)\right)+\left(\int_2^{2.25} \frac{\log(t-1)}{t}\, dt\right)$$

$$\cdot\left(\left(\frac{1.1}{\frac{0.9726}{6.4}}-2.475\right)\left(\frac{1}{0.8}\right)\left(\log\frac{0.2032}{0.1875}\right)+\left(\frac{0.4}{\frac{1.2097}{6.8}}-0.9\right)\left(\frac{1}{0.8}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\log\frac{0.1824}{0.1769}\right)+\left(\frac{0.4}{\frac{1.293}{7}}-0.9\right)\left(\frac{1}{0.625}\right)\left(\log\frac{0.177}{0.168}\right)\right)$$

$$\leq 0.061. \tag{60}$$

由 (54) 和 (56) 式，我们有

$$S_2+S_4 \leq 62.43 \int_3^{4.35-\frac{0.0782}{0.477}} \frac{dS}{S} \int_2^{S-1} \frac{\log(t-1)}{t} dt. \tag{61}$$

由 (59) – (61) 式，我们有

$$\sum_{i=1}^{6} S_i \leq 73.1874 + 62.43 \int_3^{4.35-\frac{0.0782}{0.477}} \frac{dS}{S} \int_2^{S-1} \frac{\log(t-1)}{t} dt. \tag{62}$$

由引理 6, (51), (52), (55), (57) 和 (62) 式，我们有

$$\begin{aligned}15P_x(1,2) \geq &\left(\frac{y}{\log x}\right)\left\{\left(\frac{30}{0.477}\right)(1.164867)\right.\\&+\left(\frac{30}{0.477}\right)\int_3^{\frac{1.99675}{0.477}}\frac{dS}{S}\int_2^{S-1}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt-73.1874\\&\left.-62.43\int_3^{4.35-\frac{0.0782}{0.477}}\frac{dS}{S}\int_2^{S-1}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt\right\}\\\geq&\left(\frac{y}{\log x}\right)\left(73.262-73.1874\right.\\&\left.+(62.89-62.43)\int_3^{\frac{1.99675}{0.477}}\frac{dS}{S}\int_2^{S-1}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt\right).\end{aligned}$$

故得

$$P_x(1,x) \geq \frac{0.0049y}{\log x}.$$

即本定理成立.

本文承王元教授提出宝贵意见，作者谨致深切谢意.

参 考 文 献

[1] 王元. 科学记录, 1957, **1**(3): 1
[2] 王元. *Scientia Sinica*, 1962, **11**: 1607
[3] Jurkat W B, Richert H E. *Acta Arithmetica*, 1965, **XI**: 217
[4] Richert H E. *Mathematika*, 1969, **16**(1)
[5] 陈景润. 中国科学, 1976: 7 ~ 20
[6] 陈景润. *Scientia Sinica*, 1963: 751 ~ 764

关于素数理论中的一些问题 †

很荣幸能被邀请到巴黎大学作报告，同时也非常感谢 I. H. E. S. 邀请我来法国．今天我想就素数理论中的一些问题作一报告．在数论，也是在整个数学中，有两个最古老但尚未解决的问题，即所谓的孪生素数和偶数情形的哥德巴赫猜想．其中第一个问题断言："有无穷多素数 p 使得 $p+2$ 也是素数"，第二个问题即"每一个偶数 $N \geq 4$ 都能表示为两个素数之和．" 1921 年，最著名的数学家之一 G. H. 哈代在哥本哈根数学会的演讲中曾说过：偶数情形的哥德巴赫猜想，"...... 可能是数学上尚未解决的难题中一个最困难的"．简言之，用 $(1, A)$ 表示下面的命题：每一个充分大的偶数都是一个素数与至多 A 个素数的乘积之和．很多数学家利用筛法及素数分布的一些结论，对 A 的各种取值证明了上面的命题陈述．到目前为止，所得到的结果包括：

1948 年， Renyi 证明了 $(1, c)$，其中 c 是一个常数；

1963 年，潘承洞和 Barban 证明了 $(1, 5)$；

1965 年， Bombieri, Buchstab 和 A. I. Vinogradov 证明了 $(1, 3)$；

1966 年，我证明了 $(1, 2)$．我的原始证明非常长， 1973 年，我改进了证明，把它缩成到 20 页．同时，在 1973 年我证明了"存在无穷多素数 p 使得 $p+2$ 至多是两个素数的乘积．" 设 X 为一大偶数．令

$$C_x = \prod_{p|x, p>2} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

设 $P_x(1, 2)$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数： $x-p=p_1$ 或 $x-p=p_2p_3$，其中 p_1, p_2, p_3 为素数． 1966 年，我证明了

$$P_x(1, 2) \geq \frac{BC_x x}{(\log x)^2}, \tag{1}$$

其中 $B \geq 0.098$. 1973 年我成功地把它改进到 $B \geq 0.67$. 1975 年 Halberstam 和 Richert 得到 $B \geq 0.689$, 1978 年我得到了 $B \geq 0.81$. 最近，在一篇没有发表的手稿中我又得到了 $B \geq 0.9$. 不等式 (1) 中常数 B 的改进是

† 原载 Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1979 - 1980, pp.167 - 170.

重要的，因为它表明了我们的问题解数的增加．而且，如果能得到 $B > 9$．即可解决 $(1,1)$．

设 $P_x(1,1)$ 表示满足 $x - p = p_1$ 的素数 p 的个数．其中 p_1 是素数．王元在广义黎曼猜想下证明了：

$$P_x(1,1) \le \frac{8xC_x}{(\log x)^2},$$

Bombieri-Davenport 在无任何附加条件下也得到了这一结果．证明 $P_x(1,1) \le (8-\epsilon)xC_x/(\log x)^2, \epsilon$ 为任意小正数，被看作是一个困难的问题．在中国科学英文版 1978 年 21 卷第 6 期中我证明了

$$P_x(1,1) \le \frac{7.8342xC_x}{(\log x)^2}.$$

能表为两个素数之和的偶数称为哥德巴赫数．设 $M(x)$ 为不超过 x 的非哥德巴赫偶数的个数． 1975 年， Montgomery 和 Vaughan 证明了：$\exists\delta > 0$, 使得

$$M(x) \ll x^{1-\delta}.$$

1978 年潘承洞与我在一篇用中文写成的文章中证明了 $M(x) \le x^{0.989}$．最近，在一篇未发表的手稿中我得到了 $M(x) \le x^{0.98}$．现在设 x 为任一大正数．找一个 α, 使得在区间 $x - x^\alpha < n \le x$ 中至少有两个整数 n, 它们至多有两个素因子．这一问题首先由王元着手研究，接着由 Jurkat 和 Richert, 然后是 Richert 和我进行了研究．目前所得到的结果有：

$$\alpha \le \frac{10}{17}, \frac{14}{25}, \frac{6}{11}, \frac{1}{2}, 0.4856. 0.477, 0.47.$$

设 D 是一个大的正整数， $(D,K) = 1$, 假设 $P(D,K)$ 是算术级数 $\{Dn+K\}$ 中的最小素数．数论中另一著名的猜想是： $P(D,K) \ll D^2$. 给出 L 的下界，使得 $P(D,K) \ll D^L$ 这一问题，首先由 Linnik 开始研究，然后是潘承洞、我、 Jutila; 我和 Jutila. 各自得到的结果有

$$L \le C; 5448, 770; 630, 550; 168; 80.$$

在中国科学英文版 1979 年 22 卷第 8 期中我得到了 $L \le 17$. 自这篇文章发表之后，我又得到了 $L \le 15$. 我也知道 S. Graham 几乎和我们同时独立地证明了 $L \le 20$. 他的文章将在 “Acta Arithmetica” 上发表．

Goldbach 数的例外集合 *†

摘　要

我们把能表示成二个奇素数之和的偶数称为 Goldbach 数，以 $E(x)$ 记作不超过 x 的非 Goldbach 数的数目，本文证明了 $E(x) = O(x^{0.99})$.

1742 年，Goldbach 在写给 Euler 的信中提出了任一超过 2 的偶数都是二个素数之和的猜想. 我们称能够表成二个奇素数之和的偶数为 Goldbach 数，并以 $E(x)$ 表示所有不超过 x 的非 Goldbach 数的数目，则 Goldbach 猜想就是要证明当 $x \geq 2$ 时恒有 $E(x) \leq 2$. Goldbach 猜想虽然仍未解决，但 Виноградов 关于三素数定理的基本工作引起了许多人证明 $E(x) = o(x)$，即几乎所有的偶数都是 Goldbach 数.

1972 年 Vaughan 改进了前人的结果，证明了

$$E(x) = O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}).$$

最近， Montgomery 和 Vaughan 证明了：存在一个正常数 δ，使得对于一切充分大的 X，

$$E(X) = O(X^{1-\delta}).$$

一. 预 备 引 理

引理 1. 设 A 是充分大的固定常数， q_1, q_2 是整数， $q_1 \geq A, q_2 \geq A$. 若 β_1 是对应于某个实原特征 $(\bmod\, q_1)$ 的 L- 函数的实零点， β_2 是对应于另一实原特征 $(\bmod\, q_2)$ 的 L- 函数的实零点，其中 q_1 与 q_2 可能相等，但两个特征是不同的，则

$$\min(\beta_1, \beta_2) \leq 1 - \frac{1}{5\log q_1 q_2}.$$

* 1979 年 2 月 24 日收到.

† 原载中国科学， **23**(1980), no. 3, pp. 219 – 232.

证. 设 $\chi_i(n)$ 是一个实原特征 $(\bmod q_i)(i=1,2)$, 容易证明, $\chi_1(n)\chi_2(n)$ 是一个特征 $(\bmod q_1q_2)$, 而且

$$\chi_1(n)\chi_2(n) \neq \chi^0(n),$$

此处 $\chi^0(n)$ 是主特征 $(\bmod q_1q_2)$. 在文献 [1] 的引理 2 中取

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2\log q_1q_2},$$

我们得到

$$-0.4263\log q_1q_2 \le -\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2) + \mathrm{Re}\sum_{\rho}\left(\frac{1}{\sigma-\rho} - 4(\overline{\sigma}-\overline{\rho})\right)$$
$$\le 0.4263\log q_1q_2,$$

其中 ρ 取值于圆 $|s-\sigma| \le 1/2$ 内的 $L(s,\chi_1\chi_2)$ 的零点. 令 $z=\sigma-\rho$, 则

$$\mathrm{Re}(z^{-1}-4\overline{z}) = \mathrm{Re}\frac{\overline{z}}{|z|^2}(1-4|z|^2) \ge 0, \quad |z| \le \frac{1}{2}.$$

因此,

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2) \le 0.4263\log q_1q_2. \tag{1}$$

类似地可有

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1) \le 0.4263\log q_1 - \frac{1}{\sigma-\beta_1}, \tag{2}$$

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_2) \le 0.4263\log q_2 - \frac{1}{\sigma-\beta_2}. \tag{3}$$

另一方面, 有

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma-1} + O(1), \tag{4}$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1) - \frac{L'}{L}(\sigma,\chi_2) - \frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2) \ge 0. \tag{5}$$

由 (1)-(5) 式, 我们有

$$\frac{1}{\sigma-\beta_1} + \frac{1}{\sigma-\beta_2} \le \frac{1}{\sigma-1} + 0.853\log q_1q_2 = 2.853\log q_1q_2. \tag{6}$$

设 $\beta = \min(\beta_1,\beta_2)$, 则

$$\frac{2}{\sigma-\beta} \le 2.853\log q_1q_2, \tag{7}$$

从而

$$\beta < 1 - \frac{1}{5\log q_1 q_2}.$$

引理 1 证毕.

引理 2. 设 z 是充分大的正数，那么，由模 $q \le z$ 的实原特征所构成的一切 L- 函数中，至多有一个函数具有一个实零点 $\beta, \beta > 1 - \frac{1}{10\log z}$.

证. 由引理 1 推出.

引理 3. 设 q 是充分大的整数. 令

$$L(s) = \prod_{\chi(\bmod q)} L(s, \chi),$$

则 $L(s)$ 至多有一个零点 $s = \sigma + it$, 使得

$$\sigma \ge 1 - \frac{1}{20\log q(|t| + 1)}.$$

若这样的零点存在，则必是实零点，而且与之对应的是实特征.

证. 这是文献 [2] 中的一个引理.

引理 4. 设 ε 是任意正常数， $y \ge X^{\varepsilon}$, 令

$$N(y, \alpha, yX^{\varepsilon}) = \sum_{q \le y} \sum_{\chi_q}{}^{*} N(\chi_q, \alpha, yX^{\varepsilon}),$$

其中 $N(\chi_q, \alpha, yX^{\varepsilon})$ 表示 $L(s, \chi_q)$ 在区域

$$\sigma \ge \alpha, \quad |t| \le yX^{\varepsilon}$$

中的零点个数，则

$$N(y, \alpha, yX^{\varepsilon}) \le \begin{cases} (y^3 X^{\varepsilon})^{2(1-\alpha)}, & \alpha \ge 1 - \varepsilon, \\ (y^3 X^{\varepsilon})^{4(1-\alpha)}, & 0 < \alpha < 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

证. 由文献 [3] 定理 1 推出.

引理 5. 设 $Y = X^{\lambda}, \lambda = 0.02261, q \le Y$, 则对于模 $q \le Y$ 的所有原特征 χ, 函数 $L(s, \chi_q)$ 在区域

$$\sigma \ge 1 - \frac{1}{20(\lambda + 2\varepsilon)\log X}, \quad |t| \le \frac{X^{\lambda+\varepsilon}}{q} \tag{8}$$

中不为零，但可能有一个简单实零点 $\tilde{\beta}$ 是例外. 凡使 $L(\tilde{\beta},\chi)=0$ 的特征 $\chi(\bmod q), q\le Y$, 都由 $\tilde{\chi}$ 导出，而且 $\tilde{\beta}$ 满足

$$1-\frac{1}{20(\lambda+2\varepsilon)\log X}\le\tilde{\beta}\le 1-\frac{C_2}{\tilde{r}^{\frac{1}{2}}\log^2\tilde{r}}, \tag{9}$$

其中 ε 是任意小的固定正数，而 $\tilde{r}$ 表示例外模.

证. 由引理 2, 引理 3 及文献 [4] 中的引理 4.1 推出.

二. 圆 法

令

$$S(\alpha)=\sum_{y<p\le X}\log p e(p\alpha),$$

则

$$S^2(\alpha)=\sum_n R(n)e(n\alpha),$$

其中

$$R(n)=\sum_{\substack{n=p_1+p_2\\ y<p_1,p_2\le X}}\log p_1\log p_2.$$

令 $Q=X^{1-\lambda}, \tau=Q^{-1}$, 则

$$R(n)=\int_\tau^{1+\tau}S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha.$$

现将积分区间分为基本区间和次要区间. 我们定义基本区间由下面的 α 组成:

$$\alpha=\frac{a}{q}+\beta,\quad (a,q)=1,\quad |\beta|\le\frac{1}{qQ},\quad 1\le a\le q\le Y.$$

以 E 表示 $(\tau,1+\tau)$ 中所有不属于基本区间的 α 所成的集合. 现令

$$R(n)=R_1(n)+R_2(n),$$

其中 $R_1(n)$ 表示基本区间上的积分值, $R_2(n)$ 表示次要区间上的积分值.

本文目的在于证明：对于区间 $(1-\varepsilon)X < n \le X$ 中的偶数 n, 至多除去 $X^{1-0.5\lambda+3\varepsilon}$ 个例外值，总有 $R_1(n) > |R_2(n)|$. 由此立刻可证得定理.

引理 6. 设 $1 \le y \le x^{\frac{1}{4}}, y \le q \le xy^{-1}$,

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}, \quad (a,q)=1,$$

则

$$S(\alpha) \ll xy^{-\frac{1}{2}} \log^{17} x.$$

证. 由文献 [4] 引理 3.1 得出.

引理 7.

$$\sum_n R_2^2(n) \ll x^{3-\lambda} \log^{35} x.$$

证. 由 Parseval 恒等式，我们有

$$\sum_n R_2^2(n) = \int_E |S(\alpha)|^4 d\alpha \le \pi(x) \log^2 x \max_{\alpha \in E} |S(\alpha)|^2.$$

由引理 6 即可得证.

引理 8. 区间 $(1-\varepsilon)x < n \le x$ 中使 $|R_2(n)| > x^{1-0.25\lambda+\varepsilon}$ 的数的个数，至多为 $x^{1-0.5\lambda+3\varepsilon}$.

证. 易由引理 7 得出.

三. 基本区间上的积分

令

$$\alpha = \frac{a}{q} + \eta, \quad (a,q)=1, \quad 1 \le a \le q \le Y.$$

又设 $\chi_q(\bmod q)$ 是由原特征 $\chi^*(\bmod q^*)$ 导出的特征，则

$$S(\chi_q, \eta) = S(\chi^*, \eta),$$

此处

$$S(\chi_q, \eta) = \sum_{Y<p\le x} \chi_q(p) \log p e(p\eta).$$

设

$$\tau(\chi_q)=\sum_{h=1}^{q}\chi_q(h)e\left(\frac{h}{q}\right),$$

则

$$S(\alpha)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\tau(\overline{\chi}_q)S(\chi_q,\eta).$$

若 $\tilde{r}\nmid q$, 令

$$S(\chi_q^0,\eta)=T(\eta)+W(\chi_q^0,\eta),$$

$$S(\chi_q,\eta)=W(\chi_q,\eta),\quad \chi_q\neq\chi_q^0,$$

其中 χ_q^0 表示主特征 $(\bmod q)$,

$$T(\eta)=\sum_{Y<m\le x}e(m\eta).$$

我们得到

$$S(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}T(\eta)+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\chi(a)\tau(\overline{\chi}_q)W(\chi_q,\eta).$$

若 $\tilde{r}|q$, 令

$$S(\chi_q^0,\eta)=T(\eta)+W(\chi_q^0,\eta).$$

$$S(\tilde{\chi}\chi_q^0,\eta)=\tilde{T}(\eta)+W(\tilde{\chi}\chi_q^0,\eta),$$

$$S(\chi_q,\eta)=W(\chi_q,\eta),\quad \chi_q\neq\chi_q^0,\quad \chi_q\neq\tilde{\chi}\chi_q^0,$$

其中

$$\tilde{T}(\eta)=\sum_{Y<m\le x}m^{\tilde{\beta}-1}e(m\eta).$$

我们得到

$$S(\alpha)=\frac{\mu(q)T(\eta)}{\varphi(q)}+\frac{\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\tilde{\chi}(a)\tilde{T}(\eta)}{\varphi(q)}+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\tau(\overline{\chi}_q)W(\chi_q,\eta).$$

令

$$C_q(m)=\sum_{(a,q)=1}e\left(\frac{am}{q}\right),\quad \tau_q(\chi_d)=\sum_{(a,q)=1}\chi_d(a)e\left(\frac{a}{q}\right),$$
$$C_{\chi_q}(m)=\sum_{(a,q)=1}\chi_q(a)e\left(\frac{am}{q}\right),\quad C_{\chi_d,q}(m)=\sum_{(a,q)=1}\chi_d(a)e\left(\frac{am}{q}\right).$$

先假定不存在例外特征，于是

$$R_1(n)=\sum_{i=1}^{3}R_{1i}(n), \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}R_{11}(n)&=\sum_{q\le Y}\sum_{(a,q)=1}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}e\left(-\frac{an}{q}\right)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T^2(\eta)e(-n\eta)d\eta\\&=\sum_{q\le Y}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T^2(\eta)e(-n\eta)d\eta,\\R_{12}(n)&=2\sum_{q\le Y}\sum_{\chi_q}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}\chi_q(a)e\left(-\frac{na}{q}\right)\tau(\overline{\chi}_q)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T(\eta)\\&\quad\cdot W(\chi_q,\eta)e(-n\eta)d\eta\\&=2\sum_{d\le Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{\substack{q\le Y\\ d|q}}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}C_{\chi_d,q}(-n)\tau_q(\overline{\chi}_d)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T(\eta)W(\chi_d,\eta)d\eta,\end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_{\chi_d}{}^{*}$ 对所有原特征 $(\bmod q)$ 求和.

$$\begin{aligned}R_{13}(n)&=\sum_{q\le Y}\sum_{(a,q)=1}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\sum_{\chi_q'}\chi_q'(a)\tau(\overline{\chi}_q)\tau(\overline{\chi}_q')\\&\quad\cdot e\left(-\frac{na}{q}\right)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}W(\chi_q,\eta)W(\chi_q',\eta)e(-n\eta)d\eta\\&=\sum_{d_1\le Y}\sum_{d_2\le Y}\sum_{\chi_{d_1}}{}^{*}\sum_{\chi_{d_2}}{}^{*}\sum_{\substack{q\le Y\\ d_1|q,d_2|q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}C_{\chi_{d_1},\chi_{d_2},q}(-n)\\&\quad\cdot\tau_q(\overline{\chi}_{d_1})\tau_q(\overline{\chi}_{d_2})\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}W(\chi_{d_1},\eta)W(\chi_{d_2},\eta)e(-n\eta)d\eta,\end{aligned}$$

其中

$$C_{\chi_{d_1},\chi_{d_2},q}(-n)=\sum_{(a,q)=1}\chi_{d_1}(a)\chi_{d_2}(a)e\left(-\frac{na}{q}\right).$$

若存在例外特征，我们有

$$R_1(n) = \sum_{i=1}^{6} R_{1i}(n),$$

此外

$$\begin{aligned}R_{14}(n) &= \sum_{\substack{q\le Y\\ \tilde{r}|q}} \sum_{(a,q)=1} \frac{\tau_q^2(\tilde{\chi})}{\varphi^2(q)} e\left(-\frac{na}{q}\right) \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} \tilde{T}^2(\eta)e(-n\eta)d\eta \\ &= \sum_{\substack{q\le Y\\ \tilde{r}|q}} \frac{\tau_q^2(\tilde{\chi})}{\varphi^2(q)} C_q(-n) \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} \tilde{T}^2(\eta)e(-n\eta)d\eta,\end{aligned}$$

$$R_{15}(n) = 2\sum_{\substack{q\le Y\\ \tilde{r}|q}} \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} C_{\tilde{\chi},q}(-n)\tau_q(\tilde{\chi}) \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} T(\eta)\tilde{T}(\eta)e(-n\eta)d\eta,$$

$$R_{16}(n) = 2\sum_{\substack{q\le Y\\ \tilde{r}|q}} \frac{\tau_q(\tilde{\chi})}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi_q} \tau(\overline{\chi}_q) C_{\chi_q\tilde{\chi},q}(-n) \int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}} \tilde{T}(\eta)W(\chi_q,\eta)e(-n\eta)d\eta.$$

容易得到

$$R_{11}(n) = n\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} C_q(-n) + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}) = n\mathfrak{S}(n) + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}), \quad (11)$$

其中

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_{p\nmid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

令

$$\tilde{\mathfrak{S}}(n) = \tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{r}}{(\tilde{r},n)}\right)\mathfrak{S}(n)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p|\tilde{r}}}(p-2)^{-1},$$

$$\tilde{I}(n) = \sum_{Y<k\le n-Y} (k(n-k))^{\tilde{\beta}-1},$$

则由文献 [4], 我们有

$$R_{14}(n) = \tilde{\mathfrak{S}}(n)\tilde{I}(n) + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}(\tilde{r},n)). \quad (12)$$

令

$$W(\chi_d) = \left(\int_{-\frac{1}{dQ}}^{\frac{1}{dQ}} |W(\chi_d,\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

则

$$R_{12}(n)=2x^{\frac{1}{2}}\sum_{d\le Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}W(\chi_d)\sum_{\substack{q\le y\\ d|q}}\left|\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\tau_q(\overline{\chi}_d)C_{\chi_{d,q}}(-n)\right|, \tag{14}$$

$$R_{13}(n)\le\sum_{d_1\le Y}\sum_{d_2\le Y}\sum_{\chi_{d_1}}{}^{*}\sum_{\chi_{d_2}}{}^{*}W(\chi_{d_1})W(\chi_{d_2})\sum_{\substack{q\le Y\\ d_1|q,d_2|q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}$$
$$\cdot|\tau_q(\overline{\chi}_{d_1})\tau_q(\overline{\chi}_{d_2})C_{\chi_{d_1},\chi_{d_2},q}(-n)|. \tag{15}$$

引理 9. 设 χ_{r_i} 是原特征 $(\bmod r_i), i=1,2$. 又设 $r_3=(r_1,r_2), r_4=[r_1,r_2]$, 于是 $r_1=r_3r_5, r_2=r_3r_6, r_4=r_3r_5r_6$. 其中 $(r_5,r_6)=1$. 令 $m>0$,

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m)=\sum_{\substack{q=1\\ r_1|q,r_2|q}}^{\infty}\frac{|\tau_q(\overline{\chi}_{r_1})\tau_q(\overline{\chi}_{r_2})C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},q}(-m)|}{\varphi^2(q)},$$

$$A(r_1,r_2,m)=\frac{r_5r_6|\chi_{r_1}(r_6)\chi_{r_2}(r_5)|\prod\limits_{p|r_4,p\nmid m}(1+\frac{1}{(p-1)^2})}{\varphi^2(r_5r_6)\sqrt{\frac{r_3}{(m,r_3)}}\prod\limits_{p|\frac{r_3}{(m,r_3)}}(1-\frac{1}{p})^2}|\mu(r_5)||\mu(r_6)|,$$

则

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m)\le\frac{A(r_1,r_2,m)m}{\varphi(m)}.$$

证. 令 $q=kr_4$, 则由文献 [4] 引理 5.2,

$$\tau_q(\overline{\chi}_{r_1})=\overline{\chi}_{r_1}(kr_6)\mu(kr_6)\tau(\overline{\chi}_{r_1}),$$

$$\tau_q(\overline{\chi}_{r_2})=\overline{\chi}_{r_2}(kr_5)\mu(kr_5)\tau(\overline{\chi}_{r_2}).$$

由此得到

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m)\le\sum_{\substack{k=1\\ (k,r_4)=1}}^{\infty}\frac{|\mu^2(k)\mu(r_5)\mu(r_6)\chi_{r_1}(r_6)\chi_{r_2}(r_5)|}{\varphi^2(k)\varphi^2(r_4)}$$
$$\cdot|\tau(\overline{\chi}_{r_1})\tau(\overline{\chi}_{r_2})C_{\chi_{r_1}\cdot\chi_{r_2},q}(-m)|. \tag{16}$$

令 $h = kh_1 + r_4h_2$, 则

$$C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},q}(-m) = \sum_{\substack{h=1\\(h,kr_4)=1}}^{kr_4} \chi_{r_1}(h)\chi_{r_2}(h)e\left(-\frac{hm}{kr_4}\right)$$
$$= \sum_{h_1=1}^{r_4}\sum_{h_2=1}^{k} \chi_{r_1}(kh_1)\chi_{r_2}(kh_1)e\left(-\frac{h_1m}{r_4}\right)e\left(-\frac{h_2m}{k}\right)$$
$$= \chi_{r_1}(k)\chi_{r_2}(k)C_{\chi_{r_1}\chi_{r_2},r_4}(-m)C_k(-m). \tag{17}$$

我们可以假定 $(r_1,r_6) = (r_2,r_5) = 1$, 于是 $(r_3,r_5) = (r_3,r_6) = 1$. 令 $\chi_{r_1}(n) = \chi_{r_2}^{(1)}(n)\chi_{r_5}(n), \chi_{r_2}(n) = \chi_{r_3}^{(2)}(n)\chi_{r_6}(n)$, 其中 $\chi_{r_i}(n)$ 是原特征 $(\bmod r_i), i = 5,6$, 而 $\chi_{r_3}^{(i)}(n)(i = 1,2)$ 是原特征 $(\bmod r_3)$. 于是 $\chi_{r_1}(n)\chi_{r_2}(n) = \chi_{r_3}^{(1)}(n)\chi_{r_3}^{(2)}(n)\chi_{r_5}(n)\chi_{r_6}(n)$. 令

$$\chi_{r_3}^{(1)}(n)\chi_{r_3}^{(2)}(n) = \chi_{r_3}^{(3)}(n), \quad \chi_{r_5}(n)\chi_{r_6}(n) = \chi_{r_5r_6}(n),$$

则 $\chi_{r_5r_6}(n)$ 是原特征 $(\bmod r_5r_6)$. 但 $r_4 = r_3r_5r_6, (r_3,r_5r_6) = 1$, 所以

$$C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},r_4}(-m) = \sum_{h=1}^{r_4} \chi_{r_3}^{(3)}(h)\chi_{r_5r_6}(h)e\left(-\frac{hm}{r_4}\right)$$
$$= \sum_{\substack{h_1=1\\(h_2,r_3)=(h_1,r_5r_6)=1}}^{r_5r_6}\sum_{h_2=1}^{r_3} \chi_{r_3}^{(3)}(r_3h_1 + r_5r_6h_2)\chi_{r_5r_6}(r_3h_1 + r_5r_6h_3)$$
$$\cdot e\left(-\frac{h_1m}{r_5r_6}\right)e\left(-\frac{h_2m}{r_3}\right) = \chi_{r_3}^{(3)}(r_5r_6)\chi_{r_5r_6}(r_3)$$
$$\cdot \sum_{\substack{h_1=1\\(h_1,r_5r_6)=1}}^{r_5r_6} \chi_{r_5r_6}(h_1)e\left(-\frac{h_1m}{r_5r_6}\right) \sum_{\substack{h_2=1\\(h_2,r_3)=1}}^{r_3} \chi_{r_3}^{(3)}(h_2)e\left(-\frac{h_2m}{r_3}\right).$$

由 (16), (17) 式得到

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m) \le |\mu(r_5)\mu(r_6)\chi_{r_1}(r_6)\chi_{r_2}(r_5)\chi_{r_5r_6}(-m)|$$
$$\cdot|\tau(\overline{\chi}_{r_1})\tau(\overline{\chi}_{r_2})\tau(\chi_{r_5r_6})C_{\chi_{r_3}^{(3)}}(-m)|\frac{1}{\varphi^2(r_4)} \sum_{\substack{k=1\\(k,r_4)=1}}^{\infty} \frac{\mu^2(k)C_k(-m)}{\varphi^2(k)}.$$

由文献 [4] 引理 5.4, 我们得到

$$|C_{\chi_{r_3}^{(3)}}(-m)| \le \frac{\sqrt{\frac{r_3}{(m,r_3)}\varphi(r_3)}}{\varphi\left(\frac{r_3}{(m,r_3)}\right)},$$

$$\frac{1}{\varphi^2(r_4)}\left|\tau(\overline{\chi}_{r_1})\tau(\overline{\chi}_{r_2})\tau(\chi_{r_5r_6})C_{\chi_{r_3}^{(3)}}(-m)\right|$$
$$\leq \frac{r_5r_6}{\varphi^2(r_5r_6)\sqrt{\frac{r_3}{(r_3,m)}}\left(\prod_{\substack{p|r_3\\p|m}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p|\frac{r_3}{(m,r_3)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\right)}. \tag{18}$$

当 $\left(m,\frac{r_4}{r_3}\right)=1$ 时，容易得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^2(k)|C_k(-m)|}{\varphi^2(k)} \leq \prod_{\substack{p\nmid m\\p\nmid r_4}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|m\\p\nmid r_4}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)$$
$$=\prod_{\substack{p\nmid m\\p\nmid r_4}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|m\\p\nmid r_3}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}. \tag{19}$$

由 (18), (19) 式推知

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m)\leq A(r_1,r_2,m)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

引理 10. 设 m 是偶整数， $r_1>0, r_2>0$, 则

$$A(r_1,r_2,m)\leq\frac{10.41}{\sqrt{6}}.$$

证. 令

$$C_1(r_1,r_2,m)=\begin{cases}1, & 2|r_5r_6,\\ 2\sqrt{2}, & 2\nmid r_5r_6.\end{cases}$$

于是

$$\frac{r_5r_6}{\varphi^2(r_5r_6)}C_1(r_1,r_2,m)\leq 2\sqrt{2},\quad (r_5,r_6)=1.$$

$$A(r_1,r_2,m)\leq\frac{r_5r_6C_1(r_1,r_2,m)\prod\limits_{p\nmid r_4,p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\varphi^2(r_5r_6)\prod\limits_{\substack{p|\frac{r_3}{(m,r_3)}\\p\geq 3}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2p^{\frac{1}{2}}}$$
$$\leq\frac{2\sqrt{2}\prod\limits_{p\nmid r_4,p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\prod\limits_{\substack{p|\frac{r_3}{(m,r_3)}\\p\geq 3}}p^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}.$$

因此，有

$$A(r_1, r_2, m) \le \frac{9\prod_{p\ge 5}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\sqrt{6}} \le \frac{10.41}{\sqrt{6}}.$$

引理 11.

$$A(1, r, m) \le \frac{2r}{\varphi^2(r)}, \quad A(r, 1, m) \le \frac{2r}{\varphi^2(r)}.$$

由引理 9 和引理 11, 可以得到

$$\begin{aligned} R_{12}(n) &\le 4x^{\frac{1}{2}} \sum_{d\le Y} \sum_{\chi_d}{}^* \frac{ndW(\chi_d)}{\varphi(n)\varphi^2(d)} \\ &\le \frac{n}{\varphi(n)}\left\{8x^{\frac{1}{2}} \sum_{d\le \log^{10} x} \sum_{\chi_d}{}^* W(\chi_d) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{-6} x \sum_{d\le Y} \sum_{\chi_d}{}^* W(\chi_d)\right)\right\} \\ &\le \frac{n}{\varphi(n)}\{8x^{\frac{1}{2}} W(\log^{10} x)\} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} W(Y)}{\log^6 x}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$W(Y) = \sum_{d\le Y} \sum_{\chi_d}{}^* W(\chi_d).$$

由文献 [4] 中引理 5.1 与引理 5.2, 容易推知

$$R_{15}(n) \ll \frac{\tilde{\chi}(n)\tilde{n}\tilde{r}}{\varphi(n)\varphi^2(\tilde{r})} + (\tilde{r}, n)\chi^{1-\lambda+\varepsilon}. \tag{21}$$

由 (15) 式，引理 9 及引理 10, 我们得到

$$R_{13}(n) \le \frac{10.41 nW^2(Y)}{\sqrt{6}\varphi(n)}, \tag{22}$$

$$R_{16}(n) \le \frac{20.82x^{\frac{1}{2}} nW(Y, \tilde{r})}{\sqrt{6}\varphi(n)} + \frac{\varepsilon nW(Y)x^{\frac{1}{2}}}{\varphi(n)}, \tag{23}$$

其中

$$W(Y, \tilde{r}) = \sum_{d\le Y, \frac{[d,\tilde{r}]}{(d,\tilde{r})}\le x^{\varepsilon}} \sum_{\chi_d}{}^* W(\chi_d).$$

四. $W(Y)$ 的估计

令

$$\sum_p{}^*\chi_d(p)\log p=\begin{cases}\sum\limits_p\log p-\sum\limits_n 1, & \chi_d=\chi_d^0,\\ \sum\limits_p\tilde\chi(p)\log p+\sum\limits_n n^{\tilde\beta-1}, & \chi_d=\tilde\chi\chi_d^0,\\ \sum\chi_d(p)\log p, & \chi_d\neq\chi_d^0,\chi_d\neq\tilde\chi\chi_d^0.\end{cases}$$

由文献 [5] 引理 1 可得

$$W(\chi_d)=\left(\int_{-\frac{1}{dQ}}^{\frac{1}{dQ}}|W(\chi_d,t)|^2dt\right)^{\frac12}\le\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{dQ}\sum_{\substack{Y<p\le x\\ t-\frac{Qd}{2}\le p\le t}}{}^*\chi_d(p)\log p\right|^2dt\right)^{\frac12}$$

$$\le\pi\left(\int_Y^{x+\frac{Qd}{2}}\left|\frac{1}{dQ}\sum_{\substack{xY^{-3}<p\le x\\ t-\frac{Qd}{2}\le p\le t}}{}^*\chi_d(p)\log p\right|^2dt\right)^{\frac12}+O(x^{\frac12}d^{-1}Q^{-1}xY^{-3})$$

$$\le\frac{\pi\sqrt{x+\frac{dQ}{2}}}{dQ}\max_{xY^{-3}\le t\le x+\frac{Qd}{2}}\left|\sum_{\substack{xY^{-3}<p\le x\\ t-\frac{Qd}{2}\le p\le t}}{}^*\chi_d(p)\log p\right|+O(x^{\frac12-2\lambda}d^{-1}).$$

令

$$E_{0,\chi_d}=\begin{cases}1, & \chi_d=\chi_d^0,\\ 0, & \chi_d\neq\chi_d^0,\end{cases}\qquad E_{1,\chi_d}=\begin{cases}1, & \chi_d=\tilde\chi\chi_d^0,\\ 0, & \chi_d\neq\tilde\chi\chi_d^0.\end{cases}$$

并设 $d\le Y=x^\lambda,x^\varepsilon\le T\le x^{0.1}$, 则

$$\sum_{n\le x}\chi_d(n)\Lambda(n)=E_{0,\chi_d}x-\frac{E_{1,\chi_d}x^{\tilde\beta}}{\tilde\beta}-\sum_{\beta\ge\frac14,|\gamma|\le T}{}'\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x\log^2x}{T}\right),$$

此处 “′” 表示 $\rho\neq\tilde\beta$. 由此得到

$$\left|\sum_{\max(xY^{-3},t-\frac{Qd}{2})\le p\le\min(x,t)}{}^*\chi_d(p)\log p\right|\le\sum_{\substack{\beta\ge\frac14\\ |\gamma|\le Yx^\varepsilon d^{-1}}}{}'\left|\int_{\max(xY^{-3},t-\frac{Qd}{2})}^{\min(x,t)}s^{\rho-1}ds\right|$$

$$+\frac{d}{Yx^{0.9\varepsilon}}\sum_{\beta\ge\frac14,|\gamma|\le Y^4}{}'x^\beta+O(x^{1-4\lambda+\varepsilon})$$

$$\le\frac{Qd}{2}\sum_{\beta\ge\frac14,|\gamma|\le Yx^\varepsilon d^{-1}}{}'\left(\frac{x}{Y^3}\right)^{\beta-1}+\frac{d}{Yx^{0.9\varepsilon}}\sum_{\beta\ge\frac14,|\gamma|\le Y^4}{}'x^\beta+O(x^{1-4\lambda+\varepsilon}).$$

当 $1 \le d \le Y$, 可以得到

$$W(\chi_d) \le \frac{\pi\sqrt{1.5}x^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{\substack{\beta \ge \frac{1}{4} \\ |\gamma| \le x^{\lambda+\varepsilon}d^{-1}}}{}' (x^{1-3\lambda})^{\beta-1} + \chi^{\frac{1}{2}-0.8\varepsilon} \sum_{\substack{\beta \ge \frac{1}{4} \\ |\gamma| \le x^{4\lambda}}}{}' x^{\beta-1} + O(x^{\frac{1}{2}-2\lambda+2\varepsilon}d^{-1}). \tag{24}$$

$$W(Y) = \frac{\pi\sqrt{1.5}x^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{d \le Y} \sum_{\chi_d}{}^* \sum_{\substack{\beta \ge \frac{1}{4} \\ |\gamma| \le x^{\lambda+\varepsilon}d^{-1}}}{}' x^{(1-3\lambda)(\beta-1)} + x^{\frac{1}{2}-0.8\varepsilon} \sum_{d \le Y} \sum_{\chi_d}{}^* \sum_{\substack{\beta \ge \frac{1}{4} \\ |\gamma| \le x^{4\lambda}}}{}' x^{\beta-1} + O(x^{\frac{1}{2}-\lambda+2\varepsilon}). \tag{25}$$

先假定例外特征不存在. 此时由引理 4 和引理 5 可得

$$\begin{aligned} \sum_{d \le Y} \sum_{\chi_d}{}^* \sum_{\beta \ge \frac{1}{4}}{}' x^{(1-3\lambda)(\beta-1)} &\le -\int_{\frac{1}{4}}^{1-\frac{1}{(20(\lambda+\varepsilon)\log x}} x^{(1-3\lambda)(\beta-1)} dN(Y, \alpha, Yx^{\varepsilon}) \\ &\le \left(\frac{1-3\lambda}{1-9\lambda-2\varepsilon}\right) e^{-\frac{1-9\lambda-2\varepsilon}{20(\lambda+\varepsilon)}} + O(x^{-0.5\varepsilon}), \end{aligned} \tag{26}$$

而且类似地，有

$$\sum_{d \le Y} \sum_{\chi_d}{}^* \sum_{\substack{\beta \ge \frac{1}{4} \\ |\gamma| \le x^{4\lambda}}}{}' x^{\beta-1} = O(x^{0.3\varepsilon}). \tag{27}$$

由 (25), (26) 得到

$$W(Y) \le \frac{\pi\sqrt{1.5}(1-3\lambda)}{2(1-9\lambda-2\varepsilon)} e^{-\frac{1-9\lambda-2\varepsilon}{20(\lambda+\varepsilon)}} x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{2}-0.5\varepsilon}). \tag{28}$$

现在设有例外特征 $\tilde{\chi}(\bmod \tilde{r})$, 且

$$(1-\tilde{\beta})(\lambda+\varepsilon)\log x \le C_1 \le \frac{1}{20}.$$

引理 12.[3] 设 χ_1 是实的非主特征 $(\bmod q)$, 且 $\beta_1 = 1 - \delta_1$ 是 $L(s, \chi_1)$ 的实零点， χ 是一个特征 $(\bmod q), \rho = \beta + i\tau = 1 - \delta + i\tau$ 是 $L(s, \chi)$ 的一个零点， $\delta < 0.01, \beta \le \beta_1$. 若 $D = q(|\tau| + 1)$ 充分大，即 $D \ge D_0(\varepsilon)$, 则

$$\delta_1 \ge \frac{1-6\delta}{8\log D} D^{\frac{-(2+\varepsilon)\delta}{1-6\delta}}.$$

引理 13. 设 $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}, \chi$ 是一个特征 $(\bmod q), \rho = \beta + i\tau = 1 - \delta + i\tau$ 是 $L(s, \chi)$ 的零点，$\delta < 0.1$. 设 $D_1 = [q, \tilde{r}] \cdot (|\tau| + 1)$ 充分大，即 $D \geq D_0(\varepsilon)$, 则

$$\tilde{\delta} \geq \frac{1 - 6\delta}{8 \log D_1} D_1^{\frac{-(2+\varepsilon)\delta}{1-6\delta}}. \tag{29}$$

证. 设 $\chi^0_{[\tilde{r},q]}$ 是一个主特征 $(\bmod [\tilde{r}, q])$, 则

$$L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}\chi^0_{[\tilde{r},q]}) = L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}) = 0, \tag{30}$$

$$L(\beta + i\tau, \chi_q \chi^0_{[\tilde{r},q]}) = L(\beta + i\tau, \chi_q) = 0. \tag{31}$$

由此及引理 12 就可得需要的结果.

引理 14. 设 $\tilde{r} \leq x^{\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)}, \tilde{\delta}(\lambda + \varepsilon) \log x \leq C_1 \leq \frac{1}{20}$, 则

$$W(Y) \leq \left(\frac{\pi\sqrt{1.5}(6.075)\lambda\tilde{\delta}(1 - 3\lambda) \log x}{1 - 9\lambda - 2\varepsilon} \right) \left(\frac{20}{12.15} \right)^{1 - \frac{1-9\lambda-2\varepsilon}{3.0015\lambda}} x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}). \tag{32}$$

证. 在引理 13 中取 $D_1 = x^{1.5\lambda+\varepsilon}$, 得到

$$\tilde{\delta} \geq D_1^{-2.001\delta} / 8.1 \log D_1, \quad \delta \leq \varepsilon.$$

因此

$$S \geq \eta = \frac{\log \dfrac{1}{(8.1)(1.5\lambda \log x)\tilde{\delta}}}{(2.001)(1.5\lambda + \varepsilon) \log x}, \quad \delta \leq \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sum_{d \leq Y} \sum_{\chi_d}{}^{*} \sum_{\substack{\beta \geq 4 \\ |\gamma| \leq x^{\lambda+\varepsilon}/d}} x^{(1-3\lambda)(\beta-1)} \\
&\leq \int_{\frac{1}{4}}^{1-\varepsilon} (x^{3\lambda+4})^{4(1-\alpha)} x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)} \log x^{1-3\lambda} d\alpha \\
&\quad + \int_{1-\varepsilon}^{1-\eta} (x^{3\lambda+\varepsilon})^{2(1-\alpha)} x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)} \log x^{1-3\lambda} d\alpha + O(x^{-\varepsilon}) \\
&\leq \left(\frac{12.15\lambda\tilde{\delta}(1 - 3\lambda) \log x}{1 - 9\lambda - 2\varepsilon} \right) \left(\frac{20}{12.15} \right)^{1 - \frac{1-9\lambda-2\varepsilon}{3.0015\lambda}} + O(x^{-\frac{\varepsilon}{2}}).
\end{aligned}$$

由此及 (25) 式可得到引理结论.

由 (28) 式容易得知

$$W(\log^{10} x) \leq 10^{-10} x^{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

引理 15.

$$W(Y,\tilde{r}) \leq \left(\frac{4.05\pi\sqrt{1.5}(1-3\lambda)}{20(1-9\lambda-2\varepsilon)}\right)\left(\frac{20}{8.12}\right)^{1-\frac{1-9\lambda}{2.001\lambda}} x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}). \tag{34}$$

证.

$$W(Y,\tilde{r}) = \sum_{\substack{d\leq Y\\ \frac{[d,\tilde{r}]}{(d,\tilde{r})}\leq x^{\varepsilon}}} \sum_{\chi_d}{}^{*} W(\chi_d).$$

在引理 13 中取 $D_1 = x^{\lambda+2\varepsilon}$, 则得到

$$\delta \geq \eta = \frac{\log \dfrac{1}{8.1\lambda\tilde{\delta}\log x}}{2.001(\lambda+2\varepsilon)\log x}, \quad \delta \leq \varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{d\leq r\\ \frac{[d,\tilde{r}]}{(d,\tilde{r})}\leq x^{\varepsilon}}} \sum_{\chi_d}{}^{*} \sum_{\substack{\beta\geq\frac{1}{4}\\ |\gamma|\leq x^{\lambda+\varepsilon}/d}} x^{(1-3\lambda)(\beta-1)}\\
&\leq \int_{\frac{1}{4}}^{1-\varepsilon} (x^{3\lambda+\varepsilon})^{4(1-\alpha)} x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)} \log x^{1-3\lambda} d\alpha\\
&\quad + \int_{1-\varepsilon}^{1-\eta} (x^{3\lambda+\varepsilon})^{2(1-\alpha)} x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)} \log x^{1-3\lambda} d\alpha + O(x^{-\varepsilon})\\
&\leq \left(\frac{8.1\lambda\tilde{\delta}(1-3\lambda)\log x}{1-9\lambda-2\varepsilon}\right)\left(\frac{20}{8.11}\right)^{1-\frac{1-9\lambda}{2.001\lambda}} + O(x^{-\frac{\varepsilon}{2}}).
\end{aligned}$$

由此及 (24) 式即可得证.

五. 定理的证明

1. 首先, 假定不存在例外特征. 由 (10), (11), (20), (22) 及 (23) 式,

$$R_1(n) \geq n\mathfrak{S}(n) - \frac{n}{\varphi(n)}\left\{8x^{\frac{1}{2}}W(\log^{10}x) + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}W(Y)}{\log^6 x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{10.41W^2(Y)}{\sqrt{6}}\right\} + O(x^{1-\lambda+\varepsilon})$$
$$\geq \frac{n}{\varphi(n)}\left\{\prod_{\substack{p\geq 3\\ p\nmid n}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)n - 10^{-9}x - \left(\frac{10.411}{\sqrt{6}}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{\pi^2(1.5)(1-3\lambda)^2}{4(1-9\lambda)^2 e^{0.1\lambda^{-1}-0.09}}\right)x\right\} \geq \frac{n}{\varphi(n)}\{0.65x - 0.636x\} \geq 0.014x,$$

定理由此得证.

2. 若存在例外特征，则

$$R_1(n) \geq n\mathfrak{S}(n) - |\mathfrak{S}(n)\tilde{I}(n)| + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}(\tilde{r}, n))$$
$$-\frac{n}{\varphi(n)}\left\{8x^{\frac{1}{2}}W(\log^{10}x) + \frac{10.41}{\sqrt{6}}W^2(Y) + \frac{20.82W(Y,\tilde{r})x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}\right.$$
$$\left.+\varepsilon W(Y)x^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}W(Y)}{\log^6 x}\right) + O\left(\frac{n\tilde{r}\tilde{\chi}^2(n)}{\varphi^2(\tilde{r})}\right)\right\}. \tag{35}$$

我们分三种情形讨论.

1) $(n, r) = 1$ 或 $\prod_{p|\tilde{r}, p\nmid n}(p-2) \geq \frac{1}{\varepsilon}, (\tilde{r}, n) \leq x^{\frac{\lambda}{2}}$. 若 $\prod_{p|\tilde{r}, p\nmid n}(p-2) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, 则

$$|\tilde{\mathfrak{S}}(n)I(n)| \leq n\mathfrak{S}(n)\prod_{p|\tilde{r}, p\nmid n}(p-2)^{-1} \leq \varepsilon n\mathfrak{S}(n).$$

若 $(n, r) = 1$, 则 $\prod_{p|\tilde{r}, p\nmid n}(p-2)^{-1} \leq 6\varepsilon, (\tilde{r} > \log^{1.5}x)$. 因此

$$R_1(n) \geq \frac{n}{\varphi(n)}\left\{n\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) - 2\varepsilon x - 10^{-9}x - \varepsilon W(Y)x^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.-\frac{10.41}{\sqrt{6}}W^2(Y) - \frac{20.82W(Y,\tilde{r})}{\sqrt{6}}x^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$\geq \frac{n}{\varphi(n)}\left\{0.65x - \frac{10.41}{\sqrt{6}}\left(\frac{1.5\pi^2(1-3\lambda)^2 x}{4(1-9\lambda)^2 e^{0.1\lambda^{-1}-0.9}}\right)\right.$$
$$-\frac{\pi\sqrt{1.5}\varepsilon(1-3\lambda)x}{2(1-9\lambda)e^{\frac{1}{2}(0.1\lambda^{-1}-0.9)}} - \frac{20.83}{\sqrt{6}}\left(\frac{4.05\pi\sqrt{1.5}(1-3\lambda)}{20(1-9\lambda)}\right)$$
$$\left.\cdot\left(\frac{20}{8.11}\right)^{1-\frac{1-9\lambda}{2.001\lambda}}x\right\} \geq 0.0001x. \tag{36}$$

2) $(n, \tilde{r}) > x^{\frac{\lambda}{2}}$.

$$\sum_{\substack{n \le x \\ (n,\tilde{r}) > x^{\frac{\lambda}{2}}}} 1 \le \sum_{\substack{d|\tilde{r} \\ d > x^{\frac{\lambda}{2}}}} \sum_{\substack{n \le x \\ d|n}} 1 \le x^{1-\frac{\lambda}{2}} d(\tilde{r}) \le x^{1-\frac{\lambda}{2}+\varepsilon}. \tag{37}$$

3) $1 < (n, \tilde{r}) \le x^{\frac{\lambda}{2}}$, $\prod_{p|\tilde{r}, p\nmid n} (p-2) \le \frac{1}{\varepsilon}$.

由文献 [4] 中引理 4.1, 有 $\mu\left(\frac{\tilde{r}}{(4,\tilde{r})}\right) = 0$, 因而 $16 \nmid \tilde{r}, p^2 \nmid \tilde{r} (p > 3)$. 但

$$\prod_{p|\tilde{r}, p\nmid n} (p-2) \le \frac{1}{\varepsilon},$$

所以

$$\tilde{r} \le 16 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 (n, \tilde{r}) \le x^{\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)}.$$

由 (35) 式可得到

$$\begin{aligned} R_1(n) \ge n\mathfrak{S}(n) - |\tilde{\mathfrak{S}}(n)\tilde{I}(n)| - \frac{n}{\varphi(n)} \Bigg\{ & 8x^{\frac{1}{2}} W(\log^{10} x) + \frac{10.41 W^2(Y)}{\sqrt{6}} \\ & + \frac{20.82 W(Y, \tilde{r}) x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}} + \varepsilon W(Y) x^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} W(Y)}{\log^6 x}\right) \\ & + O(x^{1-\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon}) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{38}$$

容易证明

$$n\mathfrak{S}(n) - |\tilde{\mathfrak{S}}(n)\tilde{I}(n)| \ge 0.651 e^{-\frac{1}{0.45}} \tilde{\delta} x \log x \frac{n}{\varphi(n)}.$$

因此，由此及 (32)–(35) 和 (38) 式，推出

$$R_1(n) \ge (0.0705 - 0.0485 - 0.002) \frac{n}{\varphi(n)} \tilde{\delta} x \log x \ge 0.001 x^{1-0.25\lambda-0.5\varepsilon}. \tag{39}$$

由 (36), (37), (39) 式及引理 8, 定理即可得证.

参 考 文 献

[1] Jutila M. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 1969, **458**: 1 ~ 32

[2] Miech R J. *Acta Arith.*, 1969, **15**: 119 ~ 137

[3] Jutila M. *Mathematica Scandinavica*, 1977, **41**: 45 ~ 62

[4] Montgomery H L, Vaughan R C. *Acta Arith.*, 1975, **27**: 353 ~ 370

[5] Gallagher P X. *Invent Math.*, 1970, **11**: 329 ~ 339

[6] Prachar K. Primzahlverteilung. Springer, 1957

[7] Davenport H. Multiplicative Number Theory. Chicago: Markham

某种三角和的估计及其应用 *†

摘　要

设 $N>3$ 是一个整数．令 $r=\log N, H=e^{0.5\sqrt{r}}$．设 $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}.(a,q)=1,|\theta|\leq 1$. 本文的目的在于证明当 $1<q<N$ 时，我们有

$$\sum_{p\leq N}e^{2\pi i\alpha p}\leq 1.2Nr^{0.75}(\log r)\left(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{\sqrt{\log q}}{H}\right).$$

一. 引　言

形如 $\sum_{p\leq N}e^{2\pi i\alpha p}$ 的三角和的估计在解析数论中有很多应用．例如在哥德巴赫猜想 (可见文献 [1] 中的第五章和第六章) 及素数分布方面 (可见文献 [2] 中的第五章和第八章), 都有很重要的应用．现设 $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q},1<q<N,|\theta|\leq 1$. 令 $S(\alpha)=\sum_{p\leq N}e^{2\pi i\alpha p}$. 很多著名的数学家都曾经对 $S(\alpha)$ 的估计进行过研究．目前关于 $S(\alpha)$ 的估计最好的结果是 Vinogradov 所得到的，他证明了下面著名的结果 (可见文献 [1] 中的第五章的定理 1 或见文献 [2] 中的第九章定理 1).

设 α 是一个实数，且可表为 $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},(a,q)=1,|\theta|\leq 1$. 令 N 是一个整数， $N>3,r=\log N,H=e^{0.5\sqrt{r}}$, 则当 $1<q<N$ 时，有

$$S(a)\ll Nr^2\left(\sqrt{\frac{q}{N}+\frac{1}{q}+\frac{1}{H}}\right).$$

现在我们较大地改善了关于 $S(\alpha)$ 的估计，当 $1<q<N$ 时，我们有

$$S(\alpha)\leq 1.2Nr^{0.75}(\log r)\left(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{\sqrt{\log q}}{H}\right).$$

---

* 1982 年 7 月 12 日收到， 1984 年 7 月 26 日收到修改稿.

† 原载中国科学， A 辑， **27**(1984), no. 12, pp. 1096 – 1103.

二. 几 个 引 理

引理 1 当 $N \le 6$ 时，则我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \ge \log 1.95N.$$

证 当 $N=6$ 时，我们有 $\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n}=2.45 \le \log 11.7$, 故引理成立. 现设 $M \ge 6$, 又设当 $N=6,\cdots,M$ 时，引理 1 都能够成立而来证明当 $N=M+1$ 时引理 1 也能成立. 由于 $\log 1.95(M+1)=\log 1.95M+\log\frac{M+1}{M}=\log 1.95M-\log(1-\frac{1}{M+1}) \ge \log 1.95M+\frac{1}{M+1} \ge \sum_{n=1}^{M+1}\frac{1}{n}$, 故引理 1 得证.

引理 2 当 $P \ge 1$, 而 α 是一个实数时，则我们有

$$\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\alpha x}\right| \le \min\left(P, \frac{1}{2((\alpha))}\right).$$

其中 $((\alpha))=\min(\{\alpha\},1-\{\alpha\})$.

证 见文献 [2].

引理 3 设 $(a,q)=1, a\ge 0, q\ge 1$, 而 $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, 其中 $|\theta|\le 1$. 又设 $U>0, P\ge 1$, 则对于任一个整数 M, 我们都有

$$\sum_{n=M+1}^{M+P}\min\left(U, \frac{1}{2((\alpha n+\beta))}\right) \le \left(\left[\frac{P-1}{q}\right]+1\right)(5U+q\log q).$$

证 不妨假定 P 是一个正整数. 当 $q\le 5$ 时，则由于 $[\frac{P-1}{q}]+1 \ge \frac{P}{q}$, 故知本引理能够成立. 现设 $q\ge 6$, 当 $P\le q$ 时，则可考虑求和是从 $M+1$ 到 $M+q$, 我们有

$$\alpha(M+x)+\beta=\frac{ax+[Bq+aM+\frac{\theta M}{q}]}{q}+\frac{\{Bq+\frac{\theta M}{q}\}+\frac{\theta x}{q}}{q}.$$

由于 $(a,q)=1$, 故当 x 经过 1 到 q 时，$ax+[Bq+aM+\frac{\theta M}{q}]$ 经过模 q 的一个完全剩余系. 又当 x 从 1 到 q 时, 则由于 $|\theta|\le 1$ 而得到 $|\{Bq+\frac{\theta M}{q}\}+\frac{\theta x}{q}|\le 2$. 由于 $q\ge 6$, 故有

$$\sum_{n=M+1}^{M+q}\min\left(U, \frac{1}{2((\alpha n+B))}\right) \le 5U+\sum_{3\le l\le \frac{q}{2}}\frac{q}{l-2} \le 5U+q\log q.$$

当 $P > q$ 时，则可将区间 $[M+1, M+P]$ 分成为不多于 $[\frac{P-1}{q}]+1$ 个子区间，而每个区间的长度不超过 q, 故引理 3 得证.

三. 定 理

设 $N > 3$ 是一个整数. 令 $r = \log N, H = e^{0.5\sqrt{r}}$. 又设 $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta q^2}{q^2}$, 其中 $(a, q) = 1$, 而 $|\theta| \le 1$.

定理 1 当 $1 < q < N$ 时，我们有

$$S(a) \le 1.2Nr^{0.75}(\log r)\left(\sqrt{\frac{5}{q} + \frac{q\log q}{N}} + \frac{\sqrt{\log q}}{H}\right).$$

证 由文献 [3] 有

$$S(\alpha) \le \pi(N) \le \frac{1.5N}{\log N}. \tag{1}$$

当 $\sqrt{\frac{5}{q}} \ge 1.25r^{-\frac{7}{4}}(\log r)^{-1}$ 时，则由 (1) 式知道定理 1 能够成立，故可假定

$$q \ge \frac{5r^{7/2}(\log r)^2}{(1.25)^2} = 3.2r^{7/2}(\log r)^2. \tag{2}$$

当 $\sqrt{\frac{q\log q}{N}} \ge 1.25r^{-\frac{7}{4}}(\log r)^{-1}$ 时，则由 (1) 式知道定理 1 能够成立，故可假定

$$q\log q \le 1.5625Nr^{-\frac{7}{2}}(\log r)^{-2}. \tag{3}$$

先设 $N \ge 6$, 此时我们有 $3.2(\log r)^2 \ge 1$, 故由 (2) 式，有 $q \ge r^{7/2}$ 及

$$r^{\frac{3}{4}}(\log r)\sqrt{\log q} \ge \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{4}}(\log r)^{\frac{3}{2}}. \tag{4}$$

令 $f_1(x) = \frac{x^{1.75}(\log x)^{1.5}}{e^{0.5\sqrt{x}}}$, 则我们有

$$f_1'(x) = \left(\frac{1.75}{x} + \frac{1.5}{x\log x} - \frac{1}{4x^{1/2}}\right)f_1(x) = \left(\frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}\log x} - 1\right)\left(\frac{f_1(x)}{4x^{1/2}}\right),$$

设 x_0 为方程式 $\frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}\log x} - 1 = 0$ 的根，则有 $70.6 \le x_0 \le 70.72$, 当 $x > x_0$ 时， $f_1(x)$ 是 x 的单调减少函数，而当 $x < x_0$ 时， $f_1(x)$ 是 x 的

单调增加函数．由于 $f_1(1.94) \geq 0.8, f_1(900) \geq 0.8$, 得到当 $1.94 \leq x \leq 900$ 时，有 $f_1(x) \geq 0.8$. 故由 (1), (4) 式和 $7 > e^{1.94}$, 我们知道当 $7 \leq N \leq e^{900}$ 时定理 1 成立．稍经计算后，当 $4 \leq N \leq 6$ 时，有

$$\pi(N) \leq Nr^{\frac{3}{4}}(\log r)\left(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{\sqrt{\log q}}{H}\right).$$

所以我们可以假定

$$N \geq e^{900}. \tag{5}$$

$$H = e^{0.5\sqrt{r}} \geq e^{15}. \tag{6}$$

由于 $NH^{-60} = e^{\sqrt{r}(\sqrt{r}-30)} \geq 1$, 所以我们有

$$N \geq H^{60}. \tag{7}$$

$$\log 2H = \left(1+\frac{\log 2}{\log H}\right)\log H \leq \left(1+\frac{\log 2}{15}\right)\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right). \tag{8}$$

由 $\frac{e^{900}}{(900)^{132.3}} > 1$ 及当 $t \geq e^{132.3}$ 时，我们有 $\frac{d}{dt}(\frac{t}{(\log t)^{132.3}}) = \frac{\log t - 132.3}{(\log t)^{133.3}} \geq 0$, 故得到

$$N \geq r^{132.3}. \tag{9}$$

令 $f_2(x) = \frac{e^{0.5\sqrt{x}}}{x^{2.2}}$, 则我们有 $f_2'(x) = (\frac{1}{4x^{1/2}} - \frac{2.2}{x})f_2(x) = (1-\frac{8.8}{\sqrt{x}})(\frac{f_2(x)}{4x^{1/2}})$. 故当 $x \geq 900$ 时，我们有 $f_2(x) \geq f_2(900) = \frac{e^{15}}{(900)^{2.2}} \geq 1$, 而由 (5) 式有

$$H \geq r^{2.2}. \tag{10}$$

令 $f_3(x) = x^{0.85}e^{(0.5-\log 2)\sqrt{x}}$, 则我们有 $f_3'(x) = (\frac{0.85}{x} + \frac{0.5-\log 2)}{2x^{1/2}})f_3(x) = (\frac{1.7}{\sqrt{x}} + 0.5 - \log 2)(\frac{f_3(x)}{2x^{1/2}})$, 故当 $x \geq 900$ 时我们有 $f_3(x) \leq f_3(900) = (900)^{0.85}e^{(0.5-\log 2)(30)} \leq 1$. 由 (5) 式，有 $r^{0.85}e^{(0.5-\log 2)\sqrt{r}} \leq 1$, 故得到

$$\frac{r^{0.85}}{2\sqrt{r}} \leq \frac{1}{H}. \tag{11}$$

由 (3) 和 (5) 式，有

$$\begin{aligned} q\log q &\leq N^{\frac{1}{2}}(\frac{q\log q}{N})^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(\log q)^{\frac{1}{2}} \leq 1.25Nr^{-\frac{7}{4}}(\log r)^{-1}(\frac{q\log q}{N})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 0.0003Nr^{-\frac{3}{4}}(\frac{q\log q}{N})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{12}$$

又由 (2) 和 (5) 式，有

$$\left(\frac{5}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \le 1.25r^{-\frac{7}{4}}(\log r)^{-1}\left(\frac{5}{q}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

令 $P = \prod\limits_{p\le\sqrt{N}} p$, 则有

$$S(\alpha) = \sum_{\substack{1\le n\le N\\(n,p)=1}} e^{2\pi i\alpha n} + R_1 = \sum_{1\le n\le N} e^{2\pi i\alpha n}\sum_{d|n,d|P}\mu(d) + R_1 = S_1 + R_1, \tag{14}$$

其中 $R_1 \le \sqrt{N}$. 又有

$$|S_1| \le |S_2| + \left(\frac{2\log r}{\log 2}\right)\max_{H\le M\le H_r^2} S(M) + \left(\frac{r}{\log 2}\right)\max_{H_r^2\le M\le N} S(M), \tag{15}$$

其中 $|S_2| = \Big|\sum\limits_{d|P}\mu(d)\sum\limits_{1\le m\le\min(H,\frac{N}{d})} e^{2\pi i\alpha dm}\Big|$, 而

$$S(M) = \sum_{d|P}\Big|\sum_{\min(M,\frac{N}{d})\le m\le\min(2M,\frac{N}{d})} e^{2\pi i a dm}\Big|.$$

当 $M \ge H$ 时，则由引理 2 有

$$\begin{aligned} S(M) &\le \sum_{1\le d\le\frac{N}{M}}\min\left(\frac{N}{d},\frac{1}{2((\alpha d))}\right) \le \Bigg(\sum_{1\le d\le\frac{q}{2}} + \sum_{\frac{q}{2}<d\le\frac{3q}{2}} \\ &\quad + \cdots + \sum_{(l-\frac{1}{2})q<d\le(l+\frac{1}{2})q}\Bigg)\min\left(\frac{N}{d},\frac{1}{2((\alpha d))}\right), \end{aligned}$$

其中 $l = [\frac{N}{Mq} + \frac{1}{2}]$. 现在我们来估计 $\sum_{1\le d\le\frac{q}{2}}\min(\frac{N}{d},\frac{1}{2((\alpha d))})$. 以 k 记 αd 对模 q 的最小非负剩余. 由于 $(a,q)=1$ 及 $1\le d\le\frac{q}{2}$, 故此时有 $1\le k\le q-1$. 及

$$((\alpha d)) = \left(\left(\frac{ad+\frac{Qd}{q}}{q}\right)\right) = \left(\left(\frac{k+0.5\theta_1}{q}\right)\right),$$

其中 $|\theta_1| \le 1$. 令

$$u = \begin{cases} k, & \text{当}1\le k\le\frac{q}{2}\text{时}, \\ q-k, & \text{当}\frac{q}{2}<k\le q-1\text{时}. \end{cases}$$

则此时有 $((\alpha d)) \geq \frac{u-\frac{1}{2}}{q}$ 而得到

$$\sum_{1\leq d\leq \frac{q}{2}} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{2((\alpha d))}\right) \leq \sum_{1\leq k\leq q-1} \frac{1}{2\left(\left(\frac{k+0.5\theta_1}{q}\right)\right)}$$
$$\leq \sum_{1\leq u\leq \frac{q}{2}} \frac{q}{u-\frac{1}{2}} \leq 2q + q\int_1^{\frac{q}{2}} \frac{dt}{t-\frac{1}{2}} \leq q(2+\log q). \tag{16}$$

由引理 3, 有

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{(j-\frac{1}{2})q<d\leq(j+\frac{1}{2})q} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{2((\alpha d))}\right) \leq \sum_{j=1}^{l}\left(\frac{5N}{(j-\frac{1}{2})q} + q\log q\right)$$
$$\leq \left(\frac{5N}{q}\right)\left(2+\int_1^l \frac{dt}{t-\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{N}{Mq}+\frac{1}{2}\right)q\log q$$
$$\leq \left(\frac{N}{M}+\frac{q}{2}\right)\log q + \left(\frac{5N}{q}\right)\left(2+\log 2+\log\frac{N}{Mq}\right). \tag{17}$$

现在我们来估计 $|S_2|$. 我们可以将 $|S_2|$ 改写成为

$$|S_2| = \left|\sum_{1\leq m\leq H} \cdot \sum_{d\leq \frac{N}{m}, d|P} \mu(d)e^{2\pi i\alpha dm}\right|.$$

令 $k_0 = [\frac{r}{2\log H}] + 1$, 当 $0 \leq k \leq k_0$ 时, 则令 δ_k 是一个正整数满足条件 $\delta_k|P$, 而 δ_k 恰好有 k 个素数因子大于 H^2, 有

$$|S_2| \leq \sum_{k=0}^{k_0} S_2^{(k)}, \tag{18}$$

其中 $S_2^{(k)} = \left|\sum_{1\leq m\leq H} \sum_{\delta_k\leq \frac{N}{m}} \mu(\delta_k)e^{2\pi i\alpha\delta_k m}\right|$.

现在先来对 $S_2^{(0)}$ 进行估计. 设 δ_0 的素数因子的个数为 $l(\delta_0)$, 则有 $\delta_0 \leq H^{2l(\delta_0)}$. 当 $\delta_0 \geq \frac{N}{H^2}$ 时, 有 $H^2 l(\delta_0) \geq \frac{N}{H^2}$, 即有 $l(\delta_0) \geq \frac{r}{2\log H} - 1$. 由于 $d(\delta_0) = 2^{l(\delta_0)} \geq 2^{\frac{r}{2\log H}-1}$, 引理 1 及 $\sum_{m\leq y} d(m) = \sum_{m\leq y}\sum_{d|m} 1 \leq \sum_{d\leq y}\sum_{l\leq \frac{y}{d}} 1 \leq y(1+\log y)$, 而得到

$$S_2^{(0)} \leq \sum_{1\leq m\leq H}\Big(\sum_{\delta_0\leq \frac{N}{H^2}} 1 + \sum_{\frac{N}{H^2}<\delta_0\leq \frac{N}{m}} 1\Big)$$
$$\leq \frac{N}{H} + \sum_{1\leq m\leq H} \sum_{\frac{N}{H^2}<\delta_0\leq \frac{N}{m}} \frac{d(\delta_0)}{2^{\frac{r}{2\log H}-1}}$$
$$\leq \frac{N}{H} + 2^{1-\frac{r}{2\log H}} N(1+r)\log 2H. \tag{19}$$

现在对 $1 \le k \le k_0$ 时的 $S_2^{(k)}$ 进行估计. 令

$$T_k = \Big| \sum_{1 \le m \le H} \sum_{pt \le \frac{N}{m}} \mu(t) e^{2\pi i \alpha ptm} \Big|,$$

其中 p 是经过区间 $[H^2, \sqrt{N}]$ 中的所有素数而 t 是一个满足条件 $t|P$ 的正整数, t 恰好有 $k-1$ 个素数因子大于 H^2. 当 $k \ge 2$ 时, 对于 T_k 中的 $p|t$ 的那个部分, 有

$$\le \sum_{1 \le m \le H} \sum_{H^2 \le p \le \sqrt{Z}} \frac{N}{mp^2} \le N(\log 2H)\Big(\frac{1}{H^4} + \int_{H^2}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\Big) \le \frac{1.01 N \log 2H}{H^2}.$$

当 $k \ge 2$ 时, T_k 中所剩余下来的项都是 $S_2^{(k)}$ 中的项, 且 $S_2^{(k)}$ 中的项都在 T_k 中出现 k 次. 故当 $k \ge 2$ 时, 有

$$S_2^{(k)} \le \frac{T_k}{k} + \frac{1.01 N \log 2H}{H^2}. \tag{20}$$

又 (20) 式当 $k = 1$ 时成立, 故当 $k \ge 1$ 时, (20) 式都成立. 我们有

$$\sum_{m \le y} |\mu(m)| = \sum_{m \le y} \sum_{d^2 | m} \mu(d) = \sum_{d \le \sqrt{y}} \mu(d) \sum_{m \le y, d^2 | m} 1 = \sum_{d \le \sqrt{y}} \mu(d) \Big[\frac{y}{d^2}\Big],$$

故得到 $\Big| \sum_{m \le y} |\mu(m)| - \sum_{d \le \sqrt{y}} \frac{\mu(d) y}{d^2} \Big| \le \sqrt{y}$. 又由于 $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$ 及 $\sum_{d > \sqrt{y}} \frac{1}{d^2} \le \frac{1}{y} + \int_{\sqrt{y}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y}$, 而得到

$$\Big| \sum_{m \le y} |\mu(m)| - \frac{6y}{\pi^2} \Big| \le 1 + 2\sqrt{y}. \tag{21}$$

现在来对于 $1 \le k \le k_0$ 时的 T_k 进行估计. 令 $\xi(u)$ 是 $u = mp$ 的表示数, 其中 $1 \le m \le H^2$, 而 $H^2 \le p \le \sqrt{N}$. 当 $u < H^2$ 时, 有 $\xi(u) = 0$. 当 $u > \sqrt{N}H$ 时, 有 $\xi(u) = 0$. 当 $H^2 \le u \le \sqrt{N}H$ 时, 有 $\xi(u) \le 1$. 因此

$$T_k \le \sum_{0 \le l \le \frac{\log(\sqrt{N}H^{-1})}{\log 2}} T_k^{(l)}, \tag{22}$$

其中 $T_k^{(l)}=\left|\sum_{2^lH^2\le u<2^{l+1}H^2}\xi(u)\sum_{t\le\frac{N}{u}}\mu(t)e^{2\pi i\alpha tu}\right|$. 由引理 1 到引理 3 和 (21) 式，有

$$T_k^{(l)}\le\Big(\sum_{2^lH^2\le u<2^{l+1}H^2}\xi(u)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{2^lH^2\le u<2^{l+1}H^2}\Big|\sum_{t\le\frac{N}{u}}\mu(t)e^{2\pi i\alpha tu}\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\Big(\sum_{1\le m\le H}\frac{(2.5)(2^lH^2)}{m\log\frac{2^lH^2}{m}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{t_1\le2^{-l}NH^{-2}}\sum_{t_2\le2^{-l}NH^{-2}}|\mu(t_1)\mu(t_2)|$$

$$\cdot\sum_{2^lH^2\le u\le\min(2^{l+1}H^2,\frac{N}{t_1},\frac{N}{t_2})}e^{2\pi i\alpha(t_1-t_2)u}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\Big(\frac{(1.6)2^{\frac{l}{2}}H(\log2H)^{\frac{1}{2}}}{(\log2)^{\frac{1}{2}}(l+1)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$\cdot\Big\{\sum_{t_1\le2^{-l}NH^{-2}}\sum_{t_2\le2^{-l}NH^{-2}}|\mu(t_1)\mu(t_2)|\min\Big(2^lH^2,\frac{1}{2((\alpha(t_1-t_2))}\Big)\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\Big(\frac{(1.6)2^{\frac{l}{2}}H(\log2H)^{\frac{1}{2}}}{(\log2)^{\frac{1}{2}}(l+1)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$\cdot\Big\{\sum_{t\le2^{-l}NH^{-2}}|\mu(t)|\Big(\frac{N}{2^lH^2q}+1\Big)((5)(2^lH^2)+q\log q)\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\Big\{\frac{(1.6)2^{\frac{1}{2}}H(\log2H)^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{(\log2)^{\frac{1}{2}}H2^{\frac{l}{2}}(l+1)^{\frac{1}{2}}}\Big\}\Big(\frac{6}{\pi^2}+\frac{2}{\sqrt{2^{-l}NH^{-2}}}+\frac{1}{2^{-l}NH^{-2}}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\Big(\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}+\frac{(5)(2^lH^2)}{N}+\frac{\log q}{2^lH^2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

当 $0\le l\le\frac{\log(\sqrt{N}H^{-1})}{\log2}$ 时，我们有 $2^l\le\sqrt{N}H^{-1}$, 故由 (7) 式有

$$2^{-l}NH^{-2}\ge\sqrt{N}H^{-1}\ge H^{29}. \tag{24}$$

当 $0\le l\le\frac{\log(\sqrt{N}H^{-1})}{\log2}$ 时，则由 (23), (24), (5), (8) 式和 $(1.6)(\frac{1+\frac{\log2}{15}}{2\log2})^{\frac{1}{2}}(\frac{6}{\pi^2}+10^{-5})^{\frac{1}{2}}\le1.084$, 有

$$T_k^{(l)}\le1.084(l+1)^{-\frac{1}{2}}Nr^{\frac{1}{4}}\Big(\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}+\frac{1}{H^{28}}+\frac{\log q}{2^lH^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le1.084(l+1)^{-\frac{1}{2}}Nr^{\frac{1}{4}}\Big(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{1}{H^{14}}+\frac{(\log q)^{1/2}}{2^{l/2}H}\Big), \tag{25}$$

又有

$$\sum_{0\le l\le \frac{\log N}{2\log 2}} \frac{1}{(l+1)^{\frac{1}{2}}} \le 2+\int_1^{\frac{\log N}{2\log 2}} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = 2\Big(\frac{\log N}{2\log 2}\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{2^{-\frac{l}{2}}}{(l+1)^{\frac{1}{2}}} \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{(2)(3)^{\frac{1}{2}}}+\Big(\frac{1}{2^{5/2}}\Big)\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{-1} \le 2.4. \tag{27}$$

由 (22), (25) 到 (27) 式，有

$$\begin{aligned} T_k &\le Nr^{\frac{1}{4}}\Big\{(1.084)\Big(\frac{2}{\log 2}\Big)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}\Big(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{1}{H^{14}}\Big) \\ &\quad + \frac{(1.084)(2.4)\sqrt{\log q}}{H}\Big\} \\ &\le Nr^{\frac{1}{4}}\Big\{1.85r^{\frac{1}{2}}\Big(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{1}{H^{14}}\Big)+\frac{2.61\sqrt{\log q}}{H}\Big\}. \end{aligned} \tag{28}$$

又有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{k} &\le \log 2k_0 \le \log(2+2r^{\frac{1}{2}}) = \log\sqrt{r}+\log(2+\frac{2}{\sqrt{r}}) \\ &\le \frac{\log r}{2}+\log(2+\frac{1}{15}) \le 0.607\log r. \end{aligned} \tag{29}$$

由 (18)-(20) 式， (28), (29), (5), (6), (8), (10) 和 (11) 式，有

$$\begin{aligned} |S_2| &\le Nr^{\frac{1}{4}}(0.607\log r)\Big\{1.85r^{\frac{1}{2}}\Big(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{1}{H^{14}}\Big)+\frac{2.61\sqrt{\log q}}{H}\Big\} \\ &\quad + \frac{1.01(1+\sqrt{r})N\log 2H}{H^2}+\frac{N}{H}+2^{1-\frac{r}{2\log H}}(1+r)N\log 2H \\ &\le Nr^{\frac{1}{4}}(\log r)\Big\{1.123r^{\frac{1}{2}}\Big(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{1}{H^{14}}\Big)+\frac{1.59\sqrt{\log q}}{H}\Big\} \\ &\quad + \frac{1.1Nr^{0.65}}{H}; \end{aligned} \tag{30}$$

由 (14)-(17) 式， (2), (5), (12), (13) 和 (30) 式，我们有

$$\begin{aligned} |S| &\le |S_2|+\Big(\frac{r+2\log r}{\log 2}\Big)\Big(2q+\frac{3q\log q}{2}+\frac{5Nr}{q}\Big)+\Big(\frac{2\log r}{\log 2}\Big)\Big(\frac{N\log q}{H}\Big) \\ &\quad +\Big(\frac{r}{\log 2}\Big)\Big(\frac{N\log q}{Hr^2}\Big)+\sqrt{N} \end{aligned}$$

$$\le |S_2| + (2.4r)(0.0003Nr^{-\frac{3}{4}})\left(\frac{q\log q}{N}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+(1.5Nr^2)\left(1.25r^{-\frac{7}{4}}(\log r)^{-1}\right)\left(\frac{5}{q}\right)^{\frac{1}{2}} + 2.9Nr^{\frac{1}{2}}(\log r)(\sqrt{\log q})H^{-1}$$

$$\le |S_2| + 0.001Nr^{\frac{1}{4}}\left(\frac{q\log q}{N}\right)^{\frac{1}{2}} + 0.28Nr^{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{0.6Nr^{\frac{3}{4}}(\log r)(\log q)^{\frac{1}{2}}}{H}$$

$$\le 1.2Nr^{\frac{3}{4}}(\log r)\left(\sqrt{\frac{5}{q}+\frac{q\log q}{N}}+\frac{\sqrt{\log q}}{H}\right).$$

故定理 1 得证.

参考文献

[1] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1981

[2] Vinogradov I M. The Method of Trigonometrical Sum in the Theory of Numbers. London: Interscience Publishers LTD. and New York: INC.

[3] Rosser J B, Schoenfeld L. *Mathematics of Computation*, 1975, **29**: 243 ~ 269

关于哥德巴赫问题 *†

摘　要

在这篇文章中我们证明了：每一个正奇数 $N \geq e^{e^{11.503}}$ 都能够表示成为三个素数的和.

一. 引　言

早在 1742 年哥德巴赫在给欧拉的一封信中提出了如下的猜测：每一个大于 4 的偶数都能够表示成为两个素数的和；每一个大于 5 的奇数都能够表示成为三个素数的和. 这就是著名的哥德巴赫猜想. 1937 年苏联数学家 Виноградов 证明了：存在一个充分大的绝对常数 N_0, 使得每一个大于 N_0 的奇数都能够表示成为三个素数的和. 在 1956 年苏联学者 Бороздкин 宣布了 N_0 可以取为 $e^{e^{16.038}}$, 但至今尚未见到其证明. 在本文中我们改进了这一结果，证明如下的定理：

定理　每一个奇数 $N \geq e^{e^{11.503}}$ 都能够表示成为三个素数之和.

为了叙述本文的结果，我们先引入如下的记号： $p, p_k (k = 1, 2, \ldots)$ 总表示素数， N 恒表示正奇数. 令 $r = \log N, \tau = Nr^{-7.5}, I(N)$ 表示将 N 表示成为 $N = p_1 + p_2 + p_3$ 的形式的表法个数，则我们有 $I(N) = \int_0^1 S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha = \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$, 其中 $S(\alpha) = \sum\limits_{p \leq N} e(p\alpha)$, 对于任何实数 θ, $e(\theta) = e^{2\pi i\theta}$. 熟知区间 $[-\tau^{-1}, 1-\tau^{-1}]$ 中的每一点 α 都能够表示成为 $\alpha = \frac{a}{q} + z, (a, q) = 1, 1 \leq q \leq \tau, |z| \leq \frac{1}{q\tau}$ 的形式. 我们用 E_1 表示满足 $1 \leq q \leq r^3$ 的 α 所组成的集合；用 E_2 表示满足 $r^3 \leq q \leq r^{6.5}$ 的 α 所组成的集合；用 E_3 表示从 $[-\tau^{-1}, 1-\tau^{-1}]$ 中去掉 E_1 和 E_2 以后的点所组成的集合. 最后我们令

$$I_1(N) = \int_{E_1} S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha, \quad I_2(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha,$$

$$I_3(N) = \int_{E_2} S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha.$$

* 1988 年 11 月 3 日收到， 1989 年 3 月 11 日收到修改稿.

† 原载数学学报， **32**(1989), no.5, pp.702–718.

二. 关于 $I_1(N)$ 的一个下界

引理 1 设 $\beta \geq 0$, z 是实数, $N \geq e^{100}$, 令 $J_N(z,\beta) = \int_2^N \frac{e(zt)}{t^\beta \log t} dt$, 则我们有

$$|J_N(z,\beta)| \leq \begin{cases} 1.02Nr^{-1}, & \text{当 } |z| \leq N^{-1} \text{ 时;} \\ 0.747(|z|r)^{-1}, & \text{当 } N^{-1} \leq |z| \leq \frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}} \text{ 时;} \\ 1.03|z|^{-1}, & \text{当 } \frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}} \leq |z| \leq \frac{1}{2} \text{ 时.} \end{cases}$$

证 当 $N \geq e^{100}$ 时我们有

$$\begin{aligned} |J_N(z,\beta)| &\leq \int_2^N \frac{dt}{\log t} = \frac{N}{r} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^N \frac{dt}{(\log t)^2} \\ &\leq \frac{N}{r} + \frac{N}{r^2} + 2\int_2^N \frac{dt}{(\log t)^3} \leq \frac{1.02N}{r}. \end{aligned} \tag{1}$$

当 $N^{-1} \leq |z| \leq \frac{1}{2}$ 时有

$$|J_N(z,\beta)| \leq \left| \int_2^N \frac{\cos 2\pi zt}{t^\beta \log t} dt + i \int_2^N \frac{\sin 2\pi zt}{t^\beta \log t} dt \right| \leq (U^2+V^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} |U| &= \left| \int_2^N \frac{\cos 2\pi zt}{t^\beta \log t} dt \right| \leq \left| \int_{4|z|}^{2N|z|} \frac{\cos \pi u}{2|z| \log \frac{u}{2|z|}} du \right| \leq \int_{4|z|}^{4|z|+1} \frac{du}{2|z| \log \frac{u}{2|z|}} \\ &= \int_2^{2+\frac{1}{2|z|}} \frac{dt}{\log t}, \quad |V| \leq \int_2^{2+\frac{1}{2|z|}} \frac{dt}{\log t}. \end{aligned}$$

当 $|z| \leq \frac{1}{2}$ 时则我们有 $\int_2^{2+\frac{1}{2|z|}} \frac{dt}{\log t} \leq \frac{1}{1.38|z|}$. 如果 $N \geq e^{100}, 2|z| \leq N^{-\frac{79}{80}}$, 则

$$\int_2^{2+\frac{1}{2|z|}} \frac{dt}{\log t} = \frac{2+\frac{1}{2|z|}}{\log(2+\frac{1}{2|z|})} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^{2+\frac{1}{2|z|}} \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{0.528}{|z|r}.$$

注意到 $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{1.38} \leq 1.03$ 以及 $(0.528)(2^{\frac{1}{2}}) \leq 0.747$ 由 (1), (2) 两式可以知道本引理能够成立.

现在我们就来估计 $I_1(N)$. 由 $I_1(N)$ 的定义和 $N \ge e^{100}$ 可得

$$I_1(N) = \sum_{q=1}^{r^3} {\sum_{a=1}^{q}}' \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S^3\Big(\frac{a}{q}+z\Big) e\Big(-\Big(\frac{a}{q}+z\Big)N\Big)dz. \tag{3}$$

其中 ${\sum\limits_{a=1}^{q}}'$ 表示 $\sum\limits_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$. 由 $S(\alpha)$ 的定义我们有

$$S(\alpha) = S_1(\alpha) + \sum_{\substack{p\le N\\ p|q}} e(p\alpha). \tag{4}$$

其中 $S_1(\alpha) = \sum\limits_{\substack{p\le N\\ (p,q)=1}} e(p\alpha)$. 定义 $\mathrm{Li}(n) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \le 2 \text{ 时},\\ \int_2^n \frac{dt}{\log t}, & \text{当 } n > 2 \text{ 时}, \end{cases}$ 令

$$\psi(t;q,l) = \sum_{\substack{n\le t\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, q)}} \Lambda(n),$$

则由 $\alpha = \frac{a}{q}+z, (a,q)=1, 1\le q\le r^3, |z| \le \frac{r^{7.5}}{qN}$, 我们有

$$\begin{aligned}
S_1(\alpha) &= {\sum_{l=1}^{q}}' e\Big(\frac{al}{q}\Big) \sum_{\substack{p\le N\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\, q)}} e(pz) = {\sum_{l=1}^{q}}' e\Big(\frac{al}{q}\Big) \int_2^N e(tz) d\pi(t;q,l)\\
&= {\sum_{l=1}^{q}}' e\Big(\frac{al}{q}\Big)\Big(e(Nz)\pi(N;q,l) - 2\pi i z\int_2^N e(tz)\pi(t;q,l)dt\Big)\\
&= \frac{1}{\varphi(q)} {\sum_{l=1}^{q}}' \Big(e(Nz)(\mathrm{Li}(N) - \tilde{E}\tilde{\chi}(l)\int_2^N \frac{t^{\beta-1}}{\log t}dt\Big)\\
&\quad -2\pi i z\Big(\int_2^N e(tz)\Big(\mathrm{Li}(t) - \tilde{E}\tilde{\chi}(l)\int_2^t \frac{s^{\beta-1}}{\log s}ds\Big)dt\Big)e\Big(\frac{al}{q}\Big)\\
&\quad + {\sum_{l=1}^{q}}' \Big(e(Nz)\Big(\pi(N;q,l) - \frac{\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{t^{\beta-1}}{\log t}dt\Big)\\
&\quad -2\pi i z\int_2^N e(tz)\Big(\pi(t;q,l) - \frac{\mathrm{Li}(t)}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^t \frac{s^{\beta-1}}{\log s}ds\Big)dt\Big)e\Big(\frac{al}{q}\Big)\\
&= \Big(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\Big)\Big(e(Nz)\mathrm{Li}(N) - 2\pi i z\int_2^N e(tz)\mathrm{Li}(t)dt\Big)\\
&\quad -\Big(\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\Big)\Big(\int_2^N \frac{e(Nz)t^{\beta-1}}{\log t}dt\\
&\quad -2\pi i z\int_2^N \Big(e(tz)\int_2^t \frac{s^{\beta-1}}{\log s}ds\Big)dt\Big) + R(\alpha)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\int_2^N \frac{e(tz)}{\log t}\,dt - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\beta-1}}{\log t}\,dt + R(\alpha). \quad (5)$$

其中 $R(\alpha)=R_1(\alpha)+R_2(\alpha)$, $\tau(\tilde{\chi})=\sum\limits_{n=1}^{q}\tilde{\chi}(n)e\left(\frac{n}{q}\right)$, 当存在模 q 的实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s,\tilde{\chi})$ 有实零点 $\tilde{\beta}\geq 1-\frac{0.1077}{\log q}$ 时 $\tilde{E}=1$; 否则 $\tilde{E}=0$, 又

$$\begin{aligned}R_1(\alpha) =& (e(Nz))\left(\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\int_2^N \frac{d\psi(t;q,l)}{\log t} - \frac{\mu(q)\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\right.\\ &\left.\cdot\int_2^N \frac{t^{\beta-1}}{\log t}\,dt\right) - 2\pi iz\int_2^N\left(\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\int_2^t \frac{d\psi(s;q,l)}{\log s}\right.\\ &\left.-\frac{\mu(q)\mathrm{Li}(t)}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^t \frac{s^{\beta-1}}{\log s}\,ds\right)e(tz)dt;\\ R_2(\alpha) =& -(e(Nz))\left(\sum_{t=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\sum_{p\leq N^{\frac{1}{2}}}\sum_{\substack{j=2\\ pj\equiv l(\mathrm{mod}\, q)}}^{\log N/\log p}\frac{1}{j}\right) + 2\pi iz\int_2^N e(tz)\\ &\cdot\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\left(\sum_{p\leq\sqrt{t}}\sum_{\substack{j=2\\ pj\equiv l(\mathrm{mod}\, q)}}^{\log t/\log p}\frac{1}{j}\right)dt.\end{aligned}$$

由 $N\geq e^{100}$ 易得

$$|R_2(\alpha)|\leq\frac{1}{10}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q. \quad (6)$$

由 $R_1(\alpha)$ 的定义我们有

$$\begin{aligned}R_1(\alpha) =& (e(Nz))\left\{\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\left(\frac{\psi(N;q,l)}{\log N}-\frac{\psi(2;q,l)}{\log 2}+\int_2^N\frac{\psi(t;q,l)}{t(\log t)^2}\,dt\right)\right.\\ &-\left(\frac{N}{\log N}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^N\frac{dt}{(\log t)^2}\right)\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\\ &\left.+\left(\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\left(\frac{N^{\beta}}{\tilde{\beta}\log N}-\frac{2^{\beta}}{\tilde{\beta}\log 2}+\int_2^N\frac{t^{\beta-1}}{\tilde{\beta}(\log t)^2}\,dt\right)\right\}\\ &-2\pi iz\int_2^N\left\{\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\left(\frac{\psi(t;q,l)}{\log t}-\frac{\psi(2;q,l)}{\log 2}+\int_2^t\frac{\psi(s;q,l)}{s(\log s)^2}\,ds\right)\right.\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{t}{\log t}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^t\frac{ds}{(\log s)^2}\right)\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)$$

$$+\left(\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\left(\frac{t^\beta}{\tilde{\beta}\log t}-\frac{2^\beta}{\tilde{\beta}\log 2}+\int_2^t\frac{s^{\beta-1}}{\tilde{\beta}(\log s)^2}\,ds\right)\Bigg\}e(tz)dt$$

$$=R_3(\alpha)+R_4(\alpha). \tag{7}$$

其中

$$R_3(\alpha)=(e(Nz))\left(-\sum_{l=1}^{q}{}'\frac{e(\frac{al}{q})\psi(2;q,l)}{\log 2}+\frac{2\mu(q)}{\varphi(q)\log 2}-\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})2^\beta}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log 2}\right)$$
$$-2\pi iz\int_2^N e(tz)\left(-\sum_{l=1}^{q}{}'\frac{e(\frac{al}{q})\psi(2;q,l)}{\log 2}+\frac{2\mu(q)}{\varphi(q)\log 2}-\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})2^\beta}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log 2}\right)dt;$$

并且我们有

$$|R_4(\alpha)|\le\left(\frac{1}{r}\right)\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(N;q,l)-\frac{\mu(q)N}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})N^\beta}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|$$
$$+\int_2^N\left(\frac{1}{t(\log t)^2}\right)$$
$$\cdot\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(t;q,l)-\frac{\mu(q)t}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})t^\beta}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|dt$$
$$+2\pi|z|\int_2^N\left\{\left|-\frac{\mu(q)t}{\varphi(q)}+\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(t;q,l)+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})t^\beta}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\right.$$
$$\cdot\left(\frac{1}{\log t}\right)+\int_2^t\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(s;q,l)-\frac{\mu(q)s}{\varphi(q)}\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})s^\beta}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\left(\frac{ds}{s(\log s)^2}\right)\Bigg\}dt. \tag{8}$$

$J_N(z)=J_N(z,0), R_5(\alpha)=R(\alpha)-\dfrac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{x})}{\varphi(q)}\displaystyle\int_2^N\frac{t^{\beta-1}e(tz)}{\log t}\,dt+\sum_{\substack{p\le N\\ p|q}}e(p\alpha)$, 则由 (4) 和 (5) 式可得

$$S(\alpha)=\frac{\mu(q)J_N(z)}{\varphi(q)}+R_5(\alpha). \tag{9}$$

由于当 $n \geq 11$ 时有 $n^{0.96}(n-1)^{-1} \leq 1$, 故有

$$\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} = \left(\frac{|\mu(q)|}{q^{0.96}}\right)\left(\prod_{p|q}\frac{p^{0.96}}{p-1}\right) \leq \frac{((2)(3)(5)(7))^{0.96}|\mu(q)|}{(2)(4)(6)q^{0.96}}$$
$$\leq \frac{3.54|\mu(q)|}{q^{0.96}}. \tag{10}$$

我们有

$$\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) = \frac{\prod_{p\geq 2}(1-p^{-2})}{1-\frac{1}{4}}\cdot\prod_{p\geq 3}\frac{(1-(p-1)^{-2})}{(1-p^{-2})}$$
$$= \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6}{\pi^2}\right)\left(\prod_{3\leq p\leq 113}\frac{p^2(p^2-2p)}{(p+1)(p-1)^3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(127-1)^2}\right)$$
$$\cdot\left(\prod_{p\geq 131}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)\left(\prod_{p\geq 127}(1-p^{-2})\right)^{-1} \geq 0.66012. \tag{11}$$

由 (10) 式知道当 $N \geq e^{6000}$ 时有 $\sum_{q\geq r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \leq 10^{-5}$, 故由 (11) 式可得当奇数 $N \geq e^{6000}$ 时有

$$\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\sum_{a=1}^{q}{}' e\left(-\frac{aN}{q}\right)$$
$$\geq \sum_{q\geq 1}\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\sum_{a=1}^{q}{}' e\left(-\frac{aN}{q}\right) - \sum_{q\geq r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}$$
$$\geq \left(\sum_{p|N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right) - 10^{-5}$$
$$\geq (2)(0.66012) - 10^{-5}$$
$$\geq 1.32023. \tag{12}$$

当 $N \geq e^{100}, |z| \leq \frac{1}{2}$ 时, 由引理 1 可得

$$\left|\int_2^N \frac{e(tz)}{\log t}\,dt - \sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right| = \left|\sum_{m=2}^{N-1}\int_m^{m+1}\int_m^t\left(d\left(\frac{e(zu)}{\log u}\right)\right)dt\right|$$
$$\leq \sum_{m=2}^{N-1}\int_m^{m+1}\left(\frac{2\pi|z|}{\log m}+\frac{1}{m(\log m)^2}\right)(t-m)dt$$
$$\leq 1.03\pi|z|Nr^{-1} + 1.242. \tag{13}$$

当 $N \geq e^{6000}$ 时，则由引理 1 和 (13) 式可得

$$\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left|(J_N(z))^3 - \left(\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right)^3\right| dz \leq (3)(1.03\pi q^{-1}\tau^{-1}N r^{-1} + 1.242)$$

$$\cdot \int_0^{\frac{1}{q\tau}} \left(|J_N(z)|^2 + \left|\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right|^2\right) dz$$

$$\leq (9.8 r^{6.5} q^{-1}) \left(\int_0^{N^{-1}} (1.02 N r^{-1})^2 dz + \int_{N^{-1}}^{\frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}}} (0.747 z^{-1} r^{-1})^2 dz \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}}}^{\frac{1}{2}} (1.03 z^{-1})^2 dz + \sum_{m=2}^{N-1} \frac{1}{(\log m)^2} \right)$$

$$\leq 26.5 N r^{4.5} q^{-1}. \tag{14}$$

由 (10) 式我们有

$$\sum_{q \geq 1} \frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \leq 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36} + \sum_{q \geq 10} \frac{(3.54)^2}{q^{1.92}} \leq 4.38. \tag{15}$$

由 $N \geq e^{100}$ 容易得出 $\left|\sum_{m=2}^{N-1} \left(\frac{e(mz)}{\log m} - \frac{e(mz)}{\log(N-1)}\right)\right| \leq \frac{1.1N}{r^2}$，故由 (15) 式和 $\frac{1}{q\tau} = \frac{r^{7.5}}{qN}$ 可得

$$\sum_{1 \leq q \leq r^3} \frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right|^3 dz$$

$$\leq \sum_{1 \leq q \leq r^3} \frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1.1N}{r^2} + \frac{1}{rz}\right) \left|\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right|^2 dz$$

$$\leq \sum_{1 \leq q \leq r^3} \frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \cdot \left(\frac{1.1N}{r^2} + \frac{qN}{r^{8.5}}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right|^2 dz$$

$$\leq 5 N r^{-2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right|^2 dz. \tag{16}$$

完全类似于 (16) 式我们可以得到

$$\sum_{1 \leq q \leq r^3} \frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{q\tau}} \left|\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right|^3 dz \leq 5 N r^{-2} \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left|\sum_{m=2}^{N-1} \frac{e(mz)}{\log m}\right|^2 dz. \tag{17}$$

又我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3 e(-Nz)dz$$
$$=\sum_{\substack{m_1=2\\ m_1+m_2+m_3=N}}^{N-1}\sum_{m_2=2}^{N-1}\sum_{m_3=2}^{N-1}\frac{1}{(\log m_1)(\log m_2)(\log m_3)}$$
$$\geq(\log N)^{-3}\sum_{m_1=2}^{N-4}\sum_{m_2=2}^{N-m_1-2}1\geq 2(N-6)^2 r^{-3}. \tag{18}$$

当 $N\geq e^{6000}$ 时则由 (12), (14) 到 (18) 式可得

$$\left|\sum_{1\leq q\leq r^3}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}(J_N(z))^3 e\left(-\left(\frac{a}{q}+z\right)N\right)dz\right|$$
$$\geq\left|\sum_{1\leq q\leq r^3}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\cdot\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3 e\left(-\left(\frac{a}{q}+z\right)N\right)dz\right|$$
$$-\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\left|(J_N(z))^3-\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3\right|dz$$
$$\geq\left|\sum_{1\leq q\leq r^3}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\cdot e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3 e(-Nz)dz\right|$$
$$-\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\cdot\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^3 dz$$
$$-\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{q\tau}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^3 dz$$
$$-(26.5Nr^{4.5})\cdot\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{|\mu(q)|}{q(\varphi(q))^2}$$
$$\geq\frac{(1.32023)(N-6)^2}{2r^3}-5Nr^{-2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^2 dz$$
$$-(26.5Nr^{4.5})\cdot\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{|\mu(q)|}{q(\varphi(q))^2}$$

$$\geq 0.66N^2r^{-3} - 5.5N^2r^{-4} - (26.5Nr^{4.5})$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{80}+\frac{1}{24}+\frac{1}{252}+\sum_{q\geq 10}\frac{(3.54)^2}{q^{2.92}}\right)$$
$$\geq 0.659N^2r^{-3}. \tag{19}$$

令

$$\triangle_{t,q,a} = \left(\frac{1}{\log t}\right)\left|{\sum_{l=1}^{q}}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(t;q,l) - \frac{\mu(q)t}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})t^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|$$
$$+\int_2^t\left| - \frac{\mu(q)y}{\varphi(q)} + {\sum_{l=1}^{q}}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(y;q,l) + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})y^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|$$
$$\cdot\frac{dy}{y(\log y)^2};\qquad \Omega_{N,q,a} = \int_2^N \triangle_{t,q,a}dt.$$

则由 (6) 到 (8) 式可得

$$\left|R_5\left(\frac{a}{q}+z\right)\right| \leq \frac{1}{10}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + \log N + (3)\left(1+\frac{1}{\log 2}\right.$$
$$\left.+\frac{2q^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log 2}\right) + \left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right| + R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)$$
$$\leq \frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r + \left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right|$$
$$+ R_6\left(\frac{a}{q}+z\right). \tag{20}$$

其中 $R_6\left(\frac{a}{q}+z\right) = \triangle_{N,q,a} + 2\pi|z|\Omega_{N,q,a}$ 由 (3), (19) 和 (20) 式可得

$$I_1(N) \geq 0.659N^2r^{-3} - \sum_{j=1}^{5} M_j. \tag{21}$$

其中

$$M_1 = \sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}|J_N(z)|^2{\sum_{a=1}^{q}}'\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|dz;$$

$$M_2 = \sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}|J_N(z)|{\sum_{a=1}^{q}}'\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2dz;$$

$$M_3 = \sum_{1\le q\le r^3} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \sum_{a=1}^{q}{}' \left| R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^3 dz;$$

$$\begin{aligned} M_4 = & \sum_{1\le q\le r^3} \frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} |J_N(z)|^2 \sum_{a=1}^{q}{}' \left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right)dz \\ & + \sum_{1\le q\le r^3} \frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} |J_N(z)| \sum_{a=1}^{q}{}' \left\{\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right)^2\right. \\ & \left.+2\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right)\right\}dz \\ & + \sum_{1\le q\le r^3} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \sum_{a=1}^{q}{}' \left\{\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right)^3 + 3\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q\right.\right. \\ & \left. + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right)^2\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right| + 3\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right) \\ & \left.\cdot\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2\right\}dz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_5 = & \sum_{1\le q\le r^3} \frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} |J_N(z)|^2 \sum_{a=1}^{q}{}' \left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|dz \\ & + \sum_{1\le q\le r^3} \frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)} \cdot \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} |J_N(z)| \sum_{a=1}^{q}{}' \left\{\left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|^2\right. \\ & +\left|\frac{2\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right. \\ & \left.\left.+\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)\right\}dz + \sum_{1\le q\le r^3} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \sum_{a=1}^{q}{}' \left\{\left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|^3\right. \\ & +3\left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|^2\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right. \\ & \left.+\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right) + 3\left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r + \left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)^2 \\ & \left.\cdot\left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|\right\}dz. \end{aligned}$$

令 $f_1(x) = 2^{-80}x(\log x)^{-600}$, 当 $x \ge e^{6000}$ 时则由 $f_1(e^{6000}) > 1$ 和 $f_1'(x) = 2^{-80}\left(1 - \frac{600}{\log x}\right) \times (\log x)^{-600} \ge 0$ 可得 $f_1(x) \ge 1$. 所以当 $N \ge e^{6000}$ 时我们有 $N \ge 2^{80}r^{600}$, 故有 $\frac{1}{qr} \le \frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}}$, 于是当 $N \ge e^{6000}$ 时由引理 1 可得

$$M_4 \le 6\sum_{1\le q\le r^3} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} \left\{ \int_0^{N^{-1}} \left(\frac{1.02N}{r}\right)^2 \left(\frac{1}{5}N^{\frac12}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac32}q + r\right)dz\right.$$

$$+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q\tau}}(0.747z^{-1}r^{-1})^2\cdot\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r\right)dz\Bigg\}$$

$$+6\sum_{1\le q\le r^3}|\mu(q)|\Bigg\{\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)\left(\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)^2\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r\right)(4N+4\pi N^2z)\right)dz$$

$$+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q\tau}}(0.747z^{-1}r^{-1})\left(\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r\right)^2+2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r\right)(4N+4\pi N^2z)\right)dz\Bigg\}+2\sum_{1\le q\le r^3}(q)$$

$$\cdot\int_0^{\frac{1}{q\tau}}\Bigg\{\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)^3+3\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)^2$$

$$\cdot(4N+4\pi N^2z)+3\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)(4N+4\pi N^2z)^2\Bigg\}dz$$

$$\le(6)(3.54)\sum_{1\le q\le r^3}\frac{|\mu(q)|}{q^{0.96}}\Bigg\{\left(\frac{1.02N}{r}\right)^2(0.41N^{-\frac{1}{2}}q)+(0.747r^{-1})^2$$

$$\cdot(3.2N^{\frac{3}{2}}q\log r)\Bigg\}+6\sum_{1\le q\le r^3}|\mu(q)|\Bigg\{\left(\frac{1.02N}{r}\right)(9.3N^{\frac{1}{2}}q+0.19q^2)$$

$$+(0.747r^{-1})(0.17Nqr^{7.5}+5.3N^{\frac{3}{2}}q^{-1}r^{15})\Bigg\}+\sum_{1\le q\le r^3}(2q)$$

$$\cdot(0.08N^{\frac{1}{2}}q^{-1}r^{30}+6.7Nq^{-2}r^{30}+66.2N^{\frac{3}{2}}q^{-3}r^{30})$$

$$\le 0.0001N^2r^{-3}. \tag{22}$$

令 $f_2(x)=e^{-e^{11.5}}\cdot x(\log x)^{-12}$, 当 $x\ge e^{e^{11.502}}$ 时则由 $f_2'(x)=e^{-e^{11.5}}\cdot\left(1-\frac{12}{\log x}\right)\cdot(\log x)^{-12}\ge 0$ 和 $f_2(e^{e^{11.502}})>1$ 可得 $x(\log x)^{-12}\ge e^{e^{11.5}}$. 所以当 $t\ge e^{e^{11.502}}$ 时由 [5] 中的定理可得

$$\triangle_{t;q,a}\le\frac{0.13q^{\frac{1}{2}}t}{(\log t)^{11.35}}+\int_2^{t(\log t)^{-12}}\frac{y(\log y+2)}{y(\log y)^2}dy+\int_{t(\log t)^{-12}}^{t}\frac{0.13q^{\frac{1}{2}}dy}{(\log y)^{12.35}}$$

$$\le 0.132q^{\frac{1}{2}}t(\log t)^{-11.35}. \tag{23}$$

当 $N\ge e^{e^{11.503}}$ 时则由 (23) 式和 $Nr^{-7}\ge e^{e^{11.502}}$ 可得

$$\Omega_{N;q,a}\le\int_2^{Nr^{-7}}q^{\frac{1}{2}}rtdt+\int_{Nr^{-7}}^{N}0.132q^{\frac{1}{2}}t(\log t)^{-11.35}dt$$

$$\leq \frac{(1.01)(0.132)N^2q^{\frac{1}{2}}}{2r^{11.35}} + \frac{N^2q^{\frac{1}{2}}}{2r^{13}} \leq 0.07N^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}. \tag{24}$$

当 $r = \log N \geq e^{11.503}$ 时，对任何实数 $0 < \triangle < 0.1$ 我们有

$$\left|\int_2^N \frac{e(tz)}{t^{\triangle}\log t}dt\right| \leq \int_2^N \frac{dt}{t^{\triangle}\log t} \leq \left(\frac{1}{1-\triangle}\right)\left(\frac{N^{1-\triangle}}{r} + \int_2^N \frac{dt}{t^{\triangle}(\log t)^2}\right)$$
$$\leq \left(\frac{1}{1-\triangle}\right)\left(\frac{N^{1-\triangle}}{r} + \left(\frac{1}{1-\triangle}\right)\left(\frac{N^{1-\triangle}}{r^2} + 2\int_2^N \frac{dt}{t^{\triangle}(\log t)^3}\right)\right)$$
$$\leq 1.1113N^{1-\triangle}r^{-1}. \tag{25}$$

令 $1-\tilde{\beta} = \tilde{\delta}$, 当 $N \geq e^{e^{11.503}}$ 时则由 (10), (23) 到 (25) 式，引理 1, [6] 中的定理 1 我们有

$$\sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} |J_N(z)|^2 {\sum_{a=1}^{q}}' \left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)} \int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right| dz$$
$$\leq (6)(3.54)^2 \sum_{1\leq q\leq r^3} \left(\frac{\tilde{E}q^{\frac{1}{2}}}{q^{1.92}}\right)\left(\int_0^{N-1} \left(\frac{1.02N}{r}\right)^2 \left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)dz\right.$$
$$\left.+ \int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q\tau}} (0.747z^{-1}r^{-1})^2 \left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)dz\right)$$

$$\leq (6)(3.54)^2\Bigg((1.1564N^2r^{-3})$$
$$\cdot \sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{\tilde{E}N^{-\delta}}{q^{1.42}} + (0.6202N^2r^{-3}) \sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{\tilde{E}N^{-\delta}}{q^{1.42}}\Bigg)$$
$$\leq (133.6N^2r^{-3})\left(\frac{1}{q_0^{1.42}}\right)N^{-\frac{1}{240\log r}} \cdot \sum_{1\leq k\leq r^3} \frac{1}{k^{1.42}} \leq e^{-30}N^2r^{-3}. \tag{26}$$

$$\sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} |J_N(z)| {\sum_{a=1}^{q}}' \left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)} \int_2^N \frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right|^2 dz$$
$$\leq (6)(3.54)^2 \sum_{1\leq q\leq r^3} \left(\frac{\tilde{E}}{q^{0.92}}\right)\left(\int_0^{N^{-1}} \left(\frac{1.02N}{r}\right)\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)^2 dz\right.$$
$$\left.+ \int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q\tau}} (0.747z^{-1}r^{-1})\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)^2 dz\right)$$

$$\leq (6)(3.54)^2 \cdot (6.412)(N^2r^{-3}\log r) \sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{\tilde{E}N^{-2\delta}}{q^{0.92}}$$

$$\leq e^{-47.5}N^2r^{-3}. \tag{27}$$

$$\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}|J_N(z)|\sum_{a=1}^{q}{}'\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r\right.$$
$$\left.+\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)\left|\frac{2\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\right|\cdot\left|\int_2^N\frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|dz$$

$$\leq(12)(3.54)\sum_{1\leq q\leq r^3}\left(\frac{\tilde{E}}{q^{0.46}}\right)\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)\right.$$
$$\cdot\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)dz+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q\tau}}(0.747z^{-1}r^{-1})\cdot\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q\right.$$
$$\left.\left.+r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)\cdot\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)dz\right)$$
$$\leq(42.48)(2.781N^2r^{-5.75}\log r)\sum_{1\leq q\leq r^3}q^{-0.96}\leq e^{-19.7}N^2r^{-3}. \tag{28}$$

$$\sum_{1\leq q\leq r^3}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\sum_{a=1}^{q}{}'\left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|^3dz$$
$$\leq(2)(3.54)^2\sum_{1\leq q\leq r^2}\left(\frac{\tilde{E}}{q^{0.42}}\right)\int_0^{\frac{1}{q\tau}}\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)^2dz$$
$$\leq(34.44N^2r^{4.6})\sum_{1\leq q\leq r^3}\frac{\tilde{E}N^{-3\delta}}{q^{1.42}}\leq e^{-13.48}N^2r^{-3}, \tag{29}$$

$$\sum_{1\leq q\leq r^3}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\sum_{a=1}^{q}{}'(3)\left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right|^2$$
$$\cdot\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r+\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)dz$$
$$\leq(6)(3.54)\sum_{1\leq q\leq r^3}(\tilde{E}q^{0.04})\left(\int_0^{\frac{1}{q\tau}}\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)^2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)dz\right)$$
$$\leq(13.13N^2r^{-3})r^{4.85}\sum_{1\leq q\leq r^3}\tilde{E}q^{-1.46}N^{-2\delta}\leq e^{-11.47}N^2r^{-3}. \tag{30}$$

$$\sum_{1\le q\le r^3}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\sum_{a=1}^{q}{}'(3)\left|\frac{\tilde{E}\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right|\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q\right.$$

$$\left.+r+\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)^2dz\le(6)\sum_{1\le q\le r^3}(\tilde{E}q^{\frac{1}{2}})\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)$$

$$\cdot\int_0^{\frac{1}{q\tau}}\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right.$$

$$\left.+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)^2dz$$

$$\le(1.778N^2r^{-0.9})\sum_{1\le q\le r}\frac{\tilde{E}N^{-\delta}}{q^{1.5}}\le e^{-10.49}N^2r^{-3}. \tag{31}$$

当 $N\ge e^{e^{11.503}}$ 时则由 (26) 到 (31) 式我们有

$$M_5\le(e^{-30}+e^{-47.5}+e^{-19.7}+e^{-13.48}+e^{-11.47}+e^{-10.49})N^2r^{-3}$$

$$\le0.0001N^2r^{-3}. \tag{32}$$

令

$$\triangle_{N,q}^{(j)}=\sum_{a=1}^{q}{}'(\triangle_{N,q,a})^j,\quad\Omega_{N,q}^{(j)}=\sum_{a=1}^{q}{}'(\Omega_{N,q,a})^j,\quad(1\le j\le3),$$

当 $N\ge e^{6000}$ 时则由引理 1 可得

$$M_1\le6\sum_{1\le q\le r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\left\{\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)^2\sum_{a=1}^{q}{}'(\triangle_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})dz\right.$$

$$\left.+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q\tau}}(0.747z^{-1}r^{-1})^2\cdot\sum_{a=1}^{q}{}'(\triangle_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})dz\right\}$$

$$\le\frac{9.6N}{r^2}\sum_{1\le q\le r}\frac{|\mu(q)|\triangle_{N,q}^{(1)}}{(\varphi(q))^2}+\frac{160.1\log r}{r^2}\sum_{1\le q\le r^3}\frac{|\mu(q)|\Omega_{N,q}^{(1)}}{(\varphi(q))^2}. \tag{33}$$

$$M_2\le(6)\sum_{1\le q\le r^3}\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\left\{\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)\sum_{a=1}^{q}{}'(\triangle_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})^2dz\right.$$

$$\left.+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q\tau}}(0.747z^{-1}r^{-1})\cdot\sum_{a=1}^{q}{}'(\triangle_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})^2dz\right\}$$

$$\le0.05\sum_{1\le q\le r^3}\frac{|\mu(q)|\triangle_{N,q}^{(2)}}{\varphi(q)}+(88.5r^{14}N^{-2})\cdot\sum_{1\le q\le r^3}\frac{|\mu(q)|\Omega_{N,q}^{(2)}}{q^2\varphi(q)}$$

$$+\frac{56.4r^{6.5}}{N}\sum_{1\le q\le r^3}\frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)}\sum_{a=1}^{q}{}'\triangle_{N,q,a}\,\Omega_{N,q,a}. \tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
M_3 &\le (2) \sum_{1\le q\le r^3} \int_0^{\frac{1}{q\tau}} {\sum_{a=1}^{q}}' (\triangle_{N,q,a} + 2\pi z \Omega_{N,q,a})^3 dz \\
&\le \left(\frac{2r^{7.5}}{N}\right) \sum_{1\le q\le r^3} \frac{\triangle_{N,q}^{(3)}}{q} + \left(\frac{124.1 r^{30}}{N^4}\right) \sum_{1\le q\le r} \frac{\Omega_{N,q}^{(3)}}{q^4} \\
&\quad + \left(\frac{18.85 r^{12}}{N^2}\right) \sum_{1\le q\le r^3} \frac{1}{q^2} {\sum_{a=1}^{q}}' (\triangle_{N,q,a})^2 (\Omega_{N,q,a}) \\
&\quad + \left(\frac{78.96 r^{22.5}}{N^3}\right) \sum_{1\le q\le r^3} \frac{1}{q^3} {\sum_{a=1}^{q}}' (\triangle_{N,q,a})(\Omega_{N,q,a})^2. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

当 $N \ge e^{e^{11.503}}$ 时则由 (21) 到 (24), (32) 到 (35) 式可得

$$
\begin{aligned}
I_1(N) &\ge 0.659 N^2 r^{-3} - 0.0002 N^2 r^{-3} - \frac{9.6N}{r^2} \sum_{1\le q\le r^3} \frac{0.132 q^{\frac{1}{2}} N}{(\varphi(q)) r^{11.35}} \\
&\quad - \left(\frac{160.1 \log r}{r^2}\right) \sum_{1\le q\le r^3} \frac{0.07 q^{\frac{1}{2}} N^2}{\varphi(q) r^{11.35}} - 0.05 \sum_{1\le q\le r^3} (0.132)^2 q N^2 r^{-22.7} \\
&\quad - \frac{88.5 r^{14}}{N^2} \sum_{1\le q\le r^3} (0.07)^2 q^{-1} N^4 r^{-22.7} - \left(\frac{56.4 r^{6.5}}{N}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{1\le q\le r^3} (0.132)(0.07) N^3 r^{-22.7} - \frac{2r^{7.5}}{N} \sum_{1\le q\le r^3} (0.132)^3 q^{\frac{3}{2}} N^3 r^{-34.05} \\
&\quad - \frac{124.1 r^{30}}{N^4} \sum_{1\le q\le r^3} (0.07)^3 q^{-2.5} \varphi(q) N^6 r^{-34.05} \\
&\quad - \frac{18.85 r^{15}}{N^2} \sum_{1\le q\le r^3} (0.132)^2 (0.07) \cdot q^{-0.5} N^4 r^{-34.05} \varphi(q) \\
&\quad - \frac{78.96 r^{22.5}}{N^3} \sum_{1\le q\le r^3} (0.132)(0.07)^2 q^{-1.5} N^5 r^{-34.05} \varphi(q) \\
&\ge 0.657 N^2 r^{-3}.
\end{aligned}
$$

这样我们就证明了如下的引理：

引理 2 如果奇数 $N \ge e^{e^{11.503}}$, 则我们有

$$
I_1(N) \ge 0.657 N^2 r^{-3}.
$$

三. 估计 $I_2(N)$ 所需要的几个引理

引理 3 设 χ 是模 q 的一个原特征，$x \ge e^{10000}, (\log x)^3 \le q \le (\log x)^{6.5}$, 令 $(\log x)^{10} = T$, 则有

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\chi(n) = -\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T_1} \frac{x^\rho}{\rho} + R_7.$$

其中 $|R_7| \le 1.83724x(\log x)^{-8}, |T_1 - T| \le 1$, ρ 是 $L(s,\chi)$ 的任意一个非显然零点.

证. 与 [5] 中的引理 12 相类似即可证得本引理.

引理 4 设 $x \ge e^{20000}$ 是一个实数，$(\log x)^3 \le q \le (\log x)^{6.5}$, 则对任何实数 $A \ge 1$, 函数 $\prod\limits_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi\ne\chi_0}} (s,\chi)$ 在区域

$$1 - \frac{g(A)}{\log\log x} \le \sigma < 1, \quad |t| \le (\log x)^A$$

中至多有两对共轭零点，其中 $g(A) = \dfrac{3}{4.58031A + 30.6164} - \dfrac{0.378}{A + 6.5}$.

证 设 $\rho_j = \beta_j + i\gamma_j (j = 1,2,3)$ 是 $\prod\limits_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi\ne\chi_q}} L(s,\chi)$ 的三个零点，其中 $\beta_j = 1 - \dfrac{b_j}{\log\log x}$, $|\gamma_j| \le (\log x)^A, \rho_j \ne \overline{\rho}_k (1 \le j < k \le 3)$. 令 $\sigma = 1 + \dfrac{0.378}{(6.5 + A)\log\log x}$, 则有

$$\begin{aligned} 0 \le 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \prod_{j=1}^{3} \left(1 + \mathrm{Re}\,\frac{\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\right) &= S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3) \\ &+ S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\overline{\rho}_3) + S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\overline{\rho}_2,\rho_3) \\ &+ S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_3) \end{aligned} \tag{36}$$

其中

$$\begin{aligned} S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3) = -\mathrm{Re}\Big\{ &\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \sum_{j=1}^{3} \frac{L'}{L}(\sigma + i\gamma_j, \chi_j) \\ &+ \sum_{1\le j<k\le 3} \frac{L'}{L}(\sigma + i(\gamma_j + \gamma_k), \chi_j\chi_k) + \frac{L'}{L}(\sigma + i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3), \chi_1\chi_2\chi_3) \Big\}. \end{aligned}$$

我们有

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \le \frac{1}{\sigma-1} + (0.1877)(\sigma-1) - 0.5772$$
$$\le \frac{A+6.5}{0.378}\log\log x - 0.57054. \qquad (37)$$

当 $\chi_1\chi_2, \chi_2\chi_3, \chi_1\chi_3, \chi_1\chi_2\chi_3$ 都是非主特征时，则由 [7] 中的引理 2 和引理 4 可得

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_j,\chi_j) \le 0.2764\log q(2+(\log x)^A) + d_q$$
$$+ 0.72361 - \frac{1}{\sigma-\beta_j}. \quad (1\le j\le 3). \qquad (38)$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_j+\gamma_k),\chi_j\chi_k)$$
$$\le 0.2764\log q(2+2(\log x)^A) + d_q. \quad (1\le j<k\le 3). \qquad (39)$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3),\chi_1\chi_2\chi_3) \le 0.2764\log q(2+3(\log x)^A)+d_q. \qquad (40)$$

其中 d_q 的定义见 [7] 中的引理 2. 由 (37) 到 (40) 式易得

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\chi_3) \le \left(\frac{A+6.5}{0.378} + (7)(0.2764)(A+6.5)\right)\log\log x$$
$$+(3)(0.72361) + 7d_q + (3)(0.2764\log 2) + 0.2764\log 3 + 0.000387$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j} \le (4.58031A + 30.6164)\log\log x - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}. \qquad (41)$$

当 $\chi_1\chi_3, \chi_2\chi_3$ 是非主特征， $\chi_1\chi_2=\chi_0$ 时，则 $\chi_1\chi_2\chi_3=\chi_3$. 由 $\chi_1\chi_2=\chi_0$ 易得 $L(\bar{\rho}_2,\chi_1)=L(\tilde{\rho}_1,\chi_2)=0$. 故由 [7] 中的 (39) 式可得

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_1+\gamma_2),\chi_1\chi_2) \le \operatorname{Re}\frac{1}{\sigma+i(\gamma_1+\gamma_2)-1} + 0.0095$$
$$+ 0.2764\log(2+2(\log x)^A) + \sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1} \le \operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-1+i(\gamma_1+\gamma_2)}$$
$$+ (0.2764A + 0.68297)\log\log x + 0.38065 + e_q. \qquad (42)$$

其中 e_q 的定义见 [7] 中的 (52) 式. 又我们有

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_j,\chi_j)\le 0.2764\log q(2+(\log x)^A)+d_q+(2)(0.72361)$$

$$-\frac{1}{\sigma-\beta_j}-\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma+ir_j-(\beta_k-i\gamma_k)}.\quad (1\le j\ne k\le 2). \tag{43}$$

当 $\max\limits_{1\le j\le 3}\{b_j\}\le\sigma-1$ 时则由 (37) 到 (40), (42), (43) 式和 [3] 中的引理 11 可得

$$\begin{aligned}S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)\le{}&\frac{A+6.5}{0.378}\log\log x-0.57054+(3)(0.2764)\\&\cdot\log q(2+(\log x)^A)+6d_q+e_q+(5)(0.72361)+0.38065\\&+(0.2764A+0.68297)\log\log x+0.2764\log 3+(2)(0.2764\log 2)\\&+(3)(0.2764)\log q(2+(\log x)^A)-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}\\\le{}&(4.58031A+29.8)\log\log x-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}.\end{aligned}\tag{44}$$

当 $\chi_1\chi_2=\chi_1\chi_3=\chi_0,\chi_2\chi_3\ne\chi_0$; 或 $\chi_1\chi_2\chi_3=\chi_0,\chi_1\chi_2\ne\chi_0,\chi_2\chi_3\ne\chi_0,\chi_1\chi_3\ne\chi_0$; 或 $\chi_1\chi_2=\chi_2\chi_3=\chi_1\chi_3=\chi_0$ 时, 使用类似的方法可得

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)\le(4.58031A+30.6164)\log\log x-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}.\tag{45}$$

对于 (36) 式中的其余三项, 有与 $S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ 完全相同的估计. 于是由 (36), (41), (44) 和 (45) 式得到

$$\frac{3}{\dfrac{0.378}{A+6.5}+\max\limits_{1\le j\le 3}\{b_j\}}\le\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\dfrac{0.378}{A+6.5}+b_j}\le 4.58031A+30.6164.$$

这就完成了本引理的证明.

引理 5 设 $x\ge e^{e^{11.3}}$ 是一个实数, a,q 是正整数并且满足 $(a,q)=1,(\log x)^3\le q\le(\log x)^{6.5}$, 则有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}'\,e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x;q,l)-\frac{\mu(q)x}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\le 0.00652xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-7.5}.$$

其中 $\tilde{\chi},\tilde{\beta},\tilde{E},\tau(\tilde{\chi})$ 的定义与 (5) 式中的相同.

证 与 [5] 中定理的证明相类似，使用引理 3 和引理 4 即可证得本引理.

引理 6 在引理 5 的条件下，如果 $x\geq e^{e^{11.302}}$, 则我们有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l)-\frac{\mu(q)\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right|$$

$$\leq 0.00654xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-8.5}$$

证 令 $\alpha(n)=\alpha(n;q,l)=\begin{cases}0, & n\not\equiv l(\bmod q)\\ 1, & n\equiv l(\bmod q)\end{cases}$ 则有

$$\pi(x;q,l)=\sum_{2<n\leq x}\frac{\Lambda(n)\alpha(n)}{\log n}-\sum_{\substack{2<n=p^k\leq x\\ k\geq 2}}\frac{\Lambda(n)\alpha(n)}{\log n},$$

所以由

$$\sum_{\substack{3<n=p^k\leq x\\ k\geq 1}}\frac{\Lambda(n)\alpha(n)}{\log n}\leq\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)\leq 0.7214x^{\frac{1}{2}}\log x.$$

可得

$$\pi(x;q,l)=\int_2^x\frac{\psi(u;q,l)}{u(\log u)^2}du+\frac{\psi(x;q,l)}{\log x}+R_8. \tag{46}$$

其中 $|R_8|\leq 0.7215x^{\frac{1}{2}}\log x$. 用 $e\left(\frac{al}{q}\right)$ 乘 (46) 式，然后对 l 经过模 q 的简化剩余系求和，则有

$$\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l)=\int_2^x\frac{\sum_{l=1}^{q}{}' e(\frac{al}{q})\psi(u;q,l)}{u(\log u)^2}du$$
$$+\frac{\sum_{l=1}^{q}{}' e(\frac{al}{q})\psi(x;q,l)}{\log x}+\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)R_8. \tag{47}$$

当 $x\geq e^{e^{11.3}}$ 时，则由 (47) 式和引理 5 可得

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l)-\frac{\mu(q)\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{u^{\tilde{\beta}-1}}{\log u}du\right|$$
$$\leq\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l)-\frac{\mu(q)x}{\varphi(q)\log x}-\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{du}{(\log u)^2}\right.$$

$$+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log x}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\int_2^x\frac{u^{\tilde{\beta}-1}}{(\log u)^2}du\Bigg|+\frac{2}{\varphi(q)\log 2}$$
$$+\frac{3q^{\frac{1}{2}}}{\varphi(q)\log 2}\le 0.00653xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-8.5}+\int_2^x\Bigg|{\sum_{l=1}^{q}}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(u;q,l)$$
$$-\frac{\mu(q)u}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})u^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\Bigg|\frac{du}{u(\log u)^2}. \tag{48}$$

令 $g_1(t)=e^{-e^{11.3}}\cdot t(\log t)^{-10}$, 当 $t\ge e^{e^{11.302}}$ 时则由 $g_1'(t)\ge 0$ 和 $g_1(e^{e^{11.302}})>1$ 可得 $g_1(t)\ge 1$. 所以当 $x\ge e^{e^{11.302}}$ 时由引理 5 可得

$$\int_2^x\Bigg|{\sum_{l=1}^{q}}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(u;q,l)-\frac{\mu(q)u}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})u^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\Bigg|\frac{du}{u(\log u)^2}$$
$$\le\int_2^{x(\log x)^{-10}}\frac{u(\log u+2)}{u(\log u)^2}du+\int_{x(\log x)^{-10}}^x\frac{0.00652q^{\frac{1}{2}}u}{u(\log u)^{9.5}}du$$
$$\le 0.00001xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-8.5}. \tag{49}$$

由 (48) 和 (49) 式知道本引理能够成立.

四. 定理的证明

引理 7 如果奇数 $N\ge e^{e^{11.303}}$ 则有

$$|I_2(N)|\le 0.075N^2r^{-3}.$$

证 令 $f_3(t)=(e^{-e^{11.302}})t(\log t)^{-3}$, 则易知当 $t\ge e^{e^{11.303}}$ 时有 $f_3(t)\ge 1$. 所以当 $N\ge e^{e^{11.303}}$ 时有 $Nr^{-3}\ge e^{e^{11.302}}$. 由 $S(\alpha)$ 的定义可得

$$S(\alpha)=S\left(\frac{a}{q}+z\right)={\sum_{l=1}^{q}}'e\left(\frac{al}{q}\right)N_x(l)+R(\alpha,N). \tag{50}$$

其中 $N_x(l)=\sum\limits_{\substack{Nr^{-3}\le p\le N\\ p\equiv l(\bmod q)}}e(pz), |R(\alpha,N)|\le 2Nr^{-4}$. 由于

$$\begin{aligned}N_x(l)&=\sum_{Nr^{-3}\le k\le N}e^{2\pi izk}(\pi(k;q,l)-\pi(k-1;q,l))\\&=\sum_{NT^{-3}\le k\le N-1}\pi(k;q,l)(e^{2\pi izk}-e^{2\pi iz(k+1)})+\pi(N;q,l)e^{2\pi izN}\\&\quad-\pi(Nr^{-3}-1;q,l)e^{2\pi izNr-3},\end{aligned}$$

所以当 $N \geq e^{e^{11.303}}$ 时由引理 6 可得

$$\Bigg|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\Bigg(N_z(l) - \sum_{Nr^{-3}\leq k\leq N-1}\left(\frac{\mathrm{Li}(k)}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^k \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)$$
$$\cdot(e^{2\pi izk} - e^{2\pi iz(k+1)}) - \left(\frac{\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{E}(\tilde{\chi})(l)}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)e^{2\pi izN}$$
$$+\left(\frac{\mathrm{Li}(Nr^{-3}-1)}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^{Nr^{-3}-1}\frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)\cdot e^{2\pi izNr^{-3}}\Bigg)\Bigg|$$
$$\leq \sum_{Nr^{-3}\leq k\leq N-1}(2\pi|z|)(0.00654q^{\frac{1}{2}})k(\log k)^{-8.5} + 0.00654Nq^{\frac{1}{2}}r^{-8.5}$$
$$+ 0.00654Nr^{-3}q^{\frac{1}{2}}(r - 3\log r)^{-8.5} \leq 0.0211Nr^{-2.5}. \tag{51}$$

当 $N \geq e^{e^{11.303}}$ 时则由 (50) 和 (51) 式我们有

$$|S(\alpha)| \leq 0.0212Nr^{-2.5} + |T(\alpha)|. \tag{52}$$

其中

$$T(\alpha) = \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\Bigg\{\sum_{Nr^{-3}\leq k\leq N-1}\left(\frac{\mathrm{Li}(k)}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_0^k \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)$$
$$\cdot(e^{2\pi izk} - e^{2\pi iz(k+1)}) + \left(\frac{\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)e^{2\pi izN}$$
$$-\left(\frac{\mathrm{Li}(Nr^{-3}-1)}{\varphi(q)} - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^{Nr^{-3}-1}\frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)e^{2\pi izNr^{-3}}\Bigg\}$$
$$= \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\Bigg\{\sum_{Nr^{-3}\leq k\leq N-1}(\mathrm{Li}(k))(e^{2\pi izk} - e^{2\pi iz(k+1)}) + \mathrm{Li}(N)e^{2\pi izN}$$
$$-Li(Nr^{-3}-1)e^{2\pi izNT^{-3}}\Bigg\} - \left(\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)$$
$$\cdot\Bigg\{\sum_{NT^{-3}\leq k\leq N-1}\left(\int_2^k \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)(e^{2\pi izk} - e^{2\pi iz(k+1)})$$
$$+\left(\int_2^N \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)e^{2\pi izN} - \left(\int_2^{Nr^{-3}-1}\frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)e^{2\pi izNr^{-3}}\Bigg\}$$
$$= \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\sum_{Nr^{-3}\leq k\leq N}(\mathrm{Li}(k) - Li(k-1))e^{2\pi izk}$$
$$-\left(\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\sum_{Nr^{-3}\leq k\leq N}\left(\int_2^k \frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt - \int_2^{k-1}\frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\,dt\right)e^{2\pi izk}.$$

所以当 $r^3 \le q \le r^{6.5}, N \ge e^{e^{11.303}}$ 时由 (1) 和 (10) 式可得

$$|T(\alpha)| \le \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} \int_{Nr^{-3}-1}^{N} \frac{dt}{\log t} + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{\varphi(q)} \int_{Nr^{-3}-1}^{N} \frac{dt}{\log t} \le 3.65Nr^{-2.38}. \quad (53)$$

当 $r^3 \le q \le r^{6.5}, N \ge e^{e^{11.303}}$ 时，则由 (52) 和 (53) 式有

$$|S(\alpha)| \le 0.05Nr^{-2}. \quad (54)$$

由 (54) 式和 $\pi(N) \le 1.5Nr^{-1}$ 可得

$$|I_2(N)| \le \left(\max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)|\right) \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \le (0.05Nr^{-2})\pi(N) \le 0.075N^2r^{-3}.$$

于是本引理得证.

引理 8 当奇数 $N \ge e^{20000}$ 时我们有

$$|I_3(N)| \le 0.31N^2r^{-3}.$$

证 当 $\alpha \in E_3$ 时有 $q \ge r^{6.5}$, 故当 $N \ge e^{20000}$ 时由 [1] 中的定理 1 可得

$$|S(\alpha)| \le 1.2Nr^{0.75}(\log r)(\sqrt{6r^{-6.5}} + \sqrt{r}e^{-0.5\sqrt{r}}) \le 2.94Nr^{-2.5}\log r. \quad (55)$$

由 (55) 式和 $\pi(N) \le 1.5Nr^{-1}$ 可得

$$|I_3(N)| \le (2.94Nr^{-2.5}\log r)\pi(N) \le 0.31N^2r^{-3}.$$

这就完成了本引理的证明.

由引理 2, 引理 7 和引理 8 可得

$$I(N) \ge (0.657 - 0.075 - 0.31)N^2r^{-3} \ge 0.272N^2r^{-3}.$$

这就完成了本文定理的证明.

参 考 文 献

[1] Chen Jingrun. On the estimation of some trigonometrical sums and their application. *Scientia Sinica*, 1985, **28**: 449 ~ 458

[2] 潘承洞，潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京：科学出版社， 1981

[3] Chen Jingrun. On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (II). *Scientia Sinica*, 1979, **22**: 859 ~ 889

[4] Бороздкин К Г. К вопросу о постоянной И.М.Виноградов, *Тру. Тре. бсец-оюзного Мат. Сдезда СССР*, 1956, **1**: 3

[5] Chen Jingrun, Wang Tianze. On the distribution of primes in an arithmetical progression. *Scientia Sinica*, to appear.

[6] 陈景润，王天泽. 关于 L- 函数例外零点的一个定理. 数学学报， 1989, **32** (6): 841~858

[7] Chen Jingrun, Wang Tianze. On zeros of Dirichlet's L-functions. *Chinese quarterly Journal of mathematics*, to appear.

[8] Kevin S M. Explicit zero-free regions for Dirichlet L-functions. *Journal of number theory*, 1984, **19**: 7 ~ 32

关于算术级数中素数分布的一个定理 *†

摘　要

设 x 是一个实数，a,q 是正整数并且满足 $1 \le q \le (\log x)^3$, $(a,q)=1$. 在本文中我们证明了：如果 $x \ge e^{e^{11.5}}$, 则有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x;q,l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|$$
$$\le 0.13xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-10.35}.$$

其中 $\sum\limits_{l=1}^{q}{}'$ 表示 $\sum\limits_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}$. $\mu(n)$ 表示 Möbius 函数，$\psi(x;q,l) = \sum\limits_{\substack{n\equiv l(\bmod q)\\ n\le x}} \Lambda(n)$, $\tau(\tilde{\chi}) = \sum\limits_{h=1}^{q}\tilde{\chi}(h)e\left(\frac{h}{q}\right)$. 当存在模 q 的实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s,\tilde{\chi})$ 有实零点 $\tilde{\beta} \ge 1 - \frac{0.1077}{\log q}$ 时 $\tilde{E}=1$; 否则 $\tilde{E}=0$.

关键词：素数，算术级数，零点

一. 引　言

关于算术级数中素数分布的最简单而又最重要的结果是：

$$\psi(x;q,l) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{E_1 x^{\beta_1}\chi_1(l)}{\beta_1\varphi(q)} + O(xe^{-c_0\sqrt{\log x}}),$$

其中当存在模 q 的“例外”特征 χ_1 以及相应的“例外”零点 β_1 时 $E_1 = 1$; 否则 $E_1 = 0$. 这一结果在证明 Goldbach-Vinogradov 定理 (每一个奇数 $N \ge N_0$ 都能够表示成为 3 个素数的和) 时是必须的，其中 N_0 充分大. 为了具体确定 N_0 的数值，我们必须计算 c_0 的数值以及蕴含于 “O” 常数之中的数值. 而为了得出尽可能好的 ${N_0}$[1)] 的值，我们必须采用 $O(x(\log x)^{-A})$

* 1988 年 4 月 26 日收到，1989 年 6 月 9 日收到修改稿.

† 原载中国科学，**32**(1989), no. 11, pp. 1121 – 1132.

1) 在另文中我们将证明 $N_0 = 10^{43001}$.

型余项估计，其中 A 是一个绝对常数. 在这篇文章中，我们得到了如下的结果：

定理. 设 $x \ge e^{e^{11.5}}$ 是一个实数， a,q 是正整数满足 $(a,q)=1, 1\le q\le (\log x)^3$. 记 $\sum_{l=1}^{q}{}' = \sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}$. 用 $\mu(n)$ 表示 Möbius 函数， p 表示素数，令

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & \text{当 } n=p^k \text{ 时},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad \psi(x;q,l)=\sum_{\substack{n\equiv l(\bmod q)\\ n\le x}}\Lambda(n),$$

$$\tau(\chi)=\sum_{l=1}^{q}\chi(l)e\left(\frac{l}{q}\right),$$

其中 χ 是模 q 的任一特征，则我们有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x;q,l)-\frac{\mu(q)x}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\le 0.13xq^{\frac12}(\log x)^{-10.35}.$$

其中当存在模 q 的实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s,\tilde{\chi})$ 有实零点 $\tilde{\beta}\ge 1-\frac{0.1077}{\log q}$ 时 $\tilde{E}=1$; 否则 $\tilde{E}=0$.

二. 一 些 引 理

引理 1. 设 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ 当 $\mathrm{Re}s=\sigma>1$ 时绝对收敛， $A(t)$ 是 $t\ge 0$ 的单调增函数， $|a_n|\le A(n)$, 则对于任何实数 $b>1, T\ge 1$ 及 $x=N+\frac12$ (N 是正整数), 有

$$\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+R_1,$$

其中

$$|R_1|\le\frac{\pi^b}{xT\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b}+\frac{2^bA(x)}{\pi T\log 2}\left(x\log x+\frac{3x}{2}-\frac12\right)+\frac{xA(2x)}{\pi T\log 2}(\log x+\log 2+2).$$

证. 设 h 是一个正实数， Γ 是以 $b \pm iT, -U \pm iT$ 为顶点的矩形， Γ_1 是以 $b \pm iT, U \pm iT$ 为顶点的矩形. 对于 $h > 1$ 和 $0 < h < 1$ 分别考虑积分 $\int_\Gamma \frac{h^s}{s} ds$ 和 $\int_{\Gamma_1} \frac{h^s}{s} ds$, 则由残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{h^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + A, & \text{当 } h > 1 \text{ 时}, \\ B, & \text{当 } 0 < h < 1 \text{ 时}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $|A| \le h^b(\pi T|\log h|)^{-1}, |B| \le h^b(\pi T|\log h|)^{-1}$. 由 (1) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} \right) \\ &= \sum_{n \le x} a_n(1 + A) + \sum_{n > x} a_n B = \sum_{n \le x} a_n - R_1. \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$|R_1| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{(xn^{-1})^b}{\pi T \left| \log \frac{x}{n} \right|} \le \frac{x^b}{\pi T \log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} + \frac{1}{\pi T} \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} |a_n| \frac{(xn^{-1})^b}{\left| \log \frac{x}{n} \right|}.$$

由于当 $1 \le t \le 2$ 时有 $\log t \ge (t-1)\log 2$, 故由 (2) 式可知本引理成立.

引理 2. 设 $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点， t 是一个实数，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1.25 + (4)(t - \gamma_n)^2} \le \frac{1}{2} \log(|t| + 2) + \frac{0.25}{0.0625 + t^2} + 2.6459.$$

证. 令 $s = 1.25 + it$, 则由文献 [1] 中的 (63) 式， (70) 到 (75) 式可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \rho_n} &\le \frac{1}{2} \log(|t| + 2) + \frac{0.25}{0.0625 + t^2} - \frac{1}{2} \log 2\pi + 0.095 + \operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \\ &\le \frac{1}{2} \log(|t| + 2) + \frac{0.25}{0.0625 + t^2} + 2.6459. \end{aligned} \tag{3}$$

由于对实数 $0.25 \le a \le 1.25$ 及任何实数 b 我们有 $(4a-1)b^2 \ge (a - 1.25)a$, 故由 (3) 式知道本引理成立.

引理 3. 设 $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点， t 是一个实数， $-0.01 \le \sigma_0 \le \sigma \le 1.0001$, 则当 $s = \sigma + it \ne 1$ 时有

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|t - \gamma_n| \le 1} \frac{1}{s - \rho_n} + R_2.$$

其中

$$|R_2| \le (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + ((\sigma-1)^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} + 0.6105 + (2-\sigma_0)$$
$$\cdot\left(2.625\log(|t|+2) + 14.141 + \frac{1.25}{0.0625+t^2}\right).$$

证. 由

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) = \frac{1}{1+it} - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2+it+2n}\right)$$

和引理 2 即可证明本引理.

引理 4. 设 $x \ge e^{20000}$ 是一个实数，令 $s = \sigma + it$, 则 $\zeta(s)$ 在区域 $1 - \frac{0.057812}{\log\log x} < \sigma \le 1, |t| \le \log x$ 中没有零点.

证. 设 $\rho = \beta + it$ 是 $\zeta(s)$ 的一个非显然零点，令 $\sigma = 1 + \frac{0.36}{\log\log x}, \beta = 1 - \frac{b}{\log\log x}, \sigma_1 = \frac{1+\sqrt{1+4\sigma^2}}{2}$, 当 $|t| \ge 0.48$ 时，则由 $\sigma \le \frac{5}{4}$ 和文献 [1] 中的 (76), (93), (94) 式可得

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) \le 0.27641\log\log x - \frac{1}{\sigma-\beta} + 0.891. \tag{4}$$

当 $|t| \ge 0.48$ 时，由文献 [1] 中的定理 3 可得

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it) \le 0.29575\log\log x + 0.049. \tag{5}$$

由于 $-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \le \frac{\log\log x}{0.36} - 0.57037$, 故由 (4), (5) 两式和另文 1) 中的引理 3 可得 $57.442 - \frac{24}{0.36+b} \ge 0$, 所以此时本引理能够成立. 由于当 $|s-1| < \sqrt{3}-1$ 时有

$$|(s-1)\zeta(s)-1| = |s-1|\cdot\left|\frac{1}{2} + s\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\{u\}}{u^{s+1}}\,du\right|$$
$$\le (\sqrt{3}-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\sigma}\right) < 1.$$

---

1) Chen Jingrun & Wang Tianze, On Zeros of Dirichlet's L-functions, to appear.

所以 $\zeta(s)$ 在区域 $|s-1|<\sqrt{3}-1$ 中没有零点，故当 $|t|\le 0.48$ 时有

$$\beta \le 1-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2-0.48^2}\le 1-\frac{0.057812}{\log\log x}.$$

这就完成了本引理的证明.

引理 5. 设 $x\ge e^{20000}$ 是一个实数，令 $s=\sigma+it$, 则 $\zeta(s)$ 在区域

$$1-\frac{0.06085}{A\log\log x}<\sigma\le 1,\quad \log x\le |t|\le(\log x)^A$$

中没有零点，其中 $A\ge 1$ 是一个绝对常数.

证. 与引理 4 相类似即可证明本引理.

引理 6. 在引理 5 的条件下， $\zeta(s)$ 在区域

$$1-\frac{f_1(A)}{\log\log x}<\sigma\le 1,\quad \log x\le |t|\le(\log x)^A$$

中至多有两个零点，其中 $f_1(A)=\dfrac{3}{4.58033A+0.8416}-\dfrac{0.378}{A}$.

证. 设 $\rho_j=\beta_j+i\gamma_j(j=1,2,3)$ 是 $\zeta(s)$ 的 3 个非显然零点满足 $\log x\le|\gamma_j|\le(\log x)^A$, 令 $\sigma=1+\dfrac{0.378}{A\log\log x}$, $\beta_j=1-\dfrac{b_j}{\log\log x}$, 则我们有

$$\begin{aligned}0 &\le 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\sum_{j=1}^{3}\left(1+\mathrm{Re}\,\frac{1}{ni\gamma_j}\right)\\ &=S(\rho_1,\rho_2,\rho_3)+S(\rho_1,\rho_2,\overline{\rho}_3)+S(\rho_1,\overline{\rho}_2,\rho_3)+S(\rho_1,\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_3).\end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}S(\rho_1,\rho_2,\rho_3)=-\mathrm{Re}\Big\{&\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma_j)\\ &+\sum_{1\le j<k\le 3}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i(\gamma_j+\gamma_k))+\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3))\Big\}.\end{aligned}$$

由文献 [1] 中的 (76), (93) 和 (94) 式可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma_j)&\le 0.2764\log(2+(\log x)^A)\\ &\quad-\mathrm{Re}\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_k+i(\gamma_j+\gamma_k)}-\frac{1}{\sigma-\beta_k}+2.18034.\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $1 \le j \le 3$. 类似地我们有

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_1 + \gamma_j)) \le \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + (\gamma_1 + \gamma_j)^2} + 0.2764\log(2 + (\log x)^A) - \frac{1}{\sigma - \beta_k + j(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} + 0.92471, \tag{8}$$

其中 $2 \le j \ne k \le 3$. 由 $|\gamma_j| \ge 20000$ 和文献 [1] 中的定理 3 可得

$$- \mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_2 + \gamma_3)) \le \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + (\gamma_2 + \gamma_3)^2} + 0.2764\log(2 + (\log x)^A) + 0.2011, \tag{9}$$

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) \le \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)^2} + 0.2764\log(2 + (\log x)^A) + 0.3132. \tag{10}$$

当 $\max\limits_{1 \le j \le 3}\{1 - \beta_j\} \le \sigma - 1$ 时，则由 (7) 到 (10) 式，文献 [2] 中的引理 11, 以及

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \le \frac{A\log\log x}{0.378} - 0.57$$

可得

$$S(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \le 4.58033A\log\log x + 8.33475 - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma - \beta_j}. \tag{11}$$

对于 (6) 式中的其余三项，有与 $S(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ 完全相同的估计，故由 (6) 和 (11) 式即可完成本引理的证明.

引理 7. 设 $x \ge e^{e^{11.5}}$ 是一个实数，则有

$$|\psi(x) - x| = \left|\sum_{n \le x}\Lambda(n) - x\right| \le 0.0012x(\log x)^{-10.35}.$$

证. 设 $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点，令 $T = (\log x)^{13}$, 则由引理 2 可得

$$\sum_{|T - \gamma_n| \le 1} 1 \le 5.25\sum_{|T - \gamma_n| \le 1}\frac{1}{1.25 + 4(T - \gamma_n)^2} \le 35.42\log\log x - 1. \tag{12}$$

由 (12) 式可知存在一个实数 T_1 满足 $|T_1 - T| \le 1$ 使得 $\zeta(s)$ 在区域 $|\mathrm{Im}\, s - T_1| \le \frac{1}{35.42 \log\log x}$ 中没有非显然零点. 取 $f(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s), b = 1 + \frac{1}{(\log x)^2}$. 则由引理 1 可得

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \Big) \frac{x^s}{s} ds + R_3 \tag{13}$$

其中 $|R_3| \le 0.0011 x (\log x)^{-10.35}$. 设 Γ 是以 $b \pm iT_1, 1 - b \pm iT_1$ 为顶点的矩形，则由残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \Big) \frac{x^s}{s} ds = x - \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \le T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0). \tag{14}$$

由引理 2 和引理 3 可得

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1-b+iT_1}^{b+iT_1} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \Big) \frac{x^s}{s} ds \right| \\ &\quad \le \frac{1}{2\pi T_1} \int_{1-b}^{b} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_1) \right| x^\sigma d\sigma \le 0.00001 x (\log x)^{-10.35}. \end{aligned} \tag{15}$$

类似地，我们有

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1-b+iT_1}^{1-b-iT_1} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \Big) \frac{x^s}{s} ds \right| \le 0.00001 x (\log x)^{-10.35},$$

以及

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1-b-iT_1}^{b-iT_1} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \Big) \frac{x^s}{s} ds \right| \le 0.00001 x (\log x)^{-10.35}$$

故由 (13) 到 (15) 式和 $\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \log 2\pi$ 可得

$$|\psi(x) - x| \le \left| \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \le T_1} \frac{x^\rho}{\rho} \right| + 0.00114 x (\log x)^{-10.35}. \tag{16}$$

当 $x \ge e^{20000}$ 时，则由引理 2 和引理 4 可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \le \log x} \frac{x^\rho}{\rho} \right| &\le \Big(\frac{0.057812}{\log\log x} \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \le 1} 1 + \sum_{k=1}^{\log x} \frac{1}{k} \sum_{k \le |\mathrm{Im}\,\rho| \le k+1} 1 \Big) x^{1 - \frac{0.057812}{\log\log x}} \\ &\le (62)(\log\log x)^2 x^{1 - \frac{0.057812}{\log\log x}} \le e^{-14.87} x (\log x)^{-10.35}. \end{aligned} \tag{17}$$

取 $A=13.001$, 当 $x\ge e^{e^{11.5}}$ 时，则由引理 2 和引理 6 可得

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\log x\le|\mathrm{Im}\,\rho|\le T_1}\frac{x^\rho}{\rho}\Big| &\le \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}+\Big(\sum_{k=[\log x]}^{(\log x)^{13.001}}\frac{1}{k}\sum_{k\le|\mathrm{Im}\,\rho|\le k+1}1\Big)x^{1-\frac{0.020602}{\log\log x}}\\ &\le \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}+(484)(\log\log x)^2x^{1-\frac{0.020602}{\log\log x}}\\ &\le \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}+\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}+e^{-45}x(\log x)^{-10.35}. \end{aligned}\tag{18}$$

由 $\log x\le|\mathrm{Im}\,\rho_1|\le T_1$ 和引理 5 容易得出 $\frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|}\le e^{-13}x(\log x)^{-10.35}$, 同样地有 $\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|}\le e^{-13}x(\log x)^{-10.35}$, 故由 (16) 到 (18) 式即可得出本引理的证明.

引理 8. 设 χ 是模 q 的一个原特征， $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n(n=1,2,\cdots)$ 是 $L(s,\chi)$ 的所有非显然零点， $T\ge 2$ 是一个实数，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1.5+2(T-\gamma_n)^2}\le\frac{1}{2}\log qT+0.9443.$$

证. 令 $s=\frac{3}{2}+iT$, 则由文献 [1] 中的定理 1 得

$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}\le\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi)+\frac{1}{2}\log\frac{q(T+2)}{2\pi}\le\frac{1}{2}\log qT+0.9443.\tag{19}$$

由 (19) 式和 $\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_n}\ge\frac{1}{1.5+2(T-\gamma_n)^2}$ 即知本引理成立.

引理 8′. 在引理 8 的条件下，以 $T\ge 0$ 代替 $T\ge 2$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1.5+2(T-\gamma_n)^2}\le\frac{1}{2}\log q(T+2)+0.59773.$$

证. 仿引理 8 即可证得本引理.

引理 9. 设 χ 是模 q 的一个原特征, $s=\sigma+it,|t|\ge 2,\rho_n=\beta_n+i\gamma_n(n=1,2,\cdots)$ 是 $L(s,\chi)$ 的所有非显然零点，则当 $-\frac{1}{2}\le\sigma\le 1.2$ 时有

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{|\gamma_n-t|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n}+R_4.$$

其中

$$|R_4| \le (1.75)(2-\sigma)(\log q|t|) + (2-\sigma)\left(\frac{1}{2.25+t^2} + \frac{1}{|t|\sqrt{2.25+t^2}} + \frac{\pi}{4|t|} + (3.5)(0.9443)\right) + 0.6105.$$

证. 令 $s_1 = 2+it$, 则由文献 [3] 中第八章的 (14) 和 (16) 式可得

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{L'}{L}(s_1,\chi) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{s_1-\rho_n}\right)\right) - \frac{1}{s+\delta} + \frac{1}{s_1+\delta} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n} + \frac{1}{s_1+\delta+2n}\right), \tag{20}$$

其中 $\delta = \begin{cases} 0, \chi(-1)=1, \\ 1, \chi(-1)=-1. \end{cases}$ 由 (20) 式和引理 8 通过简单的计算即知本引理能够成立.

引理 9′. 设 χ 是模 q 的一个原特征, $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n (n=1,2,\cdots)$ 是 $L(s,\chi)$ 的所有非显然零点, 令 $s = -\frac{1}{2}+it$, 则有

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|\gamma_n - t|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n} + R_4'.$$

其中

$$|R_4'| \le (1.75)(2.5)\log q(2+|t|) + (2.5)\left(\frac{1}{2.25+t^2} + \frac{1}{3} + (3.5)(0.59773) + \left((4+t^2)\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right) + 0.6105.$$

证. 仿引理 9 即可证得本引理.

引理 10. 设 χ 是模 q 的一个原特征, $x \ge e^{20000}$ 是一个实数; $q \le (\log x)^3, A \ge 1$ 是一个绝对常数, 当 χ 是复特征时, 则 $L(s,\chi)$ 在区域

$$1 - \frac{f_2(A)}{\log\log x} \le \sigma < 1, \quad |t| \le (\log x)^A$$

中至多有两个零点; 当 χ 是实特征时, 则 $L(s,\chi)$ 在上述区域中至多有两对共轭零点, 其中

$$f_2(A) = \frac{3}{4.10872A + 12.3385} - \frac{0.46}{A+3}.$$

证. 当 χ 是复特征时，设 $\rho_j = \beta_j + i\gamma_j (j = 1,2,3)$ 是 $L(s,\chi)$ 的 3 个互不相同的零点，其中 $\beta_j = 1 - \frac{b_j}{\log\log x}, |\gamma_j| \le (\log x)^A$. 取 $\sigma = 1 + \frac{0.46}{(A+3)\log\log x}$, 则有

$$0 \le 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\sum_{j=1}^{3}\left(1+\mathrm{Re}\,\frac{\chi(n)}{n^{i\gamma_j}}\right)$$
$$= S(\chi,\chi,\chi;\rho_1,\rho_2,\rho_3) + S(\chi,\overline{\chi},\chi;\rho_1,\overline{\rho}_2,\rho_3) + S(\chi,\chi,\overline{\chi};\rho_1,\rho_2,\overline{\rho}_3)$$
$$+ S(\chi,\overline{\chi},\overline{\chi};\rho_1,\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_3), \tag{21}$$

其中

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3) = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \sum_{j=1}^{3}\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_j,\chi_j)\right.$$
$$\left. + \sum_{1\le j<k\le 3}\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_j+i\gamma_k,\chi_j\chi_k) + \frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3),\chi_1\chi_2\chi_3)\right\}.$$

当 $\chi^3 \ne \chi_0$ 时，则由 $-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \le \frac{A+3}{0.46}\log\log x - 0.57465$, 以及另文 1) 中的引理 2 和引理 4 可得

$$S(\chi,\chi,\chi;\rho_1,\rho_2,\rho_3) \le \frac{A+3}{0.46}\log\log x - 0.57495 + (3)(0.72361) + 2.3072$$
$$+(3)(0.2764)\log q(2+(\log x)^A) + (3)(0.2764)\log q(2+2(\log x)^A)$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j} + 0.2764\log q(2+3(\log x)^A)$$
$$\le (4.10872A + 12.808963)\log\log x - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}. \tag{22}$$

当 $\chi^3 = \chi_0$ 时，由 $\chi^2 = \chi$ 而得 $L(\overline{\rho}_j,\chi^2) = 0, 1 \le j \le 3$. 故由另文 1) 中的引理 4 可得

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma+i(\gamma_i+\gamma_3),\chi^2) \le 0.2764\log q(2+2(\log x)^A) + 0.72361$$
$$+ c_q - \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sigma+i(\gamma_j+\gamma_3)-(\beta_k-i\gamma_k)}. \tag{23}$$

1) 见第 403 页脚注.

其中 $1 \le j \ne k \le 2, c_q$ 的定义见另文 [1)] 中的引理 2 及其 (39) 式可得

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma + i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3),\chi^3) \le \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sigma - 1 + i(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} + 0.38065$$

$$+e_q + (0.2764A + 0.3307)\log\log x, \tag{24}$$

其中

$$e_q = \begin{cases} 0.9\log 2, & \text{当 } 2|q, 3\nmid q \text{ 时}, \\ 0.4\log 3, & \text{当 } 3|q, 2\nmid q \text{ 时}, \\ 0.9\log 2 + 0.4\log 3, & \text{当 } 6|q \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } (q,6)=1 \text{ 时}. \end{cases}$$

当 $\max\limits_{1\le j\le 3}\{1-\beta_j\} \le \sigma - 1$ 时，则由 (23), (24) 式，及另文 [1)] 中的引理 2 和文献 [2] 中的引理 11 可得

$$S(\chi,\chi,\chi;\rho_1,\rho_2,\rho_3) \le (4.10872A + 12.3)\log\log x - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}. \tag{25}$$

使用同样的方法我们可以得到

$$S(\chi,\chi,\chi;\rho_1,\overline{\rho}_2,\rho_3) \le (4.10872A + 12.181631)\log\log x - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}. \tag{26}$$

对于 $S(\chi,\chi,\overline{\chi};\rho_1,\rho_2,\overline{\rho}_3)$ 和 $S(\chi,\overline{\chi},\overline{\chi};\rho_1,\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_3)$ 有与 $S(\chi,\overline{\chi},\chi;\rho_1,\overline{\rho}_2,\rho_3)$ 完全相同的估计，所以当 $\max\limits_{1\le j\le 3}\{1-\beta_j\} \le \sigma - 1$ 时，则由 (21), (22), (25) 和 (26) 式可得

$$\max_{1\le j\le 3}\{b_j\} \ge \frac{3}{4.10872A + 12.3385} - \frac{0.46}{A+3}.$$

当 χ 是模 q 的实特征时，使用相同的方法容易证得引理的结论. 于是本引理得证.

引理 11. 设 χ_1 是模 q_1 的实原特征， χ_2 是模 q_2 的实原特征，实数 β_1, β_2 满足 $L(\beta_1,\chi_1) = L(\beta_2,\chi_2) = 0, 0 \le \beta_1, \beta_2 \le 1$, 则当 χ_1 与 χ_2 不同时，有

$$\min(\beta_1,\beta_2) \le 1 - \frac{0.2154}{\log q_1 q_2}.$$

1) 见第 403 页脚注.

证. 令 $\sigma = 1 + \frac{1}{2\log q_1 q_2}, \sigma_1 = \frac{1+\sqrt{1+4\sigma^2}}{2}$, 则由文献 [1] 中的定理 2 和 $\sigma_1 \geq 1.618$ 可得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_j) \leq 0.2764 \log q_j - \frac{1}{\sigma - \beta_j} + 0.92464. \tag{27}$$

其中 $j = 1, 2$. 由 $\chi_1\chi_2$ 是模 $q_1 q_2$ 的非主特征和另文 1) 中的引理 2 可得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1, \chi_2) \leq 0.2764 \log q_1 q_2 + 0.94839. \tag{28}$$

由文献 [1] 中的定理 1 有

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_j) \leq \frac{1}{2}\log q_j - \frac{1}{\sigma - \beta_j} - 0.57236, \quad (j = 1, 2). \tag{29}$$

使用证明另文 1) 中引理 2 的方法，由文献 [1] 中的定理 1 可得

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) \leq \frac{1}{2}\log q_1 q_2 - 0.22578. \tag{30}$$

由于 χ_1 和 χ_2 都是实特征，故有

$$\begin{aligned} &-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) - \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_2) - \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n))\Lambda(n)n^{-\sigma} \geq 0. \end{aligned} \tag{31}$$

由 (27) 到 (31) 式以及 $-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma - 1} - 0.534487$ 可得

$$0 \leq 2.79562 \log q_1 q_2 - \frac{2}{\sigma - \min(\beta_1, \beta_2)}.$$

由此即可得出本引理的结论.

引理 12. 设 χ 是模 q 的原特征， $x \geq e^{10000}$ 是一个实数， $q \leq x, T = (\log x)^{12.6}$, 则有

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x}\Lambda(n)\chi(n) = -\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \leq T_1}\frac{x^\rho}{\rho} + R_5.$$

其中 $|R_5| \leq 2.08664x(\log x)^{-10.6}, |T_1 - T| \leq 1$.

1) 见第 403 页脚注.

证 由引理 8 可得 $\sum\limits_{|\gamma_n - T|\le 1} 1 \le 1.7876\log qT - 1$, 故存在实数 T_1 满足 $|T_1 - T| \le 1$ 使得

$$|T_1 - \operatorname{Im}\rho_n| \ge \frac{1}{1.7876\log qT}. \tag{32}$$

其中 ρ_n 表示 $L(s,\chi)$ 的任一零点. 令 $b = 1 + \frac{1}{(\log x)^2}$, 则由残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}ds = -\sum_{|\operatorname{Im}\rho_n|\le T_1}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + \theta\log x. \tag{33}$$

其中 Γ 是以 $b \pm iT_1, -\frac{1}{2} \pm iT_1$ 为顶点的矩形, $|\theta| \le 1$. 取 $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\chi(n)n^{-s}$, $A(n) = \log n$, 则由引理 1 可得

$$\psi(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}ds + R_6. \tag{34}$$

其中 $|R_6| \le 1.88283x(\log x)^{-10.6}$. 由 (32) 式, 引理 8 和引理 9 可得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}+iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \le 0.1019x(\log x)^{-10.6}. \tag{35}$$

类似地我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-iT_1}^{b-iT_1}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \le 0.1019x(\log x)^{-10.6}. \tag{36}$$

由引理 8′ 和引理 9′ 可得 $\left|\frac{L'}{L}\left(-\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right| \le 12.8211 + 6.4964\log q(2+|t|)$. 所以有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T_1}^{T_1}\left(-\frac{L'}{L}\left(-\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right)\frac{x^{-\frac{1}{2}+it}}{-\frac{1}{2}+it}dt\right| \le 4.25x^{-\frac{1}{2}}(\log x)^2. \tag{37}$$

由 (33) 到 (37) 式知道本引理成立.

三. 定理的证明

由引理 11 可知, 至多存在模 q 的一个实特征 $\tilde{\chi}$ 使得 $L(s,\tilde{\chi})$ 有实零点

$\tilde{\beta} \geq 1 - \frac{0.1077}{\log q}$, 并且这样的实零点至多有一个，故由

$$\sum_{\chi \bmod q} \psi(x, \chi)\overline{\chi}(l) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sum_{\chi \bmod q} \chi(n)\overline{\chi}(l) = \varphi(q)\psi(x; q, l).$$

可得

$$\psi(x; q, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0, \tilde{\chi}} \psi(x, \chi)\overline{\chi}(l) + \frac{\tilde{E}}{\varphi(q)} \psi(x, \tilde{\chi})\tilde{\chi}(l).$$

将此式两端同时乘以 $e\left(\frac{al}{q}\right)$, 然后对 l 经过模 q 的简化剩余系求和可得

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x; q, l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)} &= \frac{\mu(q)(\psi(x) - x)}{\varphi(q)} \\ &- \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)>1}} \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0, \tilde{\chi}} \psi(x, \chi)\tau(\overline{\chi})\chi(a) \\ &+ \left(\psi(x, \tilde{\chi}) + \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\right)(\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})(\varphi(q))^{-1}). \end{aligned} \tag{38}$$

当 $\chi \neq \chi_0, \tilde{\chi}$ 时，设 χ^* 是模 q^* 的与 χ 相对应的原特征，则有

$$\psi(x, \chi) = \psi(x, \chi^*) + R_7 \tag{39}$$

其中 $|R_7| \leq \frac{1}{\log 2}(\log x)^2$. 取 $T = (\log x)^{12.6}$. 当 χ^* 是复特征时，则由引理 12 可得

$$|\psi(x, \chi^*)| \leq \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \leq \log x} \frac{x^{\beta}}{|\rho|} + \sum_{\log x \leq |\mathrm{Im}\,\rho| \leq T_1} \frac{x^{\beta}}{|\rho|} + |R_5|. \tag{40}$$

在引理 10 中取 $A = 1$, 则由引理 8′ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \leq \log x} \frac{x^{\beta}}{|\rho|} &\leq \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|} + \frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|} + \left(\frac{\log\log x}{0.066777} \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \leq 1} 1 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq k \leq \log x} \frac{1}{k} \sum_{k \leq |\mathrm{Im}\,\rho| \leq k+1} 1\right) \cdot x^{1 - \frac{0.066777}{\log\log x}} \\ &\leq \frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|} + \frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|} + (97.85)(\log\log x)^2 x^{1 - \frac{0.066777}{\log\log x}}. \end{aligned} \tag{41}$$

由另文 1) 中的定理可知，当 $x \geq e^{e^{11.5}}$ 时有 $\frac{x^{\beta_1}}{|\rho_1|} \leq e^{-14.8}x(\log x)^{-10.35}$ 以及 $\frac{x^{\beta_2}}{|\rho_2|} \leq e^{-14.8} \cdot x(\log x)^{-10.35}$. 故由 (41) 式可得

$$\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \leq \log x} \frac{x^\beta}{|\rho|} \leq (7.5 \times 10^{-7}) x(\log x)^{-10.35}. \tag{42}$$

在引理 10 中取 $A = 12.7$, 当 $x \geq e^{e^{11.5}}$ 时，则由引理 8′ 和引理 10 可得

$$\begin{aligned}\sum_{\log x \leq |\mathrm{Im}\,\rho| \leq T_1} \frac{x^\beta}{|\rho|} &\leq \frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|} + \frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|} + \Bigg(\sum_{[\log x] \leq k \leq T_1} \frac{1}{k} \sum_{k \leq |\mathrm{Im}\,\rho| \leq k+1} 1\Bigg) x^{1-\frac{0.017157}{\log\log x}} \\ &\leq \frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|} + \frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|} + (444.58)(\log\log x)^2 x^{1-\frac{0.017157}{\log\log x}} \\ &\leq \frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|} + \frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|} + e^{-17.5} x(\log x)^{-10.35}. \end{aligned} \tag{43}$$

当 $x \geq e^{e^{11.5}}$ 时，则由另文 1) 中的定理容易得到 $\frac{x^{\beta_3}}{|\rho_3|} \leq e^{-10.4}x(\log x)^{-10.35}$ 以及 $\frac{x^{\beta_4}}{|\rho_4|} \leq e^{-10.4} \cdot x(\log x)^{-10.35}$. 故由 (40) 到 (43) 式可得

$$\begin{aligned}|\psi(x,\chi^*)| &\leq \left(7.5 \times 10^{-7} + e^{-17.5} + \frac{2}{e^{10.4}}\right) x(\log x)^{-10.35} + |R_5| \\ &\leq 0.12x(\log x)^{-10.35} \end{aligned} \tag{44}$$

当 χ^* 是模 q^* 的实特征时，类似地可得

$$|\psi(x,\chi^*)| \leq 0.12x(\log x)^{-10.35}. \tag{45}$$

当 $\chi \neq \chi_0, \tilde{\chi}, x \geq e^{e^{11.5}}$ 时，则由 (39), (44) 和 (45) 式得

$$|\psi(x,\chi)| \leq 0.12x(\log x)^{-10.35} + \left(\frac{1}{\log 2}\right)(\log x)^2 \leq 0.13x(\log x)^{-10.35}. \tag{46}$$

设 $\tilde{\chi}^*$ 是模 $\tilde{q}^*$ 的与 $\tilde{\chi}$ 相对应的原特征，则由引理 10, 引理 11, 引理 12 和另文 1) 中的定理可知当 $x \geq e^{e^{11.5}}$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\psi(x,\tilde{\chi}) + \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\right| &\leq \left|\psi(x,\tilde{\chi}^*) + \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\right| + \left(\frac{1}{\log 2}\right)(\log x)^2 \\ &\leq \sum_{\substack{|\mathrm{Im}\,\rho| \leq \log x \\ \rho \neq \tilde{\rho}}} \frac{x^\beta}{|\rho|} + \sum_{\log x \leq |\mathrm{Im}\,\rho| \leq T_1} \frac{x^\beta}{|\rho|} + \left(\frac{1}{\log 2}\right)(\log x)^2 + |R_5| \\ &\leq 0.13x(\log x)^{-10.35}. \end{aligned} \tag{47}$$

1) 见第 403 页脚注.

当 $x \geq e^{e^{11.5}}$ 时，则由 (38), (46), (47) 式和引理 7 可得

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x;q,l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| \leq 0.13xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-10.35}.$$

这就完成了本文定理的证明.

参 考 文 献

[1] 陈景润. 曲阜师范大学学报 (自然科学版), 1986, **2**(3)

[2] Chen Jingrun. *Scientia Sinica*, 1979, **22**: 859 ~ 889

[3] 潘承彪译. 解析数论基础. 北京：科学出版社， 1984

关于 Dirichlet L- 函数的零点分布 *†

摘　要

设 χ 是模 q 的一个原特征，令 $s=\sigma+it, q_t=q(2+|t|)$, $c_0=\max\left(0.089193, \frac{19.09712}{43.14093+12.169(\log q_t)^{-1}}-0.339\right)$. 本文证明了：当 $\chi(\bmod q)$ 是复特征时，$L(s,\chi)$ 在区域 $1-\frac{c_0}{\log q_t}<\sigma\le 1$ 中没有零点，当 $\chi(\bmod q)$ 是实特征时，$L(s,\chi)$ 在区域 $1-\frac{c_0}{\log q_t}<\sigma\le 1, |t|>0$ 中没有零点.

关键词 Dirichlet L- 函数，零点分布，原特征，实特征，复特征.

1. 引　言

L- 函数零点的研究在解析数论中占有极重要的位置，解析数论的基础知识就是 L- 函数零点的最基本性质. 目前，关于 L- 函数零点上界的最好结果是：当 χ 是模 q 的复特征时，$L(s,\chi)$ 在区域 $\mathrm{Re}\, s=\sigma\ge 1-\frac{c}{\log q_t}$ 中没有零点；当 χ 是模 q 的实特征时，$L(s,\chi)$ 在区域 $\sigma\ge 1-\frac{c}{\log q_t}, |t|>0$ 中没有零点. 其中 c 是一个不依赖于 q 和 t 的实常数. 当 q 和 t 相当大时，使用文 [2] 中的方法，我们只能得出 c 是一个相当小的实数. 1984 年，Kevin 在文 [6] 中利用十分复杂的方法和计算得出了一个至多有两个零点区域的明确上界. 在本文中我们利用较为简单的方法，得到了 L- 函数无零点区域的一个明确上界，证明了如下的结果：

定理　设 χ 是模 q 的一个原特征，令 $s=\sigma+it, q_t=q(2+|t|), c_0=\max\left(0.089193, \frac{19.09712}{43.14093+12.169(\log q_t)^{-1}}-0.339\right)$. 则当 χ 是模 q 的复特征时，$L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{c_0}{\log q_t}<\sigma\le 1$$

* 本文 1989 年 10 月 30 日收到.

† 原载四川大学学报，**26**(1990), pp.145 – 155.

中没有零点；当 $\chi(\bmod q)$ 是实特征时， $L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{c_0}{\log q_t}<\sigma\leq 1,\quad |t|>0$$

中没有零点.

虽然我们这里的区域界限稍弱于 [6] 中的区域界限，但区域中不包含任何可能零点的特性却优于 [6] 中的结果. 利用本文的定理，在文 [7] 中我们大大地改进了目前关于奇数情形哥德巴赫猜想的结果.

2. 一些基本引理

引理 1. 设 χ 是模 q 的原特征，令 $s=\sigma+it$. 则当 $1\leq\sigma\leq\frac{5}{4}$ 时有

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi)\leq 0.2764\log q(2+|t|)+c_q,$$

其中

$$c_q=\begin{cases}-0.24, & \text{当 } 6\mid q \text{ 时},\\ -0.14, & \text{当 } 2\mid q \text{ 时},\\ -0.09, & \text{当 } 3\mid q \text{ 时},\\ 0.0095, & \text{当 } q\geq 3 \text{ 时}.\end{cases}$$

证 当 $1\leq\sigma\leq 1.25$ 时，由文 [1] 中的定理 2 得

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi)&\leq\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}\right)\log\frac{q(2+|t|)}{2\pi}+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|\\&\leq 0.2764\log q(2+|t|)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_1}}\\&\quad-0.27639\log 2\pi.\end{aligned}\tag{1}$$

当 $1\leq\sigma\leq 1.25$ 时，则由文 [5] 中的结果和 $\sigma_1\geq 1.618$ 可得

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_1}}\leq\frac{(0.618)^{-1}+(0.1877)(0.618)-0.5772}{\sqrt{5}}\leq 0.51743.\tag{2}$$

由 (2) 式和 $\sigma_1 \geq 1.618$ 容易得出 $\sum\limits_{\substack{n=1\\(n,2)=1}}^{\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_1}} \leq 0.3677\sqrt{5}$, $\sum\limits_{\substack{n=1\\(n,3)=1}}^{\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_1}} \leq 0.4175\sqrt{5}$, $\sum\limits_{\substack{n=1\\(n,6)=1}}^{\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_1}} \leq 0.2678\sqrt{5}$, 故由 (1) 和 (2) 式知道本引理能够成立.

引理 2. 设 χ 是模 q 的一个非主特征, 令 $s=\sigma+it$, 则当 $1 \leq \sigma \leq 1.25$ 时有 $-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi) \leq 0.2764\log q_t + d_q$, 其中

$$d_q = \begin{cases} 0.7568, & \text{当 } 6|q \text{ 时}, \\ 0.3616, & \text{当 } 4|q, 3\nmid q \text{ 时}, \\ 0.2552, & \text{当 } 2\nmid q, 3|q \text{ 时}, \\ 0.0095, & \text{当 } (q,6)=1 \text{ 时}, \end{cases}$$

证 当 $\chi(\bmod q)$ 是原特征时, 由引理 1 知道本引理成立, 所以我们可以假定 χ 为非原特征. 设 χ^* 是与 χ 相应的模 q^* 的原特征, 则有 $q^* \geq 3, q^*|q, q^* \neq q$. 由引理 1 得

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi^*) \leq 0.2764\log q^*(2+|t|)c_q^*. \tag{3}$$

令 $\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi^*) - \mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi) = \triangle$, 则由 $|\triangle| \leq \sum\limits_{p|\frac{q}{q^*}} \dfrac{\log p}{p-1}$ 容易得出

$$|\triangle| \leq 0.2764\log\frac{q}{q^*} + \delta(q,q^*), \tag{4}$$

其中

$$\delta(q,q^*) = \begin{cases} 0.7473, & \text{当 } 6|q \text{ 时}, \\ 0.5016 - 0.2764\log 2, & \text{当 } 4|q, 3\nmid q, 2\nmid q^* \text{ 时}, \\ 0.2457, & \text{当 } 2\nmid q, 3|q \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } (q,6)=1 \text{ 时}. \end{cases}$$

由 (3), (4) 两式和引理 1 知道本引理成立.

引理 3. 设 φ 是一个实函数, 则有

$$11.200472 + 19.09712\cos\varphi + 11.6884\cos 2\varphi + 4.76\cos 3\varphi + \cos 4\varphi \geq 0,$$

$$5 + 8\cos\varphi + 4\cos 2\varphi + \cos 3\varphi \geq 0, \quad 17 + 24\cos\varphi + 8\cos 2\varphi \geq 0.$$

证 见文献 [5].

引理 4. 设 χ 是模 q 的原特征, $s=\sigma+it, 1\le\sigma\le 1.25$, 如果 $\rho=\beta+it'$ 是 $L(s,\chi)$ 的一个零点, 则有

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi)\le 0.2764\log q(2+|t|)+c_q-\frac{\sigma-\beta}{|\sigma-\beta+i(t-t')|^2}+0.72361.$$

其中 c_q 的定义见引理 1.

证 由 [1] 中的定理 2 可得

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi)\le 0.2764\log q(2+|t|)-0.27639\log 2\pi$$
$$-\frac{\sigma-\beta}{|\sigma-\beta+i(t-t')|^2}+\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1-\beta}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\left|\frac{L'}{L}(s_1,\chi)\right|. \quad (5)$$

其中 $s_1=\sigma_1+it, \sigma_1=\frac{1+\sqrt{1+4\sigma^2}}{2}$. 由 $\sigma\ge 1, 0\le\beta\le 1$ 易得

$$\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1-\beta}\right)\le 0.72361. \quad (6)$$

故由 $\left|\frac{L'}{L}(s_1,\chi)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_1}}$ 以及 (5) 和 (6) 式知道本引理能够成立.

3. 定理的证明

引理 5. 设 χ 是模 q 的原特征, 令 $s=\sigma+it, q_t=q(2+|t|)$, 则当 $\chi^j\ne\chi_0(j=2,3,4)$ 时, $L(s,\chi)$ 在区域 $1-\frac{c_0}{\log q_t}<\sigma\le 1$ 中没有零点.

证 设 $\rho=\beta+it$ 是 $L(s,\chi)$ 的一个零点, 令 $\sigma_2=1+\frac{0.339}{\log q_t}, \sigma_3=1+\frac{0.29}{\log q_t}, s_2=\sigma_2+it, s_3=\sigma_3+it, \beta=1-\frac{b}{\log q_t}$. 由于 χ 是模 q 的原特征, 所以由 $q\ge 3$ 可得 $\sigma_2\le 1.19, \sigma_3\le 1.1619$. 故由文 [5] 中的结果有

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2,\chi_0)\le\frac{\log q_t}{0.339}-\delta_1(q), \quad (7)$$

以及

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_3,\chi_0)\le\frac{\log q_t}{0.29}-\delta_2(q), \quad (8)$$

其中

$$\delta_1(q)=\begin{cases}1.0823, & 当\ 2|q\ 时,\\ 0.948, & 当\ 3|q\ 时,\\ 1.489, & 当\ 6|q\ 时,\\ 0.5415, & 当\ (q,6)=1\ 时.\end{cases}\qquad \delta_2(q)=\begin{cases}1.10691, & 当\ 2|q\ 时,\\ 0.97196, & 当\ 3|q\ 时,\\ 1.532, & 当\ 6|q\ 时,\\ 0.5468, & 当\ (q,6)=1\ 时.\end{cases}$$

令

$$f(\sigma,t,\chi)=\mathrm{Re}\Big(11.200472\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)+11.6884\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)$$
$$+4.76\frac{L'}{L}(\sigma+3it,\chi^3)+\frac{L'}{L}(\sigma+4it,\chi^4)\Big).$$

则由引理 3 可得

$$f(\sigma_j,t,\chi)+19.09712\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_j+it,\chi)\le 0,\quad (j=2,3). \tag{9}$$

当 $(6,q)=1$, $\chi^j\ne\chi_0(j=2,3,4)$ 时，则由 (7) 式和引理 2 得

$$f(\sigma_2,t,\chi)\ge(11.200472)\left(0.5415-\frac{\log q_t}{0.339}\right)+(17.4484)(-0.2764\log q_t$$
$$-0.0095)-(0.2764)(11.6884\log 2+4.76\log 3+\log 4)$$
$$\ge -37.8625\log q_t+1.83131. \tag{10}$$

由引理 4 我们有

$$19.09712\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+it,\chi)$$
$$\ge(19.09712)\left(\frac{\log q_t}{0.339+b}-0.2764\log q_t-0.73311\right)$$
$$\ge\left(\frac{19.09712}{0.339+b}-5.278444-\frac{14.0003}{\log q_t}\right)(\log q_t). \tag{11}$$

当 $(6,q)=1$ 时，由 (9) 到 (11) 式易得 $\left(\frac{19.09712}{0.339+b}-43.14095-\frac{12.169}{\log q_t}\right)\cdot(\log q_t)\le 0$, 故有

$$b\ge\frac{19.09712}{43.14095+12.169(\log q_t)^{-1}}-0.339. \tag{12}$$

当 $(6,q)=1$, $\chi^j\neq\chi_0(j=2,3,4)$ 时，则由 (8) 式和引理 2 得

$$f(\sigma_3,t,\chi)\geq(11.200472)\left(0.5468-\frac{\log q_t}{0.29}\right)+(17.4484)(-0.2764\log q_t$$

$$-0.0095)-(0.2764)(11.6884\log 2+4.76\log 3+\log 4)$$

$$\geq -43.44506\log q_t+1.890749. \tag{13}$$

由引理 4 和 [1] 中的定理 1 可得

$$7.3301\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_3+it,\chi)+11.76702\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_3+it,\chi)$$

$$\geq\frac{19.09712\log q_t}{0.29+b}-\left(\frac{7.3301}{2}-\frac{7.3301\log 2\pi}{2\log q_t}\right)(\log q_t)$$

$$-(11.76702)(0.2764\log q_t+0.73311)$$

$$\geq\left(\frac{19.09712}{0.29+b}-6.91746\right)(\log q_t)-1.890749. \tag{14}$$

由 (9), (13) 和 (14) 式容易得出

$$\frac{19.09712\log q_t}{0.29+b}-(43.44506+6.91746)\log q_t\leq 0. \tag{15}$$

故有 $b\geq 0.089193$. 由于 $\chi(\mathrm{mod}\,q)$ 是一个原特征，所以只有 $2\nmid q$ 或 $4|q$ 这两种情况. 当 $2|q, 3\nmid q$, 时，由 (7) 式和引理 2 可得

$$f(\sigma_2+t,\chi)\geq(11.200472)\left(1.0823-\frac{\log q_t}{0.339}\right)+(17.4484)(-0.2764\log q_t$$

$$-0.3616)-(0.2764)(11.6884\log 2+4.76\log 3+\log 4)$$

$$\geq -37.8625\log q_t+1.745. \tag{16}$$

由引理 4 可得 $19.09712\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+it,\chi)\geq(19.09712)\left(\frac{\log q_t}{0.339+b}-0.584-0.2764\log q_t\right)\geq\left(\frac{19.09712}{0.339+b}-5.278444\right)(\log q_t)-11.16$. 故由 (9) 和 (16) 式得到 $\left(\frac{19.09712}{0.339+b}-43.14095-\frac{9.415}{\log q_t}\right)(\log q_t)\leq 0$. 即 (12) 式能够成立；当

$2|q, 3\nmid q$ 时，由 (8) 式和引理 2 得

$$\begin{aligned}f(\sigma_3+t,\chi) &\geq (11.200472)\left(1.10691-\frac{\log q_t}{0.29}\right)+(17.4484)(-0.2764\log q_t\\&\quad -0.3616)-(0.2764)(11.6884\log 2+4.76\log 3+\log 4)\\&\geq -43.44506\log q_t+2.02066. \qquad (17)\end{aligned}$$

由引理 4 和文 [1] 中的定理 1 可得

$$\begin{aligned}&7.3301\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_3+it,\chi)+11.76702\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_3+it,\chi)\\&\geq \frac{19.09712\log q_t}{0.29+b}-\left(\frac{7.3301}{2}-\frac{7.3301\log 2\pi}{2\log q_t}\right)(\log q_t)\\&\quad -(11.76702)(0.2764\log q_t+0.58361)\\&\geq \frac{19.09712\log q_t}{0.29+b}-6.91746\log q_t-0.1315. \qquad (18)\end{aligned}$$

由 (9), (17) 和 (18) 式知道此时 (15) 式仍能成立. 当 $3|q, 2\nmid q, \chi^j\neq\chi_0(j=2,3,4)$ 或者当 $6|q, \chi^j\neq\chi_0(j=2,3,4)$ 时，由 (7) 到 (9) 式，引理 2 、引理 4 和 [1] 中的定理 1, 类似地可以证明 (12) 和 (15) 式能够成立，于是本引理得证.

引理 6. 设 χ 是模 q 的原特征，令 $s=\sigma+it, q_t=q(2+|t|)$, 则当 $\chi^j\neq\chi_0(j=2,3), \chi^4=\chi_0$ 时， $L(s,\chi)$ 在区域

$$1-\frac{c_0}{\log q_t}<\sigma\leq 1$$

中没有零点.

证 设 $\rho=\beta+it$ 是 $L(s,\chi)$ 的一个零点，令 $\sigma_2=1+\frac{0.339}{\log q_t}, \beta=1-\frac{b}{\log q_t}, F(\sigma,t,\chi)=\mathrm{Re}\left(5\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)+4\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)\right)$. 则由引理 3 可得

$$F(\sigma_2,t,\chi)+8\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+it,\chi)+\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+3it,\chi^3)\leq 0. \qquad (19)$$

当 $|t|\leq\frac{0.339+b}{2\log q_t}$ 时，注意 $\chi^3=\overline{\chi}$, 使用 (19) 式，类似于引理 5 即可证得本引理. 由 $L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod\limits_{p|q}(1-p^{-s})^{-1}$ 以及 $\frac{d}{ds}(1-p^{-s})^{-1}=$

$-\dfrac{\log p}{(p^s-1)(1-p^{-s})}$ 可得 $L'(s,\chi_0)=\zeta'(s)\prod\limits_{p|q}(1-p^{-s})^{-1}-L(s,\chi_0)\sum\limits_{p|q}\dfrac{\log p}{p^s-1}$,
所以有

$$\frac{L'}{L}(s,\chi_0)=\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^s-1}. \tag{A}$$

令 $s_2=\sigma_2+4it$, 则当 $|t|\geq\frac{1}{5.888}$, $(6,q)=1$ 时由 (A) 式得

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(s_2,\chi_0)\right| &\leq \frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+(4t)^2}+0.2764\log q_t+0.2764\log\frac{2+4|t|}{2+|t|}\\ &\quad +0.0095+\sum_{p|q}\left(\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log p\right)\\ &\leq 0.2764\log q_t+0.2764\log 4+0.0095+c_t^{(1)}.\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$c_t^{(1)}=\begin{cases}0.041+\left(\dfrac14-0.2764\right)\log 5, & \text{当 } |t|\geq\dfrac12 \text{ 时},\\ \dfrac{0.1422}{(4t)^2}+0.2764\log\dfrac{1+2|t|}{4+2|t|} & \\ \qquad +\left(\dfrac14-0.2764\right)\log 5, & \text{当 } \dfrac{1}{5.888}\leq|t|\leq\dfrac12 \text{ 时}.\end{cases}$$

由 $|t|\geq\frac{1}{5.888}$ 容易得出 $c_t^{(1)}\leq 0$, 故由 (20) 式和引理 2 可知 (10) 和 (13) 式仍然成立，于是 (12) 和 (15) 式能够成立. 对于 $|t|\geq\frac{1}{5.888}$, $(6,q)\neq 1$ 的各种情形, 使用类似的办法容易证得 (12) 和 (15) 式能够成立. 当 $\frac{0.339+b}{2\log q_t}\leq |t|\leq\frac{1}{5.888}$, $q\geq 6$, $(q,6)=1$ 时, 由 (A) 式和引理 4 可得

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(s_2,\chi_0)+\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+3it,\chi^3)\\ &\quad\geq(-0.2764)(2\log q_t+\log 3+\log 4)-0.019+c_t^{(2)},\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}c_t^{(2)}&=\frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(4t)^2}-\frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+(4t)^2}\\ &\quad -0.7332+(0.2764)\left(\log\frac{4+2|t|}{1+2|t|}+\log\frac{6+3|t|}{2+3|t|}\right)\\ &\quad +\min\left\{\left(0.2764-\frac16\right)\log 7,\left((2)(0.2764)-\frac14\right)\log 5\right\}.\end{aligned}$$

当 $\frac{0.339+b}{2\log q_t} \le |t| \le \frac{1}{5.888}$ 时，由 $\frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(4t)^2} \ge \frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+(4t)^2}$ 而得

$$c_t^{(2)} \ge 0.2132 - 0.7332 + (0.764)\left\{\log\frac{4+\frac{2}{5.888}}{1+\frac{2}{5.888}} + \log\frac{6+\frac{3}{5.888}}{2+\frac{3}{5.888}}\right\} > 0.$$

故由 (21) 式和引理 2 知道此时 (10) 和 (13) 式成立，所以 (12) 和 (15) 式能成立. 当 $(q,6)=1, q<6$ 时，只可能是 $q=5$, 故由 (A) 式和引理 4 可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(s_2,\chi_0) + \mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_2+3it,\chi^3)\\
&\quad\ge (-0.2764)(2\log q_t + \log 4 + \log 3) - 0.73311\\
&\qquad +(0.2764)\left(\log\frac{4+2|t|}{1+2|t|} + \log\frac{6+3|t|}{2+3|t|}\right) - c_q\\
&\qquad - \sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1} + 0.2764\log q - \frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+(4t)^2} + \frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(4t)^2}\\
&\quad\ge (-0.2764)(2\log q_t + \log 4 + \log 3) - 2d_q + c_t^{(3)},
\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $c_t^{(3)} = (0.2764)\left(\log\frac{4+2|t|}{1+2|t|} + \log\frac{6+3|t|}{2+3|t|}\right) - 0.73311 - c_q + 2d_q - \frac{\log 5}{5^{\sigma_2}-1} + 0.2764\log 5$. 当 $\frac{0.339+b}{2\log q_t} \le |t| \le \frac{1}{5.888}$ 时有 $\sigma_2 \ge 1.14219, \sigma_1 \ge 1.746835$, 于是有

$$c_q \le \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\sum_{\substack{n=1\\(n,5)=1}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1.746835}} - 0.2764\log 2\pi \le -0.150657.$$

由此容易得出 $c_t^{(3)} > 0$. 所以 (12) 和 (15) 式仍能成立. 对于 $\frac{0.339+b}{2\log q_t} \le |t| \le \frac{1}{5.888}$, $(q,6)\ne 1$ 的各种情形，用完全类似的方法容易证明 (12) 和 (15) 式是成立的. 这就完成了本引理的证明.

引理 7. 设 χ 是模 q 的一个原特征，令 $s=\sigma+it, q_t=q(2+|t|)$, 则当 $\chi^2\ne\chi_0, \chi^3=\chi_0$ 时，$L(s,\chi)$ 在区域 $1-\frac{c_0}{\log q_t}<\rho\le 1$ 中没有零点.

证 设 $\rho=\beta+it$ 是 $L(s,\chi)$ 的一个零点，令 $\sigma_2 = 1+\frac{0.339}{\log q_t}, \beta = 1-\frac{b}{\log q_t}$, 则由引理 3 可得

$$17\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2,\chi_0) + 24\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+it,\chi) + 8\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+2it,\chi^2) \le 0.$$

当 $|t| \le \frac{0.339+b}{3\log q_t}$ 时，则由 (7) 式和引理 4 得

$$\begin{aligned}
0 &\ge 17\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_2+\chi_0)+24\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_2+it,\chi)+8\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma_2+2it,\chi^2)\\
&\ge (17)\left(0.5415-\frac{\log q_t}{0.339}\right)+(8)\left(\frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(3t)^2}-0.2764\log q_t\right.\\
&\quad\left.-0.7332-0.2764\log\frac{2+2|t|}{2+|t|}\right)+(24)\left(\frac{\log q_t}{0.339+b}\right.\\
&\quad\left.-0.2764\log q_t-0.7332\right)\\
&\ge \left(\frac{28}{0.339+b}-58.993-\frac{14.33}{\log q_t}\right)(\log q_t)\\
&\ge \left(\frac{28}{0.339+b}-65.22\right)(\log q_t),
\end{aligned}$$

故有 $b \ge 0.09031$. 又由 $\frac{28}{0.339+b} \le 58.993+\frac{14.33}{\log q_t}$ 可知 (12) 式能够成立. 当 $|t| \ge 0.3$ 或者 $\frac{0.339+b}{3\log q_t} \le |t| \le 0.3$ 时，使用与引理 6 完全类似的方法即可得知 (12) 和 (15) 式能够成立，于是本引理得证.

引理 8. 设 χ 是模 q 的一个实原特征，令 $s=\sigma+it, q_t=q(2+|t|)$. 则 $L(s,\chi)$ 在区域 $1-\frac{c_0}{\log q_t}<\sigma\le 1, |t|>0$ 中没有零点.

证 设 $\rho=\beta+it$ 是 $L(s,\chi)$ 的一个零点，$t\ne 0$, 令 $\sigma_2=1+\frac{0.339}{\log q_t}, \sigma_4=1+\frac{0.95}{\log q_t}, \beta=1-\frac{b}{\log q_t}$. 则有

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_4,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{\sigma_4}}\ge-\sum_{\substack{n=2\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_4}}\ge-\frac{\log q_t}{0.95}+e_q. \tag{B}$$

其中

$$e_q=\begin{cases}0.47768, & \text{当 } (6,q)=1 \text{ 时},\\ 0.8886, & \text{当 } 2|q \text{ 时},\\ 0.72896, & \text{当 } 3|q \text{ 时},\\ 1.2448, & \text{当 } 6|q \text{ 时}.\end{cases}$$

由于 $\chi(\bmod q)$ 是一个实特征，故由 $L(\rho,\chi)=0$ 可得 $L(\overline{\rho},\chi)=0$, 其中 $\overline{\rho}=\beta-it$. 当 $|t|\le\frac{0.95+b}{4\log q_t}$ 时，使用证明引理 4 的方法由 [1] 中的定理 2

可得

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_4,\chi)\le 0.2764\log q_t+c_q-\frac{2(\sigma_4-\beta)}{(\sigma_4-\beta)^2+t^2}+(2)(0.72361)$$
$$\le 0.2764\log q_t-\frac{2}{1+(0.5)^4}\cdot\frac{\log q_t}{0.95+b}+c_q+(2)(0.72361). \tag{23}$$

由 (23) 和 (B) 式得

$$\frac{1.88235\log q_t}{0.95+b}\le\frac{\log q_t}{0.95}+0.2764\log q_t+c_q+(2)(0.72361)-e_q$$
$$\le 1.754224\log q_t,$$

故有 $b\ge 0.123>c_0$. 当 $|t|\ge 0.92,(6,q)=1$ 时，则由 (A) 式可得

$$\left|\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+2it,\chi_0)\right|\le\frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+4t^2}+0.2764\log q_t$$
$$+0.2764\log\frac{2+2|t|}{2+|t|}+0.0095+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log q$$
$$\le 0.2764\log q_t+0.2764\log 2+0.0095, \tag{24}$$

以及

$$\left|\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+4it,\chi_0)\right|\le\frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+4t^2}+0.2764\log q_t+0.2764\log 4$$
$$+0.0095+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log q$$
$$\le 0.2764\log q_t+0.2764\log 4+0.0095. \tag{25}$$

由 (24), (25) 式和引理 2 知道 (10) 和 (13) 式能够成立，故 (12) 和 (15) 式此时仍然成立. 对于 $|t|\ge 0.92,(6,q)\ne 1$ 时的各种情况，使用同样的方法即可得知 (12) 和 (15) 式能够成立. 当 $b=0.11$ 时本引理明显成立，所以我们可以假定 $b\le 0.11$, 这样就有 $\frac{0.95+b}{4\log q_t}\ge\frac{0.339+b}{2\log q_t}$. 当 $\frac{0.95+b}{4\log q_t}\le|t|\le 0.92$ 时，由文 [1] 中的定理 2 可得

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+it,\chi)\le 0.2764\log q_t+c_q-\frac{1}{\sigma_2-\beta}+(2)(0.72361)$$
$$-\frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(2t)^2}. \tag{26}$$

由 (A) 式可得

$$
\begin{aligned}
&0.72361-\frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(2t)^2}+\left|\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+2it,\chi_0)\right| \\
&\le 0.72361-\frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(2t)^2}+0.0095+\frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+(2t)^2} \\
&\quad +0.2764\log q_t+0.2764\log\frac{2+2|t|}{2+|t|}+\sum_{p|q}\frac{\log q}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log q \\
&\le 0.2764\log q_t+0.2764\log 2+d_q+c_t^{(4)}, \qquad (27)
\end{aligned}
$$

其中 $c_t^{(4)}=0.73311-d_q-0.2764\log\frac{2+|t|}{1+|t|}+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log q$. 由 (A) 式，引理 4 和 $\chi^2=\chi_0$ 得

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+3it,\chi)-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_2+4it,\chi_0) \\
&\le 0.2764\log q_t+c_q+0.72361+\frac{\sigma_2-1}{(\sigma_2-1)^2+(4t)^2} \\
&\quad -\frac{\sigma_2-\beta}{(\sigma_2-\beta)^2+(4t)^2}+0.2764\log\frac{2+3|t|}{2+|t|}+0.2764\log q_t \\
&\quad +0.0095+0.2764\log\frac{2+4|t|}{2+|t|}+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log q \\
&\le (0.2764)(2\log q_t+\log 3+\log 4)+2d_q+c_t^{(5)}, \qquad (28)
\end{aligned}
$$

其中 $c_t^{(5)}=c_q-2d_q+0.73311-0.2764\log\frac{6+3|t|}{2+3|t|}-0.2764\log\frac{4+2|t|}{1+2|t|}+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log q$. 由 $|t|>0.92$ 容易得到

$$
c_t^{(4)}+c_t^{(5)}\le c_q-3d_q+0.9825+(2)\left(\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{\sigma_2}-1}-0.2764\log q\right). \qquad (29)
$$

通过简单的讨论，由 (29) 式容易证得 $c_t^{(4)}+c_t^{(5)}\le 0$. 故由 (26) 到 (28) 式、引理 2 和引理 4 知道 (10) 和 (23) 式能够成立，进而知 (12) 和 (15) 式成立. 这样我们就完成了本引理的证明.

由引理 5 到引理 8 立得本文定理的证明.

参考文献

[1] 陈景润. 曲阜师范大学学报 (自然科学版), 1986, **3**(2)

[2] 潘承彪译. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1984

[3] Titchmarsh E C. The theory of the Riemann-zeta function. Oxford, 1951

[4] Davenport H. Multiplicative Number Theory. Chicago: Markham, 1967

[5] Rosser J B, Schoenfeld L. *Mathematics of Computation*, 1975, **29**: 243 ~ 269

[6] Kevin S M. *Journal of Number Theory*, 1984, **19**: 7 ~ 32

[7] 陈景润, 王天泽. 数学学报, 1989, **32**(5): 702 ~ 718

算术级数中的最小素数和与 Dirichlet L- 函数零点有关的定理 (V)†

1. 引　言

设 D 为一个大正整数，$(K,D)=1$, $P(D,K)$ 表示最小的素数 $p\equiv K(\bmod D)$. 1934 年, S. Chowla 猜测: $P(D,K)\ll D^{1+\epsilon}$. 三年后, P. Turan 在广义黎曼假设下证明了：Chowla 的猜想对几乎所有的模 D 成立. 另一方面, Erdös 于 1949 年得到了：一. 存在一常数 $C_2=C_2(C_1)$ 及无穷多整数 D, 对至少 $C_2\varphi(D)$ 个 K 的值有 $P(D,K)>(1+C_1)\varphi(D)\log D$; 二：存在一常数 $C_4=C_4(C_3)$, 使得对 $C_4\varphi(D)$ 个 K 的值有 $P(D,K)\le C_3\varphi(D)\log D$.

1944 年，Linnik 做出了一非常重要的工作. 他证明了 $P(D,K)\ll D^C$, C 是一绝对常数. 后来，Rodosskii 于 1954 年简化了 Linnik 的证明.

下表列出了 $P(D,K)$ 上界的历史纪录：

潘承洞 [1] (1958), $C=5448$;

陈景润 [2] (1964), $C=770$;

M. Jutila [3-4] (1970), $C=630,550$;

陈景润 [5] (1977), $C=168$;

M. Jutila [6] (1977), $C=80$;

S. Graham [7] (1977), $C=36$;

陈景润 [9] (1979), $C=17$;

S. Graham [8] (1981), $C=20$;

王炜 [10] (1986), $C=16$;

陈景润，刘健民 [11] (1989), $C=13.5$.

本文我们得到了 $C=11.5$.

2. 一 些 引 理

引理 1　设 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}+i\gamma_j\,(j=1,2)$ 是 $L(s,\chi_1)$ 的零点，其中

† 原载 International Symposium in Memory of Hua Loo Keng, Vol.1, 19 - 42, Science Press and Springer - Verlag, 1991.

$\chi_1 \bmod D$ 是非主特征， $0.6 \le \beta_j \le 0.9, |\gamma_1-\gamma_2| \le \frac{1}{\log D}$. 对于 $k=3,4$, 令 $\rho_k = 1-\frac{\beta_k}{\log D}+iv_k$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 为复特征， $0.6 \le \beta_k \le 0.9, |\gamma_2-\gamma_4| \le \frac{1}{\log D}$. 如果 $\chi_1 \ne \chi_1$, $\chi_1 \ne \bar{\chi}$, 则 $\max_{1\le j\le 4}\beta_j \ge 0.89$.

证 设 $\sigma = 1+\frac{a}{\log D}$, a 待定.

定义

$$
\begin{aligned}
S(\chi_1,\chi,\chi;\rho_1,\rho_3,\rho_4) = &-\mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)+\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_1,\chi_1)\right.\\
&+\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_3,\chi)+\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_4,\chi)+\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_1+i\gamma_3,\chi_1\chi)\\
&\left.+\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_1+i\gamma_4,\chi_1\chi)+\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma_3+i\gamma_4,\chi^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
0 \le\ & S(\chi_1,\chi,\chi;\rho_1,\rho_3,\rho_4)+S(\chi_1,\chi,\bar{\chi};\rho_1,\rho_3,\bar{\rho}_4)\\
&+S(\chi_1,\bar{\chi},\chi;\rho_1,\bar{\rho}_3,\rho_4)+S(\chi_1,\bar{\chi},\bar{\chi};\rho_1,\bar{\rho}_3,\bar{\rho}_4).
\end{aligned}
$$

由 [11] 中引理 1 的方法. 此即完成证明.

引理 2 对于 $j=1,2$ 令 $\rho_j = 1-\frac{\beta_j}{\log D}+i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 为复特征， $0.6 \le \beta_j \le 0.9$, $|\gamma_1-\gamma_2| \le \frac{1}{\log D}$. 对于 $k=3,4$ 令 $\rho_k = 1-\frac{\beta_k}{\log D}+i\gamma_k$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 为复特征， $0.6 \le \beta_k \le 0.9$, $|\gamma_3-\gamma_4| \le \frac{1}{\log D}$. 若 $\bar{\rho}_1 \ne \rho_3$, $\bar{\rho}_1 \ne \rho_4$, $\bar{\rho}_2 \ne \rho_3$, $\bar{\rho}_2 \ne \rho_4$, 则 $\max_{1\le j\le 4}\beta_j \ge 0.89$.

证 用 [11] 中引理 2 的方法.

引理 3 对于 $j=1,2,3,4$, 设 $\rho_j = 1-\frac{\beta_j}{\log D}+i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 为复特征, $0.6 \le \beta_j \le 0.9$, $|\gamma_j| \le 1$, $|\gamma_1-\gamma_2| \le \frac{1}{\log D}$, $|\gamma_3-\gamma_4| \le \frac{1}{\log D}$. 则 $\max_{1\le j\le 4}\beta_j \ge 0.89$.

证 用 [11] 中引理 2 的方法.

引理 4 设 $\rho_1 = 1-\frac{\beta_1}{\log D}+i\gamma_1$ 是 $L(s,\chi_1)$ 的零点， $\chi_1 \bmod D$ 是非主实特征， $0.6 \le \beta_1 \le 0.9$, $0 < |\gamma_1| \le \frac{0.5}{\log D}$. 设 $\rho_2 = 1-\frac{\beta_2}{\log D}+i\gamma_2$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是非主实特征， $0.6 \le \beta_2 \le 0.9$, $0 < |\gamma_2| \le \frac{0.5}{\log D}$. 如果 $\chi \ne \chi_1$, 则 $\max_{1\le j\le 2}\beta_j \ge 0.89$.

证 用 [11] 中引理 5 的方法.

引理 5 对于 $j=1,2$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}+i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点, $\chi \bmod D$ 是非主实特征, $j=1,2.0.6\le\beta_j\le0.9$, $0<|\gamma_j|\le\frac{0.5}{\log D}$. 若 $\bar\rho_1\ne\rho_2$, 则 $\max_{j=1,2}\beta_j\ge0.89$.

证 用 [11] 中引理 5 的方法.

引理 6 对于 $j=1,2$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}$ 是 $L(s,\chi_1)$ 的零点, $\chi_1 \bmod D$ 是非主实特征, $0\le\beta_j\le0.9$; $\rho_3=1-\frac{\rho_3}{\log D}+i\gamma_3$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点, 其中 $\chi \bmod D$ 是一非主实特征, $0.6\le\beta_3\le0.9$, $0<|\gamma_3|\le\frac{0.5}{\log D}$. 若 $\chi\ne\chi_1$, 则 $\max_{j=1,2,3}\beta_j\ge0.89$.

证 见 [11] 引理 5 中的方法.

引理 7 对于 $j=1,2$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点, 其中 $\chi \bmod D$ 为主实特征, $0<\beta_j\le0.9$; $\rho_3=1-\frac{\beta_3}{\log D}+i\gamma_3$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点, 其中 $\chi \bmod D$ 是非主实特征, $0.6\le\beta_3\le0.9$, $0<|\gamma_3|\le\frac{0.5}{\log D}$. 则 $\max_{j=1,2,3}\beta_j\ge0.89$.

证 见 [11] 引理 5 中的方法.

引理 8 对于 $j=1,2$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点, $\chi \bmod D$ 是非主实特征, $0.6\le\beta_j\le0.9$. 对于 $k=3,4$, 令 $\rho_k=1-\frac{\beta_k}{\log D}$ 是 $L(s,\chi_1)$ 的零点, 其中 $\chi_1 \bmod D$ 是非主实特征, $0\le\beta_k\le0.9$. 则 $\max_{1\le j\le4}\beta_j\ge0.89$.

证 设 $\sigma=1+\frac{a}{\log D}$, 其中 a 待定. 若 $\chi\ne\chi_1$, 则

$$0\le\frac{1}{a}-\frac{4}{a+\beta_4}+0.27641(3).$$

若 $\chi=\chi_1$, 则

$$0\le\frac{1}{a}-\frac{4}{a+\beta_4}+0.27641.$$

取 $a=1$, 这就完成了证明.

引理 9 设 $\rho_1=1-\frac{\beta_1}{\log D}+i\gamma_1$ 是 $L(s,\chi_1)$ 的零点, 其中 χ_1 是一个模 D 的非主特征, $0.1\le\beta_1\le0.73$, $|\gamma_1|\le1$. 对于 $j=2,3$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}+i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点, 其中 $\chi \bmod D$ 是一复特征, $0.1\le\beta_j\le0.73$, $|\gamma_j|\le1$, $|\gamma_2-\gamma_3|\le\frac{1.194}{\log D}$. 若 $\chi_1\ne\chi$, $\chi_1\chi\ne\chi_0$, 则

$$\max_{1\le j\le3}\beta_j\ge\min\left(0.65,\frac{2}{2.42813-\frac{1}{0.73+\beta_1}}-0.73\right).$$

证 由 [11] 中引理 1 的方法. 得

$$0 \le \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\beta_1} - \frac{2}{a+\beta_2} + 0.27641(6.5) - \frac{0.5(a+\beta_1)}{(a+\beta_1)^2+d_1^2} - \frac{a+\beta_2}{(a+\beta_2)^2+d_1^2} - \frac{0.5a(a^2-\beta_3^2)}{(a^2+d_1^2)((a+\beta_3)^2+d_1^2)} - \frac{d_1^2}{(a^2+d_1^2)} - \frac{(0.5a+\beta_3)}{((a+\beta_3)^2+d_1^2)}, \tag{2.1}$$

其中 a 待定， $d_1 = (\gamma_3 - \gamma_2)\log D, \beta_3 \le a$.

假定 $\beta_3 \le 0.65$, 在 (2.1) 中取 $a = 0.73$.

若 $|d_1| \le 0.65$, 我们有

$$0 \le 3.14841 - \frac{1}{0.73+\beta_1} - \frac{2}{0.73+\beta_3} - \frac{0.5(0.73+\beta_1)}{(0.73+\beta_1)^2+0.4225} - \frac{0.73+\beta_2}{(0.73+\beta_2)^2+0.4225}. \tag{2.2}$$

定义 $A(\chi) = -\frac{0.73+\chi}{(0.73+\chi)^2+0.4225}$, 则 $A(\chi) \le A(0.65)$(对$0.1 \le \chi \le 0.65$), 由 (2.2) 式有:

$$0 \le 2.25882 - \frac{1}{0.73+\beta_1} - \frac{2}{0.73+\beta_3}. \tag{2.3}$$

若 $0.65 \le |d_1| \le 0.9$, 则有

$$0 \le 3.16653 - \frac{1}{0.73+\beta_1} - \frac{2}{0.73+\beta_3} - \frac{0.5(0.73+\beta_1)}{(0.73+\beta_1)^2+0.81} - \frac{0.73+\beta_2}{(0.73+\beta_2)^2+0.81} - \frac{0.365((0.73)^2-0.4225)}{((0.73)^2+0.81)((0.73+0.65)^2+0.81)} - \frac{(0.65)^2}{((0.73)^2+(0.65)^2)}\frac{0.365+\beta_3}{((0.73+\beta_3)^2+0.81)} \tag{2.4}$$

定义 $A_1(\chi) = -\frac{0.365+\chi}{(0.73+\chi)^2+0.81}$ $(0.1 \le \chi \le 0.65)$, 我们得到 $A_1(\chi) \le \max(A_1(0.1), A_1(0.65))$.

定义 $B(\chi) = -\frac{0.73+\chi}{(0.73+\chi)^2+0.81}$ $(0.1 \le \chi \le 0.65)$, 则有

$$B(\chi) \le \max(B(0.1), B(0.65)).$$

于是有

$$0 \le 2.25573 - \frac{1}{0.73+\beta_1} - \frac{2}{0.73+\beta_3}. \tag{2.5}$$

仿上面的方法，可证明：若 $0.9 \le |d_1| \le 0.97$, $0.97 \le |d_1| \le 1$, 或者 $1 \le |d_1| \le 1.194$, 则

$$0 \le 2.42813 - \frac{1}{0.73+\beta_1} - \frac{2}{0.73+\beta_3}. \tag{2.6}$$

结合 (2.3)–(2.6) 即完成证明.

引理 10 设 $\rho_1 = 1 - \frac{\beta_1}{\log D} + i\gamma_1$ 是 $L(s,\bar{\chi})$ 的零点， $\chi \bmod D$ 是复特征， $|\gamma_1| \le 1$. 对于 $j = 2,3$, 令 $\rho_j = 1 - \frac{\beta_j}{\log D} + i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是复特征， $|\gamma_j| = 1$, $0.1 \le \beta_j \le 0.73$, $|\gamma_2 - \gamma_3| \le \frac{1.194}{\log D}$. 若 $\rho_1 \ne \bar{\rho_2}$, $\rho_1 \ne \bar{\rho_3}$, 则

$$\max_{1\le j\le 3} \beta_j \ge \min\left(0.65, \frac{2}{2.42813 - \frac{1}{0.73+\beta_1}} - 0.73\right).$$

证 用 [11] 中引理 2 的方法.

引理 11 对于 $j = 1,2,3$, 令 $\rho_j = 1 - \frac{\beta_j}{\log D} + i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是复特征， $|\gamma_j| \le 1$, $0.1 \le \beta_j \le 0.73$, $|\gamma_2 - \gamma_3| \le \frac{1.194}{\log D}$. 若 $\rho_1 \ne \rho_2, \rho_1 \ne \rho_3$, 则

$$\max_{1\le j\le 3} \beta_j \ge \min\left(0.65, \frac{2}{2.42813 - \frac{1}{0.73+\beta_1}} - 0.73\right).$$

证 见 [11] 中引理 3 中应用的方法.

引理 12 设 $\rho_1 = 1 - \frac{\beta_1}{\log D} + i\gamma_1$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi_1 \bmod D$ 是非主特征， $|\gamma_1| \le 1$, $0.1 \le \beta_1 \le 0.73$, 并设 $\rho_2 = 1 - \frac{\beta_2}{\log D} + i\gamma_2$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是非主实特征， $0.1 \le \beta_2 \le 0.73$, $0 < |\gamma_2| \le \frac{0.597}{\log D}$. 若 $\chi_1 \ne \chi$, 则

$$\max_{j=1,2} \beta_j \ge \min\left(0.65, \frac{1.73}{2.24 - \frac{1.248225}{0.856+\beta_1}} - 0.856\right).$$

证 应用 [11] 中引理 5 的方法.

引理 13 对于 $j = 1,2$, 令 $\rho_j = 1 - \frac{\beta_j}{\log D} + i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是非主特征， $|\gamma_j| \le 1$, $0.1 \le \beta_j \le 0.73$, $0 < |\gamma_2| \le \frac{0.597}{\log D}$. 若 $\tilde{\rho_1} \ne \rho_2$, 则

$$\max_{j=1,2} \beta_j \ge \min\left(0.65, \frac{1.73}{2.24 - \frac{1.248225}{0.856+\beta_1}} - 0.856\right).$$

证 用 [11] 中引理 6 的方法.

引理 14 对于 $j=2,3$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是非实特征， $0.1\le\beta_j\le1$. 设 $\rho_1=1-\frac{\beta_1}{\log D}+i\gamma_1$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi_1 \bmod D$ 是一非主特征， $0.1\le\beta_1\le1$, $|\gamma_1|\le1$. 若 $\chi_1\chi\ne\chi$, $\chi_1\ne\chi$, 则

$$\max_{1\le j\le3}\beta_j\ge\max\left(0.646,\frac{2}{1.941-\frac{1}{0.9+\beta_1}}-0.9\right).$$

证 用 [9] 中引理 10 的结果，我们有:

$$0\le0.82921+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\beta_1}-\frac{2}{a+\beta_2},$$

若 $a=0.9$, 则 $\max_{1\le j\le3}\beta_j\ge\frac{2}{1.941-\frac{1}{0.9+\beta_1}}$, 并且 ≥0.646. 此即完成证明.

引理 15 设 $\rho_1=1-\frac{\beta_1}{\log D}+i\gamma_1$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，对于 $j=2,3$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是一非主特征， $0.1\le\beta_1\le1$, $|\gamma_1|\le1$, $0.1\le\beta_j\le1$. 则

$$\max_{1\le j\le3}\beta_j\ge\max\left(0.646,\frac{2}{1.941-\frac{1}{0.9+\beta_1}}-0.9\right).$$

证 用 [9] 中引理 12 的证明，我们得到

$$0\le0.55281+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\beta_1}-\frac{2}{a+\beta_2},$$

其中 $\beta_3\le a$. 取 $a=0.9$ 即得证.

引理 16 对于 $j=1,2$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}+i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi_j)$ 的零点，其中 $\chi_j \bmod D$ 是非主特征， $|\gamma_j|\le1$. 假定 $\beta_2\ge\beta_1$, 则

a) 若 $\chi_1\ne\bar{\chi}_2$, $\chi_1\ne\chi_2$, $\chi_1^2\ne\chi_0$, 则

$$\beta_2\ge\min\left(\frac{0.1849}{\beta_1},\max\left(0.23469,\frac{1.2569}{4.51-\frac{1.74}{0.43+\beta_1}}-0.43\right)\right).$$

b) 若 $\chi_1\ne\bar{\chi}_2$, $\chi_1\ne\chi_2$, $\chi_1^2=\chi_0,\gamma_1\ne0$, 则

$$\beta_2\ge\min\left(\frac{0.2209}{\beta_1},\max\left(0.258,\frac{1.6}{3.76331-\frac{1.14}{0.47+\beta_1}}-0.47\right)\right).$$

c) 若 $\chi_1 \neq \bar{\chi_2}$, $\chi_1 \neq \chi_2$, $\chi_2^2 = \chi_0$, $\gamma_2 \neq 0$, 则

$$\beta_2 \geq \min\left(\frac{0.2209}{\beta_1}, \max\left(0.258, \frac{1.14}{3.76331 - \frac{1.6}{0.47+\beta_1}} - 0.47\right)\right).$$

d) 若 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\chi_1^2 = \chi_2^2 = \chi_0$, $\chi_1 \neq \chi_2$, 则

$$\beta_2 \geq 0.6666 \log \frac{2}{3\beta_1}.$$

证 由 [12] 中引理 4 的证明，可得：对于 $\beta_1\beta_2 \leq (0.43)^2$, 有

$$\beta_2 \geq \max\left(0.23469, \frac{1.2569}{4.51 - \frac{1.74}{0.43+\beta_1}} - 0.43\right).$$

若 $\beta_1\beta_2 \geq (0.43)^2$, 则 $\beta_2 \geq \frac{0.1849}{\beta_1}$. 此即得到 a).

类似地我们可以证明 b), c).

用 [8] 中引理 4 的结果，即可得 d).

引理 17 设 $\rho = 1 - \frac{\beta}{\log D} + i\frac{t}{\log D}$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，其中 $\chi \bmod D$ 是一非主实特征， $t \neq 0$, 则： $\beta \geq 0.158798$.

证 由 [13] 中引理 3 的结果，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Big(&11.200472\,\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) + 19.09712\,\frac{L'}{L}\left(\sigma + i\,\frac{t}{\log D}, \chi\right)\\ &+ 11.6884\,\frac{L'}{L}\left(\sigma + 2i\,\frac{t}{\log D}, \chi^2\right) + 4.76\,\frac{L'}{L}\left(\sigma + 3i\,\frac{t}{\log D}, \chi^3\right)\\ &+ \frac{L'}{L}\left(\sigma + 4i\,\frac{t}{\log D}, \chi^4\right)\Big) \leq 0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

现取 $\sigma = 1 + \frac{a}{\log D}$, $a = 0.52$.

由 (2.7) 和 [9] 中引理 1 及 11 的结果，此即：

$$\begin{aligned}0 \leq\ &\frac{11.200472}{a} - \frac{19.09712}{a+\beta} + 0.27641(19.09712 + 4.76) + \frac{11.6884a}{a^2 + (2t)^2}\\ &- \frac{19.09712(a+\beta)}{(a+\beta)^2 + (2t)^2} - \frac{4.76(a+\beta)}{(a+\beta)^2 + (2t)^2} + \frac{a}{a^2 + (4t)^2} - \frac{4.76(a+\beta)}{(a+\beta)^2 + (4t)^2}\\ \leq\ &28.133372 - \frac{19.09712}{0.52+\beta}.\end{aligned}$$

于是引理得证.

引理 18 对于 $j=1,2,\ldots,N$, 令 $\rho_j=1-\frac{\beta_j}{\log D}+i\gamma_j$ 是 $L(s,\chi_j)$ 的零点，其中 $\chi_j \bmod D$ 是非主特征， $\beta_j\ge\beta_{j-1}$, $\beta_0=0$, $|\gamma_j|\le 1$. 则：

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j a}{a+\beta_j}\le 0.27641a+\sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2(1-0.27641a)+0.27641a},$$

其中 $\lambda_j>0$ 与 a 待定，将选取使满足 $\sum_{j=1}^{N}\lambda_j=N$, $0.36\le a\le 0.45$.

证 由 [9] 中引理 1 的结果和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)}{n^{\sigma}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\right|^2 &\le \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\wedge(m)\chi_0(m)}{m^{\sigma}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)}{n^{\sigma}}\\ &\cdot\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\right|^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\wedge(m)\chi_0(m)}{m^{\sigma}}\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)}{n^{\sigma}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\\ &\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_{j},\bar{\chi_{j}},(n)}{n^{-i\gamma_j}}\le\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2}{(\sigma-1)^2}+\epsilon\log^2 D+\frac{(1+\epsilon)}{\sigma-1}\sum_{j\ne j'}\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)}{n^{\sigma}}\\ &\cdot\frac{\lambda_j\lambda_{j'}\chi_j(n)\bar{\chi_{j'}}(n)}{n^{i\gamma_j-i\gamma_{j'}}}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中 $\sigma=1+\frac{a}{\log D}$.

首先我们观察数对 (j,j'), $j\ne j'$, 它们使 $\chi_j\bar{\chi}_{j'}=\chi_0$, $|\gamma_j-\gamma_{j'}|\ge\frac{1.194}{\log D}$. 由 [9] 中引理 1, 有:

$$\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)\chi_0(n)}{n^{\sigma+i(\gamma_j-\gamma_{j'})}}\le\frac{(1+\epsilon)(\sigma-1)}{(\sigma-1)^2+(\gamma_j-\gamma_{j'})^2}\le 0.27641\log D,$$

其中 $0.36\le a\le 0.45$.

现在我们看数偶 (j,j'), $j\ne j'$, 它们使 $\chi_j\bar{\chi}_{j'}=x_p.\,|\gamma_j-\gamma_{j'}|\le\frac{1.194}{\log D}$, 由引理 9 - 引理 15 知这对证明 $C=11.5$ 是有用的 (见第四部分).

若 $\chi_j\bar{\chi}_{j'}\ne\chi_0$, $j\ne j'$, 由 [9] 中引理 1, 有

$$\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)\chi_j(n)\bar{\chi}_{j'}(n)}{n^{i\gamma_j-i\gamma_{j'}}}\le 0.27641\log D.$$

因此

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)}{n^{\sigma}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\right|^2\le\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2}{(\sigma-2)^2}+\frac{\sum_{j\ne j'}\lambda_j\lambda_{j'}}{\sigma-1}(0.27641)\log D,$$

即:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\wedge(n)}{n^{\sigma}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\right|\le\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2}{a^2}+\frac{\sum_{j\ne j'}\lambda_j\lambda_{j'}}{a}(0.27641)(\log D)}.$$

由 [9] 中引理 1, 得:

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi)\le 0.27641\log D-\sum_{\rho_k}\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_k},$$

即

$$\sum_{\rho_k}\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_k}\le 0.27641\log D+\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(s,\chi).$$

因此:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j}{a+\beta_j}\le 0.27641N+\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2}{a^2}+\frac{N^2-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2}{a}(0.27641)}.$$

由此即得引理.

引理 19 在引理 18 的假设下, 若 $\gamma_1\ne 0$, 则

$$\beta_N\ge(N-2B)\cdot\left(0.27641N+\frac{1}{a}\sqrt{\left(2B^2+\frac{(N-2B)^2}{N-2}\right)(1-0.27641a)+0.27641aN^2}-\frac{2B}{a+\beta_1}\right)^{-1}-a$$

这里 $a>0$, $B>0$ 待定.

证 由引理 17, 取 $\lambda_1=\lambda_2=B$, $\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_N=\frac{N-2B}{N-2}$. 则:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2=\frac{1}{N^2}\left(2B^2+(N-2)\left(\frac{N-2B}{N-2}\right)^2\right)=\frac{1}{N^2}\left(2B^2+\frac{(N-2B)^2}{N-2}\right).$$

因此

$$\frac{a}{N}\left(\frac{2B}{a+\beta_1}+\frac{N-2B}{a+\beta_N}\right)\le 0.27641a+\sqrt{\frac{1}{N^2}\left(2B^2+\frac{(N-2B)^2}{N-2}\right)(1-0.27641a)+0.27641a}.$$

此即完成证明.

类似地，我们有：

引理 20 在引理 18 的假设下，若 $\chi_1 \bmod D$ 是一复特征，则

$$\beta_N \geq (N-2B) \cdot\left(0.27641N + \frac{1}{a}\sqrt{\left(2B^2+\frac{(N-2B)^2}{N-2}\right)(1-0.27641a)+0.27641aN^2} - \frac{2B}{a+\beta_1}\right)^{-1} - a$$

其中 $a>0$, $B>0$ 待定.

引理 21 $\Pi_{\chi \bmod D} L(s,\chi)$ 至多有四个零点满足条件:

$$1-\frac{0.2769}{\log D} < \beta < 1, \quad |\gamma| \leq 1.$$

对于 $j=1,2$, 若 $\Pi_{\chi \bmod D} L(s,\chi)$ 有零点 $\rho_j=\beta_j+i\gamma_j$, 其中 $1-\frac{0.27}{\log D} < B_j < 1$, $|\gamma_j| \leq 1$, 则 $\Pi_{\chi \bmod D} L(s,\chi)$ 至多有四个零点满足下面条件:

$$1-\frac{\beta_3}{\log D} \leq \sigma < 1, \quad |t| \leq 1. \tag{2.9}$$

其中

$$\beta_3 \geq \max\left\{\left(4.5778-\frac{1}{0.37837+\beta_1}-\frac{1}{0.37837+\beta_2}\right)^{-1} - 0.37837, \frac{2}{4.5778-\frac{1}{0.37837+\beta_1}} - 0.37837\right\}.$$

证 见 [11] 引理 13 及 [9] 引理 13.

若 $0.1 \leq \lambda \leq 0.6$, 记 $\alpha = 1-\frac{\lambda}{\log D}$, 考虑区域:

$$\alpha \leq s < 1, \quad |t| \leq 1. \tag{2.10}$$

假定 $S(\lambda)=\{\chi : L(s,\chi)$在 (2.10) 中，至少存在一个零点$\}$. 设 ρ_χ 是 $L(s,\chi)$ 在 (2.10) 中的零点， $\chi \neq \chi_0$.

令 $H(w)=\frac{e^{4.75w\log D}(e^{w\log D}-1)}{w\log D}$, 其中 $w=\frac{-\lambda_1+i\tau}{\log D}$, $\lambda_1>0$.

设

$$c_1=\begin{cases} 0, & \lambda \leq 0.545, \\ 2.061, & \lambda > 0.545. \end{cases}$$

引理 22 若 $0.1 \le \lambda \le 0.6$, 则我们有

$$\sum_{\chi \in s(\lambda)} \sum_{\rho_\chi} |H^2(\rho_\chi - 1)| D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_\chi)} \le 3.642 C(\lambda) e^{4.56006\lambda} + C_1.$$

$$C(\lambda) = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{(e^{3.19004\lambda} - e^{1.99002\lambda})}{1.20002\lambda} e^{-4.56006\lambda}\right).$$

证 用 [11] 定理 2 中的方法.

3. 关于 L- 函数零点的一些结果

对于 $j = 1, 2$, 令 $\rho_j = 1 - \frac{\beta_j}{\log D} + i\frac{\gamma_j}{\log D}$ 是 $L(s, \chi)$ 的零点, 其中 $\chi \bmod D$ 是任一非主特征, $|\gamma_j| \le \epsilon \log D$. 记 $\Delta_{1,2} = |\gamma_1 - \gamma_2|$. 根据 [11] 中引理 17 的方法, 我们有:

引理 23 设 $0 \le \beta_j \le 0.89$. 则

$$\sum_{j=1}^{2} |H^2(\rho_j - 1)| D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_j)} \le \sum_{j=1}^{2} \frac{2.8457855 - 2\cos\gamma_j}{\gamma_j^2 + 0.7921}.$$

定义 $K(x) = \frac{(C_3 - 2\cos x)}{x^2 + 0.7921}$, $C_3 = 2.8457855$, $x \ge 0$. 设 $u = 0.7921$, 我们有:

$$K'(x) = 2\frac{(x^2+u)\sin x - x(C_3 - 2\cos x)}{(x^2+u)^2},$$

$$K''(x) = \frac{2(x^2+u)((x^2+u)\cos x - 4x\sin x) + (C_3 - 2\cos x)(3x^2 - u)}{(x^2+u)^3}.$$

经计算得: $0 \le x \le 2.35$ 时 $K''(x) \le 0$.

若 $0 \le x \le 2.35$, 则 $K'(x) \le K'(0) = 0$. 故 $K(x)$ 是 x 的单调递减函数. 因 $K''(x) \le 0$, 故对 $x_1, x_2 \in [-2.35, 2.35]$ 有 $\frac{1}{2}(K(x_1) + K(x_2)) \le K(\frac{|x_1|+|x_2|}{2})$.

引理 24

$$\sum_{j=1}^{2} |H^2(\rho_j - 1)| D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_j)} \le \begin{cases} 2K\left(\frac{|\gamma_1|+|\gamma_2|}{2}\right), & -2.35 \le \gamma_1, \gamma_2 \le 2.35, \\ 1.783, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

证 见 [11] 引理 18 中的证明方法.

引理 25 设 $\chi \bmod D$ 是一非主特征， $S(\chi)$ 表示由所有满足下面条件的 $\rho = \beta + i\gamma$ 组成的一个集合：

$$L(\rho, \chi) = 0, \quad 1 - \frac{0.89}{\log D} \le \beta \le 1 - \frac{0.6}{\log D}, \quad |\gamma| \le 1.$$

则我们有：

$$\sum_{\rho_x \in S(\chi)} |H^2(\rho_\chi - 1)| D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_\chi)} \le 2.6851.$$

证 见 [11] 引理 20 中的证明方法.

引理 26 假定 χ, χ_1 是两个模 D 的非主特征， $\chi \ne \chi_1, \chi \ne \bar{\chi}_1$. 设 $S_1(\chi), S_1(\chi_1)$ 分别表示由满足下面条件的所有 ρ_χ, ρ_{χ_1} 组成的集合：

$$L(\rho_\chi, \chi) = 0, \quad 1 - \frac{1.5}{\log D} \le \mathrm{Re}\rho_\chi < 1 - \frac{0.89}{\log D}, \quad |\mathrm{Im}\rho_\chi| \le 1,$$

$$L(\rho_{\chi_1}, \chi) = 0, \quad 1 - \frac{1.5}{\log D} \le \mathrm{Re}\rho_{\chi_1} < 1 - \frac{0.89}{\log D}, \quad |\mathrm{Im}\rho_{\chi_1}| \le 1.$$

则

$$\sum_{\rho_\chi \in S_1(\chi)} |H(\rho_\chi - 1)|^2 D^{9.5\mathrm{Re}(1-\rho_\chi)} + \sum_{\rho_\chi \in S_1(\chi)} |H(\rho_{\chi_1} - 1)|^2 D^{9.5\mathrm{Re}(1-\rho_{\chi_1})} \le 2.24284.$$

证 见 [11] 引理 21 中的证明方法.

对 $0.6 \le \lambda \le 0.89$, 我们用下面的记号： $z_1 = D^{0.815}$, $z_2 = D^{1.155}$, $z_3 = D^{1.75}$, $z_4 = D^{0.2199}$. 设 $\alpha = 1 - \frac{\lambda}{\log D}$. 考虑：

$$\alpha \le \sigma \le 1, \quad |t| \le 1. \tag{3.1}$$

假定 $\chi \bmod D$ 是一非主特征，令：

$$S_{1,D} = \{\chi : \text{当且仅当} L(s,\chi) \text{在 (3.1) 中有一个零点}\ \rho_\chi = 1 - \frac{\beta_\chi}{\log D} + i\frac{\gamma_\chi}{\log D}\}.$$

$$S_{2,D} = \{\chi : \text{当且仅当} L(s,\chi) \text{在 (3.1) 中有两个零点}\ \rho_{j,\chi} = 1 - \frac{\beta_{j,\chi}}{\log D} + i\frac{\gamma_{j,\chi}}{\log D}, j = 1, 2\}.$$

$$S_{3,D} = \{\chi : \text{当且仅当} L(s,\chi) \text{有} n \text{个零点}\ \rho_{j,\chi} = 1 - \frac{\beta_{j,\chi}}{\log D} + i\frac{\gamma_{j,\chi}}{\log D}, j = 1, \ldots, n, n \ge 3\}.$$

假定 $\bigcup_{j=1}^{3} S_{j,D}$ 中至少有 3 个元素. 否则容易得到我们的主要结果. 因而, 存在一个非主特征 $\chi_1 \bmod D$, 使得 $L(s,\chi_1)$ 在 (3.1) 中有一个零点 $\rho_1 = 1 - \frac{\beta_1}{\log D} + i\frac{\gamma_1}{\log D}$. 由引理 1 - 引理 8 知, 在 $S_{2,D}$ 和 $S_{3,D}$ 中 (除去一个非主特征 $\chi \bmod D$) 不等式 $|\gamma_{j,\chi} - \gamma_{k,\chi}| \le 1\,(j \ne K)$ 成立.

设

$$E_1(\chi) = |H^2(\rho_\chi - 1)|D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_\chi)},$$

$$E_2(\chi) = |H^2(\rho_{1,\chi} - 1)|D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_{1,\chi})} + |H^2(\rho_{2,\chi} - 1)|D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_{2,\chi})},$$

$$E_3(\chi) = \sum_{\rho_\chi} |H^2(\rho_\chi - 1)|D^{10.5\mathrm{Re}(1-\rho_\chi)}.$$

引理 27 设 $\chi \bmod D$ 是任一非主特征. 若 $0.6 \le \lambda \le 0.89$, 则

$$\sum_{\chi\in S_{1,D}\setminus\{\chi_2\}} E_1(\chi) + \sum_{\chi\in S_{2,D}\setminus\{\chi_2\}} E_2(\chi) + \sum_{\chi\in S_{3,D}\setminus\{\chi_2\}} E_3(\chi)$$
$$\le 8.6465C_1(\lambda)e^{3.5\lambda},$$

其中

$$C_1(\lambda) = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{e^{2.31\lambda} - e^{1.632\lambda}}{0.68\lambda}e^{-3.5\lambda}\right).$$

证 根据 [11] 中引理 22 的证明方法来证明引理 27, 只需估计 $\frac{1}{4}I_1E_2(\chi)$, $\frac{1}{9}E_3(\chi)I_2$, 其中

$$I_1 = \int_{\log z_1}^{\log z_3} \left|\sum_{j=1}^{2} e^{-S_{j,\chi}t}\right|^2 dt, \quad I_2 = \int_{\log z_1}^{\log z_3} \left|\sum_{j=1}^{3} e^{-S_{j,\chi}t}\right|^2 dt.$$

经计算得

$$\frac{1}{4}I_1E_2(\chi) \le 1.24673,$$

$$\frac{1}{9}I_2E_3(\chi) \le (0.4813)(2.6851) \le 1.29234.$$

由此即完成证明.

4. $C = 11.5$ 的 证 明

引理 28 假定 χ, χ_1 为模 D 的非主特征, χ_1 是实特征. $\beta_1 = 1 - \frac{\delta_1}{\log D}$

是 $L(s,\chi)$ 的实零点，$\rho_1=1-\frac{\delta}{\log D}+i\gamma$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点，且 $\delta_1\le\delta$, $|\gamma|\le 1$, 则：

$$\delta\ge\left(\frac{2}{3}-\epsilon\right)\log\frac{2-\epsilon}{3\delta_1}.$$

证 见 [8].

对于正整数 n, 我们定义

$$R(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}H^2(w)e^{-w\log n}dw,$$

及

$$J(\chi)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}H^2(w)\frac{L'}{L}(w+1,\chi)dw.$$

则：$R(n)=0$, 若 $n>D^{11.5}$ 或 $n<D^{9.5}$; $R(n)\ll\frac{1}{\log D}$, 若 $D^{9.5}\le n\le D^{11.5}$. 因而

$$J(\chi)=\sum_{D^{9.5}\le n\le D^{11.5}}\frac{\wedge(n)\chi(n)R(n)}{n}.$$

设

$$E_0=\begin{cases}0, & \chi\ne\chi_0,\\ 1, & \chi=\chi_0.\end{cases}$$

则

$$J(x)=E_0-\sum_{\rho_\chi}H^2(\rho_\chi-1)+O(D^{-2}),$$

其中 ρ_χ 通过 $L(s,\chi)$ 的非显然零点．因此，

$$\sum_{\substack{D^{9.5}\le n\le D^{11.5}\\ n\equiv K(\bmod D)}}\frac{\wedge(n)R(n)}{n}=\frac{1}{\phi(D)}\left\{1-\sum_{\chi\bmod D}\bar{\chi}(K)\sum_{\rho_\chi}H^2(\rho_\chi-1)\right\}+0\left(\frac{1}{D^2}\right).$$

于是为了证明 $P(D,K)\ll D^{11.5}$, 只需要证明：

$$\sum_{\chi\bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)|<1-D^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

令

$$Z(\chi;\xi,\eta)=\sum_{1-\frac{\xi}{\log D}\le\mathrm{Re}\rho_\chi<1-\frac{\eta}{\log D}}|H^2(\rho_\chi-1)|.$$

若 $0 < b \le 0.6$, 则

$$\sum_{\chi \bmod D} \sum_{\rho_\chi} |H^2(\rho_\chi - 1)| = \sum_{\chi \bmod D} Z(\chi; b, 0) + \sum_{\chi \bmod D} Z(\chi; 0.89, 0.6) + \sum_{\chi \bmod D} Z\left(\chi; \frac{1}{2}\log D, 0.89\right) + \sum_{\chi \bmod D} Z(\chi; 0.6, b). \tag{4.2}$$

令

$$Z_1(\chi; \xi, \eta, \theta) = \sum_{1-\frac{\xi}{\log D} \le \mathrm{Re}\rho_\chi < 1-\frac{\eta}{\log D}} |H^2(\rho_\chi - 1)| D^{\theta \mathrm{Re}(1-\rho_\chi)}.$$

我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \bmod D} Z(\chi; 0.6, b) &= \int_b^{0.6} e^{-10.5\lambda} d_\lambda \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; \lambda, b, 10.5) \\ &= e^{10.5(0.6)} \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; 0.6, b, 10.5) \\ &\quad + 10.5 \int_b^{0.6} e^{-10.5\lambda} \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; \lambda, b, 10.5) d\lambda \end{aligned} \tag{4.3}$$

和

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \bmod D} Z(\chi; 0.89, 0.6) &= \int_{0.6}^{0.89} e^{-10.5\lambda} d_\lambda \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; \lambda, 0.6, 10.5) \\ &= e^{-10.5(0.89)} \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; 0.89, 0.6, 10.5) \\ &\quad + 10.5 \int_{0.6}^{0.89} e^{-10.5\lambda} \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; \lambda, 0.6, 10.5) d\lambda. \end{aligned} \tag{4.4}$$

另一方面, 我们有:

$$\begin{aligned}&10.5 \int_{0.6}^{0.89} e^{-10.5\lambda} \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; \lambda, 0.6, 10.5) d\lambda \\ &= 10.5 \int_{0.6}^{0.89} e^{-10.5\lambda} \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; \lambda, b, 10.5) d\lambda \\ &\quad + \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi; 0.6, b, 10.5)(e^{-10.5(0.89)} - e^{-10.5(0.6)}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

由 (4.2) – (4.5) 得:

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)| = \sum_{\chi \bmod D} Z(\chi;b,0)+10.5\int_b^{0.6} e^{-10.5\lambda}$$
$$\cdot \sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;\lambda,b,10.5)d\lambda + e^{-10.5(0.89)}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;0.89,b',10.5)$$
$$+10.5\int_{0.6}^{0.89} e^{-10.5\lambda}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;\lambda,b,10.5)d\lambda$$
$$+\sum_{\chi \bmod D} Z\left(\chi;\frac{1}{2}\log D,0.89\right)$$

$$=\sum_{\chi \bmod D} Z(\chi;b,0)-e^{-10.5b}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;b,0,10.5)+10.5\int_b^{0.89} e^{-10.5\lambda}$$
$$\cdot\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;\lambda,0,10.5)d\lambda + e^{-10.5(0.89)}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;0.89,0,10.5)$$
$$+\sum_{\chi \bmod D} Z\left(\chi;\frac{1}{2}\log D,0.89\right).$$

由于

$$\sum_{\chi \bmod D} Z\left(\chi;\frac{1}{2}\log D,0.89\right)=9.5\int_{0.89}^{\infty} e^{-9.5\lambda}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;\lambda,0,9.5)d\lambda$$
$$-e^{-9.5(0.89)}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;0.89,0,9.5).$$

我们推得:

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|(H^2(\rho_\chi-1)| = \sum_{\chi \bmod D} Z(\chi;b,0)-e^{-10.5b}$$
$$\cdot\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;b,0,10.5)+10.5\int_b^{0.89} e^{-10.5\lambda}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;\lambda,0,10.5)d\lambda$$
$$+9.5\int_{0.89}^{\infty} e^{-9.5\lambda}\sum_{\chi \bmod D} Z_1(\chi;\lambda,0,9.5)d\lambda. \tag{4.6}$$

由 [9] 中引理 6 及 [9] 中定理 1 的证明方法, 我们得到

$$9.5\int_{1.5}^{\infty}(2.347)\,\frac{6.2557}{\lambda}\left(e^{3.5\lambda}-\frac{(e^{2.31\lambda}-e^{1.63\lambda})}{0.68\lambda}\right)e^{-9.5\lambda}d\lambda$$
$$\leq 83.20585\int_{1.5}^{\infty} e^{-6\lambda}d\lambda \leq 0.00171141.$$

由 [9] 中定理 1 及引理 26, 得

$$
\begin{aligned}
&9.5\int_{0.89}^{1.5}(1.12142)\,\frac{6.2557}{\lambda}\left(e^{3.5\lambda}-\frac{(e^{2.31\lambda}-e^{1.63\lambda})}{0.68\lambda}\right)e^{-9.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+9.5\int_{0.89}^{1.5}(2)(2.347)e^{-9.5\lambda}d\lambda\\
&\quad\le 55.40127\int_{0.89}^{1.5}e^{-6\lambda}d\lambda+44.593\int_{0.89}^{1.5}e^{-9.5\lambda}d\lambda\le 0.04414.
\end{aligned}
$$

因此 (4.6) 中最后一项给出 0.04585141.

在下面的讨论中我们令 $L=\log D$.

(1) 假定存在一个特征 $\chi \bmod D$, 使得 $L(s,\chi)$ 有一个零点 $\rho_\chi = 1-\frac{\beta_\chi}{L}+i\gamma_\chi$, 且 $1-\frac{0.44}{L}\le\sigma\le 1-\frac{0.103668}{L}$, $|t|\le 1$. 由引理 28, 我们知道不存在非主实特征 $\chi_1 \bmod D$, 使得 $\beta_1 = 1-\frac{\delta_1}{L}$ 是 $L(s,\chi_1)=0$ 的实零点，其中 $0<\delta_1\le 0.103668$.

若 $0.103668\le\beta_\chi\le 0.12$, 由引理 16, 引理 19, 引理 20, 引理 22, 及引理 27, 我们有:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)|\le 2.02e^{-10.5(0.103668)}\\
&\quad+\Bigg(10.5\int_{0.50355}^{0.511902}11e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.511902}^{0.521292}12e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+10.5\int_{0.521292}^{0.529472}13e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.529472}^{0.536717}14e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+10.5\int_{0.536717}^{0.543179}15e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.543179}^{0.548921}16e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+10.5\int_{0.548921}^{0.554059}17e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.554059}^{0.558697}18e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+10.5\int_{0.558697}^{0.56297}19e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.56297}^{0.566893}20e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+10.5\int_{0.566893}^{0.570473}21e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.570473}^{0.573752}22e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+10.5\int_{0.573752}^{0.576768}23e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.576768}^{0.579561}24e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&\quad+10.5\int_{0.579561}^{0.582175}25e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.582175}^{0.584606}26e^{-10.5\lambda}d\lambda
\end{aligned}
$$

$$+10.5\int_{0.584606}^{0.586898}27e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.586898}^{0.589068}28e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.589068}^{0.59109}29e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.59109}^{0.592991}30e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.592991}^{0.59477}31e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.59477}^{0.596457}32e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.596457}^{0.598055}33e^{-10.5\lambda}d\lambda+0.5\int_{0.598055}^{0.599562}34e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.599562}^{0.600983}35e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.600983}^{0.602332}36e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.602332}^{0.603625}37e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.603625}^{0.604851}38e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.604851}^{0.606013}39e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.606013}^{0.607121}40e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.607121}^{0.608204}41e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.608204}^{0.609242}42e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.609242}^{0.610241}43e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.610241}^{0.611193}44e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.611193}^{0.612102}45e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.612102}^{0.612977}46e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.612977}^{0.613822}47e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.613822}^{0.61463}48e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.61463}^{0.6154}49e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.6154}^{0.616152}50e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.616152}^{0.616876}51e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.616876}^{0.61757}52e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.61757}^{0.618236}53e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.618236}^{0.618884}54e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.618884}^{0.619511}55e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.619511}^{0.62011}56e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.62011}^{0.62069}57e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.62069}^{0.62126}58e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.62126}^{0.621808}59e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.621808}^{0.622336}60e^{-10.5\lambda}d\lambda\Big)$$

$$\cdot(1.032694744)$$

$$\leq 0.75913859$$

及

$$10.5\int_{0.622}^{0.89}e^{-10.5\lambda}8.6465C_1(0.622336)e^{3.5\lambda}d\lambda$$
$$\leq 89.185284\int_{0.622336}^{0.89}e^{-7\lambda}d\lambda \leq 0.13831.$$

因此

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)| \leq 0.9433.$$

类似地，若 $0.12 \leq \beta_\chi \leq 0.14, 0.14 \leq \beta_\chi \leq 0.155$ 或 $0.155 \leq \beta_x \leq 0.165$, 则有

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)| \leq 0.977.$$

由引理 16, 21, 22 及 27, 我们有：若 $0.165 \leq \beta_\chi \leq 0.175$, $0.175 \leq \beta_\chi \leq 0.185$, $0.185 \leq \beta_\chi \leq 0.195$, 及 $0.195 \leq \beta_\chi \leq 0.2$, 则

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)| \leq 0.963.$$

若 $0.2 \leq \beta_x \leq 0.205$, 假设 χ' 为一非主特征， $\rho_2 = 1-\frac{\beta_2}{L}+i\gamma_2$ 是 $L(s,\chi')$ 的零点，且 β_2 距 β_χ 最近. 假定 $\beta_2 > 0.31$, 由引理 16, 21, 22, 及引理 27, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)| \leq{}& 2.02e^{-10.5(0.2)}\\
&+2.02e^{-10.5(0.31)}-4.04e^{-10.5(0.32)}\\
&+\Big(10.5\int_{0.32}^{0.33315}7e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.33315}^{0.35317}8e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&+10.5\int_{0.35317}^{0.369636}9e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.369636}^{0.383382}10e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&+10.5\int_{0.383382}^{0.395112}11e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.395112}^{0.405246}12e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&+10.5\int_{0.405246}^{0.414069}13e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.414069}^{0.42187}14e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&+10.5\int_{0.42187}^{0.428833}15e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.428833}^{0.435045}16e^{-10.5\lambda}d\lambda\\
&+10.5\int_{0.435045}^{0.440628}17e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.440628}^{0.44573}18e^{-10.5\lambda}d\lambda\end{aligned}$$

$$+10.5\int_{0.44573}^{0.450379}19e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.450379}^{0.45462}20e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.45462}^{0.458513}21e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.458513}^{0.462092}22e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.462092}^{0.465432}23e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.465432}^{0.468541}24e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.468541}^{0.47143}25e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.47143}^{0.474121}26e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+0.5\int_{0.474121}^{0.476634}27e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.476634}^{0.478987}28e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.478987}^{0.481194}29e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.481194}^{0.4833}30e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.4833}^{0.48529}31e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.48529}^{0.487168}32e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.487168}^{0.488943}33e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.488943}^{0.490623}34e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.490623}^{0.492216}35e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.492216}^{0.493728}36e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.493728}^{0.495166}37e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.495166}^{0.496534}38e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.496534}^{0.49783}39e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.49783}^{0.499081}40e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.499081}^{0.50029}41e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.50029}^{0.501451}42e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.501451}^{0.502562}43e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.502562}^{0.503625}44e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.503625}^{0.50464}45e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.50464}^{0.505624}46e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.505624}^{0.506564}47e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.506564}^{0.507468}48e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.507468}^{0.508337}49e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.508337}^{0.509174}50e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.509174}^{0.509981}51e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.509981}^{0.510758}52e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.510758}^{0.511507}53e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.511507}^{0.512231}54e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.512231}^{0.51293}55e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.51293}^{0.513606}56e^{-10.5\lambda}d\lambda$$

$$+10.5\int_{0.513606}^{0.514263}57e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.514263}^{0.5149}58e^{-10.5\lambda}d\lambda$$
$$+10.5\int_{0.5149}^{0.515535}59e^{-10.5\lambda}d\lambda+10.5\int_{0.515535}^{0.516141}60e^{-10.5\lambda}d\lambda\Big)$$
$$\cdot(1.032694744)\leq 0.622061.$$

及

$$10.5\int_{0.516141}^{0.6}e^{-10.5\lambda}3.642C(0.516141)e^{4.56006\lambda}d\lambda$$
$$\leq 46.8635042\int_{0.516141}^{0.6}e^{-5.93994\lambda}d\lambda\leq 0.143697447.$$

因此

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)|\leq 0.98. \tag{4.7}$$

当 $\beta_2\leq 0.31$ 时, (4.7) 式仍然成立.

类似地, 若 $0.205\leq\beta_\chi\leq 0.21$, $0.21\leq\beta_\chi\leq 0.215$, $0.215\leq\beta_\chi\leq 0.22$, $0.22\leq\beta_\chi\leq 0.225$, $0.225\leq\beta_\chi\leq 0.23$, 及 $0.23\leq\beta_\chi\leq 0.235$, 则有

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi-1)|\leq 0.9991.$$

在这些计算中, 我们用了下面的结果:

设 $S_{D,\lambda}$ 是由满足如下条件的 $L(s,\chi)$ 构成的集合: $\chi \bmod D$ 为一非主特征, 它至少有零点 $\rho_\chi=\beta_\chi+i\gamma_\chi$, 且

$$1-\frac{\lambda}{L}\leq\beta_x\leq 1,\quad |\gamma_\chi|\leq 1. \tag{4.8}$$

其中 $0.1\leq\lambda\leq\log\log L$.

当 $0.1\leq\lambda\leq\log\log L$ 时, 设 $Q(\lambda)$ 表示 $S_{D,\lambda}$ 中 $L(s,\chi)$ 的个数. 由 [9] 中的方法我们可得到:

$$Q(\lambda)\leq\frac{(h_3-h_1)}{2\lambda h_4(h_2-h_1)}\left(e^{2h_3\lambda}-\frac{(e^{2h_2\lambda}-e^{2h_1\lambda})}{2\lambda(h_2-h_1)}\right),$$

这里 $\frac{3}{8}+h_2+h_4<h_3$, 且 $\frac{3}{8}+2h_4<h_1$.

如果 $\lambda\geq 1.5$, 或 $1.3\leq\lambda\leq 1.5$, 取 $h_4=0.09000001$, $h_2=0.7550201$, $h_3=1.22002$, $h_1=0.55501$, 则

$$Q(\lambda)\leq\frac{18.4756513}{\lambda}\left(e^{2.44004\lambda}-\frac{(e^{1.5100402\lambda}-e^{1.11002\lambda})}{0.4000202\lambda}\right). \tag{4.9}$$

如果 $1.1 \le \lambda \le 1.3$, 或 $1 \le \lambda \le 1.1$, 取 $h_4 = 0.12$, $h_2 = 0.9150201$, $h_3 = 1.41002$, $h_1 = 0.61501$, 则

$$Q(\lambda) \le \frac{11.04143383}{\lambda}\left(e^{2.82004\lambda} - \frac{(e^{1.8300402\lambda} - e^{1.23002\lambda})}{0.6000202\lambda}\right). \tag{4.10}$$

如果 $0.89 \le \lambda \le 1$, 取 $h_4 = 0.14$, $h_2 = 0.9550201$, $h_3 = 1.47002$, $h_1 = 0.65501$, 则

$$Q(\lambda) \le 9.70217336\left(e^{2.94004\lambda} - \frac{(e^{1.9100402\lambda} - e^{1.31002\lambda})}{0.6000202\lambda}\right). \tag{4.11}$$

由 (4.9) – (4.11) 可得:

$$9.5\int_{1.5}^{\infty}(2.347)Q(\lambda)e^{-9.5\lambda}d\lambda \le 223.3982368\int_{1.5}^{\infty}e^{-7.05996\lambda}d\lambda \le 0.000796388, \tag{4.12}$$

$$9.5\int_{1.3}^{1.5}(1.12142)Q(\lambda)e^{-9.5\lambda}d\lambda \le 116.1412528\int_{1.3}^{1.5}e^{-7.05996\lambda}d\lambda \le 0.001285199, \tag{4.13}$$

$$9.5\int_{1}^{1.3}(1.12142)Q(\lambda)e^{-9.5\lambda}d\lambda \le 84.762155771\int_{1}^{1.3}e^{-6.67996\lambda}d\lambda \le 0.013787215, \tag{4.14}$$

$$9.5\int_{0.89}^{1}(1.12142)Q(\lambda)e^{-9.5\lambda}d\lambda \le 71.47969735\int_{0.89}^{1}e^{-6.55996\lambda}d\lambda \le 0.016319065, \tag{4.15}$$

$$9.5\int_{0.89}^{1.5}(2)(2.347)e^{-9.5\lambda}d\lambda \le 0.0009^{9601}. \tag{4.16}$$

根据 (4.12) – (4.16), (4.6) 中最后一项给出 0.033183877.

如果 $0.235 \le \beta_\chi \le 0.24$, $0.24 \le \beta_\chi \le 0.245$, $0.245 \le \beta_\chi \le 0.25$, $0.25 \le \beta_\chi \le 0.255$, $0.255 \le \beta_\chi \le 0.26$, $0.26 \le \beta_\chi \le 0.265$, $0.265 \le \beta_\chi \le 0.27$, $0.27 \le \beta_\chi \le 0.275$, $0.275 \le \beta_\chi \le 0.28$, $0.28 \le \beta_\chi \le 0.285$, $0.285 \le \beta_\chi \le 0.29$, $0.29 \le \beta_\chi \le 0.295$, $0.295 \le \beta_\chi \le 0.3$, $0.3 \le \beta_\chi \le 0.305$, $0.305 \le \beta_\chi \le 0.31$, $0.31 \le \beta_\chi \le 0.32$, $0.32 \le \beta_\chi \le 0.33$, $0.33 \le \beta_\chi \le 0.35$, $0.35 \le \beta_\chi \le 0.38$, $0.38 \le \beta_\chi \le 0.41$, $0.41 \le \beta_\chi \le 0.44$, 由引理 19 – 22, 引理 27, 经非常复杂的计算可得:

$$\sum_{\chi \bmod D}\sum_{\rho_\chi}|H^2(\rho_\chi - 1)| \le 0.99997.$$

(2) 假若存在一非主实特征，使得 $\rho_1 = \frac{\delta_1}{L}$ 是 $L(s,\chi_1)$ 的实零点，且 $D^{-\frac{1}{2}}L \le \delta_1 \le 0.103668$, 则由引理 28 可得

$$\delta \ge 0.6666 \log \frac{0.6666}{0.103668} \ge 1.24$$

及

$$\delta \ge 0.6666 \log \frac{0.6666}{\delta_1}.$$

因而

$$e^{-6.5\delta} \le e^{-4.3329 \log \frac{0.6666}{\delta_1}} \le \left(\frac{\delta_1}{0.6666}\right)^{4.3329}. \tag{4.17}$$

根据引理 6, [9] 中定理 1, 及 (4.17), 我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \bmod D} \sum_{\rho_\chi} |H(\rho_\chi - 1)|^2 &\le e^{-8.65\delta_1} + 2.347 \int_\delta^\infty e^{-9.5\lambda} dQ(\lambda) \\ &\le 1 - 3.5\delta_1 + 22.2965 \int_\delta^\infty Q(\lambda) e^{-9.5\lambda} d\lambda \\ &\le 1 - 3.5\lambda\delta_1 + 300 \int_\delta^\infty e^{-6.5\lambda} d\lambda \\ &\le 1 - 3.5\delta_1 + 47 e^{-6.5\delta} \\ &\le 1 - 3.5\delta_1 + 47\left(\frac{\delta_1}{0.6666}\right)^{4.3329} \\ &\le 1 - 3.5\delta_1 + 0.177\delta_1 \le 1 - \delta_1.\end{aligned}$$

于是，我们证得了 (4.1).

参 考 文 献

[1] Pan Chengdong. On the least prime in an arithmetical progression. *Sci. Record* (N. S.), 1958, **1**: 311~313

[2] Chen Jingrun. On the least prime in an arithmetical progression. *Sci. Sin.*, 1964, **14**: 1868~1871

[3] Matti Jutila. *Proc. of Sym. in Pure Math. AMS.*, 1970: 370

[4] Matti Jutila. A new estimate for Linnik's constant, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, 1970, **471**: 8

[5] Chen Jingrun. On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (I), *Sci. Sin.*, 1977, **20**: 529~562

[6] Matti Jutila. On the Linnik's constant, *Math. Scand.*, 1977, **41**: 54~62

[7] Graham S. Applications of Sieve Methods, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1977

[8] Graham S. On the Linnik's constant, *Acta Arith.*, 1981, **39**: 163~179

[9] Chen Jingrun. On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (II), *Sci. Sin.*, 1979, **22**: 859~889

[10] Wang Wei. On the least prime in an arithmetical progression, *Acta Math. Sin.*, 1986, **29**: 826~838

[11] Chen Jingrun, Liu Jianmin. On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (III), (IV), *Sci. Sin.*, 1989, to appear

[12] Chen Jingrun, Liu Jianmin. The exceptional set of Goldbach num,bers (III), to appear

[13] Chen Jingrun. The exceptional set of Goldbach num,bers (II), *Sci. Sin.*, 1983, **26**: 714~731

陈景润论著目录

[1] 关于三角和的一个不等式，厦门大学学报 (自然科学版), 1957, no. 1, 87 - 91.

[2] 华林问题中 $G(k)$ 的估值，数学学报， **8**(1958), 253 - 257.

[3] Waring's problem for $g(5)$, *Sci. Rec.*, **3**(1959), 327 - 330.

[4] 华林问题中 $g(\varphi)$ 的估值，数学学报， **9**(1959), 264 - 270.

[5] 关于 Jesmanowicz 的猜测，四川大学学报， 1962, 18 - 25.

[6] 给定区域内的整点问题，数学学报， **12**(1962), 408 - 420; *Sci. Sin.*, **12**(1963), 151 - 161.

[7] Corrigendum to Yin Wen-lin's paper "The lattice-points in a circle", *Sci. Sin.*, **11**(1962), 1725.

[8] 圆内整点问题，数学学报， **13**(1963), 299 - 313; *Sci. Sin.*, **12**(1963), 633 - 649.

[9] Improvement of asymptotic formulas for the number of lattice-points in a region of the three dimensions (Ⅱ), *Sci. Sin.*, **12**(1963), 751 - 764.

[10] 关于三维除数问题,数学学报，**14**(1964), 549 - 558; *Sci. Sin.*, **14**(1965), 20 - 29.

[11] 华林问题 $g(5) = 37$, 数学学报， **14**(1964), 715 - 734; *Sci. Sin.*, **13**(1964), 1547 - 1568.

[12] 某种三角和的估值，数学学报， **14**(1964), 765 - 768.

[13] An improvement of asymptotic formulas for $\sum_{n\le x} d_3(n)$ where $d_3(n)$ denotes the number of solutions of $n = pqr$, *Sci. Sin.*, **13**(1964), 1185 - 1188.

[14] 关于 $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, 数学学报， **15**(1965), 159 - 173; *Sci. Sin.*, **14**(1965), 522 - 538.

[15] 关于谢盛刚的"表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和"一文的一些意见，数学进展， **8**(1965), 335 - 336.

[16] On large odd number as sum of three almost equal primes, *Sci. Sin.*, **14**(1965), 1113 - 1117.

[17] On the least prime in an arithmetical progression, *Sci. Sin.*, **14**(1965), 1868 - 1871.

[18] 表大偶数为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和，科学通报，**17**(1966), 385 – 386.

[19] 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和，中国科学，**16**(1973), 111 – 128; *Sci. Sin.*, **16**(1973), 157 – 176.

[20] 华林问题 $g(4)$ 的估值，数学学报， **17**(1974), 131 – 142.

[21] 关于区间中的殆素数的分布问题，中国科学， **19**(1976), 7 – 20; *Sci. Sin.*, **18**(1975), 611 – 627.

[22] 关于算术级数中的最小素数和 L 函数零点的二个定理，中国科学，**20**(1977), 383 – 414; *Sci. Sin.*, **20**(1977), 529 – 562.

[23] On Prof. Hua's estimate of exponential sums, *Sci. Sin.*, **20**(1977), 711 – 719.

[24] $1+2$ 系数估计的进一步改进 —— 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和 (Ⅱ), 中国科学， **21**(1978), 477 – 494; *Sci. Sin.*, **21**(1978), 421 – 430.

[25] On the Goldbach's problem and the sieve methods, *Sci. Sin.*, **21**(1978), 701 – 739.

[26] On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (Ⅱ), *Sci. Sin.*, **22**(1979), 859 – 889.

[27] 关于区间中的殆素数的分布问题 (Ⅱ), 中国科学， **22**(1979), 12–32; *Sci. Sin.*, **22**(1979), 253 – 275.

[28] On some problems in prime number theory, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1979 – 1980, 167 – 170.

[29] (与潘承洞合作)Goldbach 数的例外集合，山东大学学报， 1979, 1–27; 中国科学， **23**(1980), 219 – 232; *Sci. Sin.*, **23**(1980), 416 – 430.

[30] Goldbach 数的例外集合 (Ⅱ), 中国科学 (A 辑), **26**(1983), 327 – 342; *Sci. Sin.*, **26**(1983), 714 – 731.

[31] (与黎鉴愚合作) 关于自然数前 n 项幂的和，厦门大学学报， **23**(1984), no. 2, 134 – 147.

[32] 某种三角和的估计及其应用，中国科学 (A 辑), **27**(1984), 1096 – 1103; *Sci. Sin.*, **28**(1985), 449 – 458.

[33] (与黎鉴愚合作) 关于等幂和问题，科学通报， **30**(1985), 316 – 317.

[34] (与黎鉴愚合作) 关于等幂和问题的进一步研究，科学通报， **30**(1985), 1281 – 1285; **31**(1986), 361 – 362.

[35] 关于 L- 函数的零点分布，中国科学 (A 辑), **29**(1986), 673 - 689; *Sci. Sin.*, **29**(1986), 897 - 913.

[36] 关于 L- 函数的三个定理 (I), (II), 曲阜师范大学学报， 1986, no. 2, 1 - 8; no. 3, 1 - 14.

[37] (与黎鉴愚合作) On the sum of powers of natural numbers, 数学季刊, **2**(1987), 1 - 18.

[38] (与刘健民合作) 算术级数中的最小素数和与 L- 函数零点有关的定理 (III), 科学通报， **33**(1988), 794; **33**(1988), 1832 - 1833.

[39] (与王天泽合作) 奇数情形 Goldbach 问题研究，科学通报， **34** (1989), 1521 - 1522.

[40] (与刘健民合作) 算术级数中的最小素数和与 L 函数零点有关的定理 (III), (IV), 中国科学 (A 辑), **32**(1989), 337 - 351; *Sci. Sin.*, **32**(1989), 654 - 673; *Sci. Sin.*, **32**(1989), 792 - 807.

[41] (与王天泽合作) 关于哥德巴赫问题，数学学报， **32**(1989), 702 - 718.

[42] (与王天泽合作) 关于 L- 函数例外零点的一个定理，数学学报，**32**(1989), 841 - 858.

[43] (与刘健民合作) 关于 L 函数在直线 $\sigma = 1$ 附近的零点分布，中国科学技术大学研究生院学报， **6**(1989), 1 - 21.

[44] (与刘健民合作) The exceptional set of Goldbach numbers (III), (IV), 数学季刊， **4**(1989), 1 - 15; **5**(1990), 1 - 10.

[45] (与王天泽合作) 关于算术级数中素数分布的一个定理，中国科学， **32**(1989), 1121 - 1132; *Sci. Sin.*, **33**(1990), 397 - 408.

[46] (与王天泽合作) 关于 Dirichlet L- 函数的零点分布，四川大学学报， **26**(1990), 145 - 155.

[47] (与王天泽合作) Estimation of the second main term in odd Goldbach problem, *Acta Math. Sci.*, **11**(1991), no. 3, 241 - 250.

[48] (与刘健民合作) On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (V), International Symposium in Memory of Hua Loo Keng, Vol. 1, 19 - 42, Science Press and Springer - Verlag, 1991.

[49] (与王天泽合作) 关于 Goldbach 问题的一点注记，数学学报，**34**(1991), 143 - 144.

[50] (与王天泽合作) 广义 Riemann 猜想下的奇数 Goldbach 问题，中国科学， **36**(1993), 345 - 351; *Sci. Sin.*, **36**(1993), 682 - 691.

[51] (与王天泽合作) 素变数线性三角和的估计，数学学报， **37**(1994), 25 – 31.

[52] (与王天泽合作) 关于奇数 Goldbach 问题 (Ⅱ), 数学学报， **39** (1996), 169 – 174.

[53] 初等数论 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，科学出版社， 1978, 1982, 1989.

[54] 组合数学，河南教育出版社， 1984.

[55] (与邵品琮合作) 哥德巴赫猜想，辽宁教育出版社， 1987.

[56] 组合数学简介，天津教育出版社， 1989.